МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1994

УДК 539.3

© 1994 г. Л. М. ЗУБОВ, А. Н. РУДЕВ

О ПРИЗНАКАХ ВЫПОЛНИМОСТИ УСЛОВИЯ АДАМАРА ДЛЯ ВЫСОКОЭЛАСТИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Сформулированы достаточные признаки справедливости условия Адамара, которое представляет собой требование неотрицательной определенности акустического тензора упругой среды [1, 2] и является одним из наиболее важных и обоснованных [1—5] ограничений в форме неравенств, накладываемых на функцию удельной потенциальной энергии деформации П нелинейно-упругого материала. Рассмотрены два наиболее распространенных способа задания упругого потенциала П несжимаемого материала: $\Pi = \Pi(I_1, I_2)$; $\Pi = \Pi(J_1, J_2)$, где I_1, I_2 и J_1, J_2 — главные инварианты соответственно меры деформации Фингера и тензора искажения, квадрат которого совпадает с мерой деформации Фингера. Подробно изучены вырожденные случаи $\Pi = \Pi(I_m)$, $\Pi = \Pi(J_m)$ ($m = 1$ или $m = 2$), для которых найдены критерии выполнимости условия Адамара при любых деформациях, а также получены общие представления для потенциалов, удовлетворяющих этому условию. Исследуются взаимосвязи между элементарными неравенствами [4], эквивалентными условию Адамара. Установлено, что в частных случаях $\Pi = \Pi(I_m)$, $\Pi = \Pi(J_m)$ независимых среди них только четыре, а при выпуклой зависимости потенциала от инвариантов — только три (вместо девяти в общем случае). Получены оценки для потенциала П при малых и больших деформациях, вытекающие из условия Адамара. С точки зрения условия Адамара исследован ряд употребительных моделей высокоэластичных материалов.

1. Пусть П — удельная потенциальная энергия деформации изотропного несжимаемого упругого материала. Будем предполагать, что потенциал П является дважды непрерывно дифференцируемой функцией переменных I_1, I_2 или J_1, J_2 всюду, за исключением, быть может, точки $I_1 = I_2 = 3$ или $J_1 = J_2 = 3$, отвечающей недеформированному состоянию (тем самым в рассмотрение включаются также материалы, обладающие физической нелинейностью при малых деформациях). Здесь I_1, I_2 и J_1, J_2 — первый и второй главные инварианты соответственно меры деформации Фингера [1] и тензора искажения [1, 2], являющегося положительно определенным квадратным корнем из меры Фингера. Третьи инварианты указанных тензоров в случае несжимаемого материала равны единице. Как установлено в [4], система элементарных неравенств, равносильных условию Адамара, представляется в виде

$$A_l \geq 0 \quad (l = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

$$B_l \geq 0 \quad (l = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

$$C_k + \sqrt{B_i B_j} \geq 0, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \tag{1.3}$$

Для указанного выше способа задания потенциала П величины A_k, B_k, C_k определяются формулами

$$A_k = 2(c_1 + c_2 v_k^2) = (e_1 + e_2 v_k)/(v_i + v_j)$$

$$B_k = A_k (v_i + v_j)^2 + D_k = 4A_k v_i v_j + F_k$$

$$
\begin{aligned}
C_k &= 2\,(c_1 + c_2 v_i v_j)\,(v_k + v_i)\,(v_k + v_j) + D_{ij} = \\
&= \frac{2 v_i v_k}{v_i + v_k}\,(e_1 + e_2 v_j) + \frac{2 v_j v_k}{v_j + v_k}\,(e_1 + e_2 v_i) + F_{ij}
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

$$D_k = 4\,(v_i^2 - v_j^2)^2\,(c_{11} + 2c_{12}v_k^2 + c_{22}v_k^4)$$

$$F_k = (v_i - v_j)^2\,(e_{11} + 2e_{12}v_k + e_{22}v_k^2)$$

$$D_{ij} = 4\,(v_k^2 - v_i^2)\,(v_k^2 - v_j^2)\,[c_{11} + c_{12}\,(v_i^2 + v_j^2) + c_{22}v_i^2 v_j^2]$$

$$F_{ij} = (v_k - v_i)\,(v_k - v_j)\,[e_{11} + e_{12}\,(v_i + v_j) + e_{22}v_i v_j]$$

$$c_m \equiv \partial\Pi/\partial I_m, \quad c_{mn} \equiv \partial^2\Pi/\partial I_m \partial I_n \quad (m, n = 1, 2)$$

$$I_1 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \quad I_2 = v_1^2 v_2^2 + v_2^2 v_3^2 + v_3^2 v_1^2$$

$$e_m \equiv \partial\Pi/\partial J_m, \quad e_{mn} \equiv \partial^2\Pi/\partial J_m \partial J_n \quad (m, n = 1, 2)$$

$$J_1 = v_1 + v_2 + v_3, \quad J_2 = v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_3 v_1$$

Здесь (и далее) v_l $(l = 1, 2, 3)$ — главные растяжения [1, 2], связанные с главными относительными удлинениями δ_l формулами $v_l = 1 + \delta_l$; i, j, k — произвольная перестановка индексов 1, 2, 3. Заметим, что для несжимаемого материала параметры v_1, v_2, v_3 связаны соотношением

$$v_1 v_2 v_3 = 1 \tag{1.5}$$

Подмножество точек $v \equiv (v_1, v_2, v_3)$ трехмерного арифметического пространства с положительными компонентами условимся называть пространством главных растяжений V.

Можно показать, что в общем случае неравенства (1.1)—(1.3) образуют независимую систему условий, то есть ни одно из них не является следствием остальных. Вместе с тем заслуживает внимания следующий факт.

Теорема 1. Допустим, что в заданной точке v пространства главных растяжений V соблюдаются неравенства (1.1), (1.2). Тогда среди неравенств (1.3) нарушенным может быть самое большее одно, а два других обязательно выполняются.

Доказательство. В самом деле, непосредственной проверкой с помощью формул (1.4) нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$2C_k = B_i + B_j - B_k + 4v_i v_j A_k \tag{1.6}$$

Круговая перестановка индексов в тождестве (1.6) дает

$$2C_i = B_j + B_k - B_i + 4v_j v_k A_i \tag{1.7}$$

Сложив в представлениях (1.6), (1.7) левые и правые части и разделив на два, находим

$$C_k + C_i = B_j + 2v_j\,(v_i A_k + v_k A_i) \tag{1.8}$$

Еще два соотношения получаются из (1.8) круговой перестановкой индексов. В силу нашего допущения правая часть в выражении (1.8) неотрицательна. Но тогда среди величин C_i, C_j, C_k отрицательным может быть не более чем одно, что и завершает доказательство.

Замечания 1. Таким образом, в каждой точке $v \in V$ количество независимых неравенств в системе (1.1)—(1.3) не превышает семи. Действительно, из теоремы 1 вытекает, что по крайней мере два неравенства в (1.3) являются следствиями условий (1.1), (1.2). Это не противоречит утверждению о независимости системы (1.1)—(1.3) в общем случае, ибо при изменении точки v (или потенциала П) следствием условий (1.1), (1.2) становится, вообще говоря, другая пара неравенств (1.3).

2. Если среди главных растяжений v_1, v_2, v_3 имеются совпадающие, то все три неравенства (1.3) вытекают из условий (1.1), (1.2). В самом деле, пусть, например, $v_i = v_j$. Тогда из представлений (1.4) получаем $C_i = C_j$, $C_k = B_l = B_j$. Так как $B_l \geq 0$ (по предположению), то на основании теоремы 1 нарушеннным может быть лишь одно из условий $C_i + \sqrt{B_j B_k} \geq 0$, $C_j + \sqrt{B_l B_k} \geq 0$, что исключено ввиду их идентичности.

Отметим также, что, используя тождество (1.6), неравенства (1.3) можно записать в эквивалентной форме

$$B_k \leq (\sqrt{B_i} + \sqrt{B_j})^2 + 4v_i v_j A_k \tag{1.9}$$

Из представления (1.9) очевидным образом вытекает «геометрический» признак справедливости условия Адамара в заданной точке $v \in V$.

Теорема 2. Допустим, что соблюдаются неравенства (1.1), (1.2), причем величины $\sqrt{B_l}$ $(l = 1, 2, 3)$ удовлетворяют неравенству треугольника (возможно, нестрогому). Тогда условие Адамара в рассматриваемой точке $v \in V$ выполнено.

Геометрический признак может оказаться полезным при локальной проверке условия Адамара для сокращения объема вычислений.

Рассмотрим теперь случай вырожденных потенциалов $\Pi = \Pi(I_m)$, $\Pi = \Pi(J_m)$ (здесь и далее либо $m = 1$, либо $m = 2$).

Теорема 3. Если $\Pi = \Pi(I_m)$ или $\Pi = \Pi(J_m)$, то неравенства (1.3) являются следствиями неравенств (1.1), (1.2).

Доказательство. Пусть, например, $m = 2$ и $\Pi = \Pi(I_2)$. Тогда по формулам (1.4) имеем

$$A_k = 2c_2 v_k^2, \quad B_k = 2v_k^2 (v_i + v_j)^2 \, [c_2 + 2v_k^2 (v_i - v_j)^2 c_{22}] \tag{1.10}$$

$$C_k = 2v_i v_j (v_k + v_i)(v_k + v_j) \, [c_2 + 2v_i v_j (v_k - v_i)(v_k - v_j) c_{22}]$$

Следовательно, неравенства (1.1), (1.2) сводятся к требованиям

$$c_2 \geq 0, \quad c_2 + 2v_k^2 (v_i - v_j)^2 c_{22} \geq 0 \tag{1.11}$$

Допустим, что условия (1.11) выполняются, причем $c_{22} \geq 0$. Тогда в силу представлений (1.10) очевидны оценки

$$B_i \geq 4v_i^4 (v_j^2 - v_k^2)^2 c_{22}, \quad B_j \geq 4v_j^4 (v_i^2 - v_k^2)^2 c_{22}$$

$$\sqrt{B_l B_j} \geq 4v_i^2 v_j^2 |(v_k^2 - v_i^2)(v_k^2 - v_j^2)| c_{22}$$

$$C_k + \sqrt{B_l B_j} \geq 2v_i v_j (v_k + v_i)(v_k + v_j) c_2 \geq 0$$

т. е. неравенства (1.3) также соблюдаются. Если же $c_{22} < 0$, то из условий (1.11) вытекают оценки

$$2v_i^2 (v_j - v_k)^2 |c_{22}| \leq c_2, \quad 2v_j^2 (v_i - v_k)^2 |c_{22}| \leq c_2 \tag{1.12}$$

Перемножая почленно неравенства (1.12) и извлекая затем квадратный корень, находим

$$2v_i v_j |(v_k - v_i)(v_k - v_j) c_{22}| \leq c_2 \tag{1.13}$$

Достаточно теперь сравнить соотношение (1.13) с представлением (1.10) для C_k, чтобы убедиться в неотрицательности параметров C_k. Но последнее влечет справедливость неравенств (1.3), что и требовалось установить. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

Таким образом, для вырожденных потенциалов $\Pi = \Pi(I_m)$, $\Pi = \Pi(J_m)$ число элементарных неравенств, эквивалентных условию Адамара, снижается до четырех. Еще более сильный результат получается в предположении выпуклой зависимости потенциала П от инвариантов I_1, I_2 или J_1, J_2.

Теорема 4. Допустим, что потенциал П является выпуклой вниз функцией инвариантов I_1, I_2 или J_1, J_2. Тогда неравенства (1.2), (1.3) являются следствиями неравенств (1.1).

Доказательство. Пусть вначале П = П (I_1, I_2). Условия выпуклости имеют вид

$$c_{11} \geq 0, \quad c_{22} \geq 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \geq 0 \tag{1.14}$$

Учитывая представления (1.4) для B_k и D_k, видим, что неравенства (1.14) обеспечивают неотрицательность D_k, а тем самым и B_k (поскольку предполагается, что $A_k \geq 0$). Осталось проверить неравенства (1.3). Заметим, что приведенное в (1.4) выражение для C_k можно преобразовать к виду

$$C_k = \frac{v_i A_j + v_j A_i}{v_i + v_j} (v_k + v_i)(v_k + v_j) + D_{ij} \tag{1.15}$$

Для оценки D_{ij} воспользуемся тождеством

$$D_i D_j - D_{ij}^2 = 16\,(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)(v_i^2 - v_j^2)^2 (v_k^2 - v_i^2)^2 (v_k^2 - v_j^2)^2 \tag{1.16}$$

Правая часть в соотношении (1.16) неотрицательна ввиду условий (1.14), поэтому $|D_{ij}| \leq \sqrt{D_i D_j}$. Но так как $B_i \geq D_i$, $B_j \geq D_j$, то $|D_{ij}| \leq \sqrt{B_i B_j}$. Принимая во внимание представление (1.15) для C_k, получаем отсюда

$$C_k + \sqrt{B_i B_j} \geq \frac{v_i A_j + v_j A_i}{v_i + v_j} (v_k + v_i)(v_k + v_j) \geq 0$$

Пусть теперь П = П (J_1, J_2). Условия выпуклости принимают при этом вид

$$e_{11} \geq 0, \quad e_{22} \geq 0, \quad e_{11}e_{22} - e_{12}^2 \geq 0 \tag{1.17}$$

С учетом неравенств (1.17) и выражений (1.4) для F_k, B_k находим $F_k \geq 0$, $B_k \geq 0$ (последнее следует также из того, что по предположению $A_k \geq 0$). Представление (1.4) для C_k преобразуется к виду

$$C_k = 2v_k (v_i A_j + v_j A_i) + F_{ij} \tag{1.18}$$

Далее, имеет место тождество

$$F_i F_j - F_{ij}^2 = (e_{11}e_{22} - e_{12}^2)(v_i - v_j)^2 (v_k - v_i)^2 (v_k - v_j)^2 \tag{1.19}$$

из которого в силу условий выпуклости (1.17) вытекает оценка $|F_{ij}| \leq \sqrt{F_i F_j}$. Замечая, что $F_i \leq B_i$, $F_j \leq B_j$, находим отсюда $|F_{ij}| \leq \sqrt{B_i B_j}$. Но тогда на основании (1.18) получаем

$$C_k + \sqrt{B_i B_j} \geq 2v_k (v_i A_j + v_j A_i) \geq 0$$

Теорема доказана. Итак, при выпуклой зависимости потенциала П от инвариантов I_1, I_2 или J_1, J_2 количество независимых неравенств в системе (1.1)—(1.3) понижается до трех.

Замечания 3. Можно показать, что теорема 4 остается в силе и в том случае, когда потенциал П является выпуклой (вниз) функцией главных растяжений v_1, v_2, v_3 (см., в частности, [5]).

4. Известно [1, 2], что условие Адамара является ослабленным вариантом условия сильной эллиптичности (кратко SE-условия) в том смысле, что первое из них представляет собой требование неотрицательной определенности акустического тензора упругой среды, а второе — положительной его определенности.

Можно доказать, что для изотропного несжимаемого упругого материала система элементарных неравенств, эквивалентных SE-условию, получается из (1.1)—(1.3) заменой всюду знака $\geq$ на $>$ (что вполне согласуется с результатом работы [6], где соответствующая система записана в несколько иной форме). При этом теоремы 1—4 сохраняют силу и применительно к системе (1.1)—(1.3), модифицированной указанным выше способом, в чем нетрудно убедиться, анализируя их доказательства.

5. Если потенциал П является выпуклой вверх функцией инвариантов I_1, I_2, то неравенства (1.1)—(1.3), вообще говоря, взаимно независимы. Иначе обстоит дело в случае переменных J_1, J_2 — можно показать, что при этом справедливо заключение теоремы 3, т. е. условия (1.3) являются следствиями неравенств (1.1), (1.2).

6. Теоремы 3, 4 допускают простое механическое истолкование. В самом деле, рассмотрим однородно напряженную упругую среду с главными растяжениями v_1, v_2, v_3. Тогда утверждение теоремы 3 означает, что для вырожденных потенциалов $\Pi = \Pi(I_m)$, $\Pi = \Pi(J_m)$ вещественность скоростей распространения плоских волн малой амплитуды в главных плоскостях меры деформации Фингера обеспечивает их вещественность для любой волновой нормали N. В случае выпуклых вниз потенциалов $\Pi = \Pi(I_1, I_2)$ или $\Pi = \Pi(J_1, J_2)$ достаточным условием вещественности скоростей распространения упругих волн в произвольном направлении N является вещественность последних на главных направлениях меры деформации Фингера.

2. Очевидно, что из теоремы 4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. Если потенциал П является выпуклой вниз функцией инвариантов I_1, I_2 или J_1, J_2, то условие Адамара равносильно неравенствам (1.1). Для выполнения последних достаточно, чтобы соблюдалось хотя бы одно из нижеуказанных требований: потенциал П монотонно не убывает по каждой из переменных I_1, I_2 или J_1, J_2; справедливы неравенства Бейкера — Эриксена [1, 2].

Доказательство тривиально и потому опускается. Заметим лишь, что в принятых здесь обозначениях неравенства Бейкера — Эриксена записываются в форме

$$(v_i \neq v_j) \Rightarrow A_k > 0, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \tag{2.1}$$

Если $v_i = v_j$, то из (2.1) и непрерывности A_k получаем $A_k \geq 0$, т. е. неравенства Бейкера — Эриксена влекут условия (1.1). Для дальнейшего удобно ввести также «обобщенные» неравенства Бейкера — Эриксена, сняв ограничения $v_i \neq v_j$:

$$A_l > 0 \quad (l = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

Учитывая замечание 4 к теоремам 3, 4 полезно отметить следующий факт.

Теорема 6. Если потенциал П является выпуклой вниз функцией инвариантов I_1, I_2 или J_1, J_2, то SE-условие эквивалентно обобщенным неравенствам Бейкера — Эриксена (2.2). Для справедливости последних достаточно, чтобы потенциал П монотонно не убывал по одной из переменных I_1, I_2 или J_1, J_2 и строго возрастал по другой.

Рассмотрим теперь несколько примеров применения теорем 5, 6.

1. Материалы Трелоара и Муни — Ривлина [1]. Отвечающие им потенциалы имеют соответственно вид

$$\Pi = d(I_1 - 3) \quad (d > 0) \tag{2.3}$$

$$\Pi = d_1(I_1 - 3) + d_2(I_2 - 3) \quad (d_1 > 0, d_2 > 0) \tag{2.4}$$

Требования выпуклости (1.14), очевидно, выполняются, так же как и неравенства (1.1) (или (2.2)). Следовательно, для материалов (2.3), (2.4) условие

Адамара (как и SE-условие) соблюдается при любых деформациях. Другим способом этот результат установлен, например, в [1, 6].

2. Материалы Бартенева — Хазановича и Черных — Шубиной [1, 7]. Соответствующие потенциалы можно записать в форме

$$\Pi = d\,(J_1 - 3) \quad (d > 0) \tag{2.5}$$

$$\Pi = d_1\,(J_1 - 3) + d_2\,(J_2 - 3) \quad (d_1, d_2 > 0) \tag{2.6}$$

Ясно, что здесь имеется полная аналогия с примером 1), т. е. потенциалы (2.5), (2.6) удовлетворяют условию Адамара (и SE-условию) в каждой точке $v \in V$.

3. Материал Ривлина — Сондерса [1, 8]. Потенциал Π определяется соотношением

$$\Pi = d\,(I_1 - 3) + f\,(I_2 - 3) \quad (d > 0) \tag{2.7}$$

где $f(x)$ — функция, дважды непрерывно дифференцируемая на луче $[0, +\infty)$ и удовлетворяющая требованию $f(0) = 0$. Покажем, что если $f(x)$ монотонно не убывает и выпукла вниз, то условие Адамара (как и SE-условие) соблюдается при любых деформациях. В самом деле, для потенциала (2.7) имеем (штрих означает производную по x):

$$c_{11} = 0, \quad c_{12} = 0, \quad c_{22} = f''\,(I_2 - 3) \geq 0$$

т. е. требования выпуклости (1.14) выполняются. Значит, можно воспользоваться теоремами 5, 6. Для параметров A_k находим $A_k = d + v_k^2 f'\,(I_2 - 3) \geq d > 0$, что и завершает доказательство.

Отметим, что в [1] этот результат установлен применением критерия Сильвестра к матрице компонент акустического тензора.

4. Материалы Бидермана и Клоснера — Сегала [8]. Выражения для потенциала Π имеют соответственно вид

$$\Pi = d_0\,(I_2 - 3) + d_1\,(I_1 - 3) + d_2\,(I_1 - 3)^2 + d_3\,(I_1 - 3)^3 \tag{2.8}$$

$$\Pi = d_0\,(I_1 - 3) + d_1\,(I_2 - 3) + d_2\,(I_2 - 3)^2 + d_3\,(I_2 - 3)^3 \tag{2.9}$$

Модель (2.9) служит для описания поведения натуральных резин в диапазоне $I_1, I_2 < 8$, тогда как (2.8) дает приемлемое приближение для резин с высоким содержанием серы [8]. Для определенности рассмотрим материал (2.8). Имеем

$$c_1 = d_1 + 2d_2\,(I_1 - 3) + 3d_3\,(I_1 - 3)^2, \quad c_2 = d_0$$

$$c_{11} = 2d_2 + 6d_3\,(I_1 - 3), \quad c_{12} = c_{22} = 0 \tag{2.10}$$

В силу соотношений (1.14), (2.10) достаточные условия выпуклости имеют вид $d_2 \geq 0$, $d_3 \geq 0$. Если дополнить их ограничениями $d_1 \geq 0$, $d_0 \geq 0$, то соблюдаются все требования теоремы 5. Таким образом, при неотрицательных постоянных d_n $(n = 0, 1, 2, 3)$ потенциал (2.8) удовлетворяет условию Адамара в каждой точке $v \in V$ (это же справедливо и для потенциала (2.9)). Ясно также, что достаточными условиями сильной эллиптичности материалов (2.8), (2.9) являются ограничения $d_n \geq 0$ $(n = 0, 1, 2, 3)$, $d_0 + d_1 + d_2 + d_3 > 0$.

5. Гипотетический материал с потенциалом

$$\Pi = d\,(I_1^2 - 2I_2 - 3) \quad)d > 0) \tag{2.11}$$

Условия выпуклости (1.14), очевидно, соблюдаются. Для величин A_k по формулам (1.4) имеем

$$A_k = 2d\,(I_1 - v_k^2) = 2d\,(v_i^2 + v_j^2) > 0$$

Следовательно потенциал (2.11) удовлетворяет условию Адамара (и SE-условию) при любых деформациях. Этот пример показывает, что требования монотонного неубывания или строгого возрастания по соответствующим переменным в теоремах 5, 6 не являются необходимыми.

Для всех рассмотренных выше материалов наряду с условием Адамара соблюдается и SE-условие. Хотя эти ограничения на потенциал П очень близки, в общем случае они не идентичны, о чем свидетельствует следующий пример:

$$\Pi = \sqrt{d_1 (I_1 - 3) + d_2 (I_2 - 3)} \quad (d_1, d_2 > 0) \tag{2.12}$$

Формулы (1.4) с учетом соотношения (1.5) дают

$$A_k = (d_1 + d_2 v_k^2)/\Pi$$

$$B_k = \frac{d_1 + d_2 v_k^2}{\Pi^3} (v_i + v_j)^2 \left[d_1 (v_k^2 + 2v_k^{-1} - 3) + d_2 (v_k^{-2} + 2v_k - 3)\right]$$

$$C_k = \frac{(v_k + v_i)(v_k + v_j)}{2\Pi^3} \{d_1^2 [(v_i^2 + 2v_i^{-1} - 3) + (v_j^2 + 2v_j^{-1} - 3) +$$

$$+ (v_i - v_j)^2] + 2d_1 d_2 [(v_i^2 v_j^2 + v_i^2 v_j^{-1} + v_i^{-1} v_j^2 - 3v_i v_j) +$$

$$+ (v_i + v_j + v_i^{-1} v_j^{-1} - 3)] + d_2^2 [(v_i^{-2} + 2v_i - 3) +$$

$$+ (v_j^{-2} + 2v_j - 3) + (v_i^{-1} - v_j^{-1})^2]\}$$

С помощью теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом конечного множества положительных чисел получаем отсюда $A_k > 0$, $B_k \geq 0$, $C_k \geq 0$, т. е. условие Адамара справедливо для всех $v \in V$. Вместе с тем на кривой L_k в пространстве главных растяжений V, параметрически заданной соотношениями $v_i = \lambda$, $v_j = \lambda^{-1}$, $v_k = 1$ $(0 < \lambda < +\infty)$, имеет место равенство $B_k = 0$, т. е. материал (2.12) не везде обладает свойством сильной эллиптичности.

Отличительная особенность материала (2.12) состоит в физически нелинейном поведении при малых деформациях из неискаженного состояния. Заметим также, что потенциал (2.12) является выпуклой вверх, а не вниз функцией инвариантов I_1, I_2. Тем самым установлено, что требование выпуклости вниз не относится к необходимым признакам выполнимости условия Адамара. Более того, можно привести пример нигде не выпуклого потенциала, удовлетворяющего условию Адамара при любых деформациях:

$$\Pi = d_1 \int \exp \nu (I_3 - 3)^2 \, dI_1 + d_2 \ln \tfrac{1}{3} I_2 \quad (d_1 > 0,\ d_2 \geq 0,\ \nu > 0) \tag{2.13}$$

Зависимость (2.13) получена Харт — Смитом [8, 9] на базе негауссовской молекулярной теории. Можно показать, что условие Адамара выполняется для всех $v \in V$, если, например, $\nu = 3$ и $d_2/d_1 = 0,2$ (доказательство опускается).

3. Достаточный признак справедливости условия Адамара для вырожденных потенциалов $\Pi = \Pi(I_m)$, $\Pi = \Pi(J_m)$ получается как частный случай теоремы 5.

Теорема 7. Если потенциал $\Pi = \Pi(I_m)$ (или $\Pi = \Pi(J_m)$) является монотонно неубывающей выпуклой вниз функцией инварианта I_m (или J_m), то он удовлетворяет условию Адамара в каждой точке $v \in V$.

Очевидно, что теорему 7 нетрудно сформулировать и применительно к SE-условию. Достаточно лишь потребовать строгого возрастания $\Pi = \Pi(I_m)$ (или $\Pi = \Pi(J_m)$).

Для вырожденных потенциалов можно получить не только достаточные, но и необходимые признаки справедливости условия Адамара при любых деформациях.

Теорема 8. Пусть $\Pi = \Pi(I_m)$. Тогда потенциал П удовлетворяет условию

Адамара в каждой точке $v \in V$ в том и только том случае, когда соблюдаются неравенства

$$c_m \geq 0, \quad c_m + 2(I_m - 3)\, c_{mm} \geq 0 \tag{3.1}$$

Доказательство. Для определенности будем считать $m = 2$ (случай $m = 1$ рассматривается аналогично). Покажем сначала, что условия (3.1) необходимы. При доказательстве теоремы 3 было установлено, что система элементарных неравенств (1.1)—(1.3) сводится в данном случае к требованиям (1.11), поэтому достаточно установить необходимость лишь второго условия (3.1). Если $c_2 = 0$, то из неравенств (1.11) получаем $c_{22} \geq 0$, т. е. условия (3.1) соблюдаются. Значит, можно считать $c_2 > 0$. Запишем второе неравенство (1.11) с учетом ограничения $c_2 > 0$, формулы (1.5) и выражения для I_2 в виде

$$\frac{c_{22}}{c_2} \geq -\frac{1}{2(I_2 - v_k^{-2} - 2v_k)} \tag{3.2}$$

Пусть на кривой L в пространстве растяжений V инвариант I_2 сохраняет постоянное значение. Воспользуемся тем, что неравенство (3.2) выполняется в каждой точке этой кривой. Левая часть в (3.2), в отличие от правой, при движении вдоль L остается неизменной, поэтому необходимо

$$\frac{c_{22}}{c_2} \geq \max_L \left[-\frac{1}{2(I_2 - v_k^{-2} - 2v_k)} \right] \tag{3.3}$$

Но так как $v_k^{-2} + 2v_k \geq 3$ (равенство достигается при $v_k = 1$, т. е. в двух лежащих на L точках вида $v_i = \lambda$, $v_j = \lambda^{-1}$, $v_k = 1$, где λ находится из уравнения $\lambda^2 + \lambda^{-2} + 1 = I_2$), то из (3.3) имеем

$$c_{22}/c_2 \geq -1/2(I_2 - 3) \tag{3.4}$$

откуда и следует второе условие (3.1).

Докажем теперь достаточность условий (3.1). Считая $c_2 \neq 0$ (случай $c_2 = 0$ рассматривается тривиально) и записывая второе неравенство (3.1) в виде (3.4), получаем

$$1 + 2(v_i - v_j)^2 v_k^2 \frac{c_{22}}{c_2} \geq 1 - \frac{v_k^2 (v_i - v_j)^2}{I_2 - 3} = \frac{v_k^{-2} + 2v_k - 3}{I_2 - 3} \geq 0$$

т. е. условия (1.11) соблюдаются. Теорема доказана.

Следствие. Введем в рассмотрение функцию

$$f(I_m) = c_m \sqrt{I_m - 3} = \frac{d\Pi}{dI_m} \sqrt{I_m - 3} \quad (I_m \geq 3) \tag{3.5}$$

Тогда потенциал $\Pi = \Pi(I_m)$ удовлетворяет условию Адамара в каждой точке $v \in V$ в том и только в том случае, когда функция $f(I_m)$ неотрицательна и монотонно не убывает на луче $[3, +\infty)$:

$$f(I_m) \geq 0, \quad f'(I_m) \geq 0 \tag{3.6}$$

Штрихом здесь обозначена производная по I_m. Действительно, равносильность неравенств (3.6), (3.1) легко устанавливается с помощью соотношения (3.5).

Заметим также, что из формулы (3.5) вытекает общее представление для потенциалов типа $\Pi = \Pi(I_m)$, удовлетворяющих условию Адамара при любых деформациях:

$$\Pi(I_m) = \int_3^{I_m} \frac{f(I_m)}{\sqrt{I_m - 3}}\, dI_m + \Pi_0, \quad \Pi_0 = \text{const} \tag{3.7}$$

Функция $f(I_m)$ в (3.7) обладает указанными выше свойствами, то есть справедливы неравенства (3.6).

Рассмотрим теперь случай потенциалов вида $\Pi = \Pi(J_m)$.

Теорема 9. Потенциал $\Pi = \Pi(J_m)$ удовлетворяет условию Адамара в каждой точке $v \in V$ тогда и только тогда, когда соблюдаются неравенства

$$e_m \geq 0, \quad 4e_m + [3/64 J_m^4 t_m^2 + J_m (3/2 t_m - 1/4)]\, e_{mm} \geq 0 \tag{3.8}$$

где величина t_m определена соотношениями

$$t_m = \cos\varphi_m - 1/2, \quad \varphi_m = 2\pi/3 + 1/3 \arccos(32/J_m^3 - 1)$$

Доказательство опускается. Отметим только, что ход рассуждений такой же, как и при доказательстве теоремы 8, но способ его реализации здесь сложнее. Как и выше, можно выписать общее представление для потенциала $\Pi = \Pi(J_m)$, удовлетворяющего условию Адамара при любых деформациях

$$\Pi(J_m) = \int_3^{J_m} \frac{f(J_m)}{F(J_m)}\, dJ_m + \Pi_0, \quad \Pi_0 = \text{const} \tag{3.9}$$

$$F(J_m) \equiv \exp\left\{ 4 \int_3^{J_m} \left[\frac{3}{64} J_m^4 t_m^2 + J_m \left(\frac{3}{2} t_m - \frac{1}{4} \right) \right]^{-1} dJ_m \right\}$$

Функция $f(J_m)$ в (3.9) неотрицательна и монотонно не убывает на луче $[3, +\infty)$. Хотя общее представление (3.9) вряд ли может быть полезным для практического применения из-за слишком сложной структуры функции $F(J_m)$, оно позволяет получить оценки для потенциала $\Pi(J_m)$ при малых и больших деформациях (см. (3.16), (3.17)). Напротив, неравенства (3.8) вполне пригодны для численной проверки условия Адамара с помощью ЭВМ.

В качестве примера использования теорем 8, 9 рассмотрим частный случай материала Бидермана (2.8), соответствующий значению $d_0 = 0$:

$$\Pi = d_1(I_1 - 3) + d_2(I_1 - 3)^2 + d_3(I_1 - 3)^3 \tag{3.10}$$

Неравенства (3.1) принимают при этом вид

$$d_1 + 2d_2(I_1 - 3) + 3d_3(I_1 - 3)^2 \geq 0 \tag{3.11}$$

$$d_1 + 6d_2(I_1 - 3) + 15d_3(I_1 - 3)^2 \geq 0$$

Из соотношений (3.11) нетрудно вывести следующие ограничения на упругие постоянные d_1, d_2, d_3, необходимые и достаточные для справедливости условия Адамара в каждой точке $v \in V$:

$$d_1 \geq 0, \quad d_3 \geq 0, \quad 3d_2 + \sqrt{15 d_1 d_3} \geq 0 \tag{3.12}$$

Можно проверить, что неравенства (3.12) гарантируют также неотрицательность потенциала (3.10) (а при $d_1 + d_3 > 0$ — и его положительность для $I_1 \neq 3$).

Вернемся теперь к общему представлению (3.7). Отметим, что вследствие монотонного неубывания функция $f(I_m)$ ограничена вблизи точки $I_m = 3$, поэтому подинтегральное выражение имеет в этой точке интегрируемую особенность. Оказывается, из формулы (3.7) вытекает следующая оценка для П:

$$\Pi(I_m) \leq 2f(I_m)\sqrt{I_m - 3} + \Pi_0 \quad (I_m \geq 3) \tag{3.13}$$

Для доказательства достаточно проинтегрировать выражение (3.7) по частям и воспользоваться вторым неравенством (3.6), а также ограниченностью $f(I_m)$ в точке $I_m = 3$. Если исключить из рассмотрения тривиальный случай $f(I_m) \equiv 0$ $(I_m \geq 3)$, то из неравенства (3.13) видим, что обязательно найдется значение I_m° инварианта I_m такое, что $I_m^\circ > 3$ и при $I_m \in [3, I_m^\circ]$ справедлива оценка

$$\Pi(I_m) \leq d\sqrt{I_m - 3} + \Pi_0, \quad d = 2f(I_m^\circ) > 0 \tag{3.14}$$

Тем самым получено ограничение сверху на рост потенциала $\Pi(I_m)$ при малых деформациях из неискаженного состояния. При больших деформациях $(I_m > I_m^\circ)$ из формулы (3.7) следует оценка снизу

$$\Pi(I_m) \geq d\sqrt{I_m - 3} + \Pi_* \tag{3.15}$$

Здесь Π_* — некоторая постоянная, d — то же, что и в неравенстве (3.14). Если $\Pi = \Pi(J_m)$, то, исходя из общего представления (3.9), получаем вместо (3.14), (3.15) соответственно следующие оценки (где $d_0 > 0$, $d_* > 0$, Π_0, Π_* — постоянные величины):

$$\Pi(J_m) \leq d_0\sqrt{J_m - 3} + \Pi_0 \quad (J_m \leq J_m^\circ) \tag{3.16}$$

$$\Pi(J_m) \geq d_* J_m + \Pi_* \quad (J_m > J_m^\circ) \tag{3.17}$$

Так как для несжимаемого материала главные растяжения v_1, v_2, v_3, связаны соотношением (1.5), то для всякой перестановки i, j, k чисел 1, 2, 3 потенциал П можно рассматривать как функцию параметров v_i, v_j. При этом каждая из оценок (3.15), (3.17), несмотря на кажущееся различие, означает, что при фиксированном v_j и v_i, стремящемся к нулю, потенциал П растет не медленнее, чем v_i^{-1}, а при фиксированном v_j и v_i, стремящемся к бесконечности, — не медленнее, чем v_i. Заметим, что этот факт справедлив не только для вырожденных потенциалов $\Pi = \Pi(I_m)$, $\Pi = \Pi(J_m)$, но и в самом общем случае. Что касается оценок (3.14), (3.16), то любая из них в достаточно малой окрестности W точки $v_1 = v_2 = v_3 = 1$ равносильна неравенству

$$\Pi \leq K\sqrt{(v_1 - 1)^2 + (v_2 - 1)^2 + (v_3 - 1)^2} + M, \quad v \in W \tag{3.18}$$

где $K > 0$, M — некоторые постоянные. Неравенство (3.18), по-видимому, также справедливо и для потенциалов общего вида, хотя строгим доказательством авторы не располагают.

Оценки (3.14)—(3.18) в ряде случаев позволяют сделать определенные выводы относительно области, в которой соблюдается условие Адамара, без предварительной проверки неравенств (1.1)—(1.3). Рассмотрим, например, потенциал [10]:

$$\Pi = \frac{A}{\beta + 1}\Gamma^\beta \; (A > 0, \beta > 0), \quad \Gamma \equiv \sqrt{\ln^2 v_1 + \ln^2 v_2 + \ln^2 v_3}$$

Поскольку при фиксированном v_j и v_i, стремящемся к бесконечности, он растет как $(\ln v_i)^\beta$, т. е. медленнее, чем v_i, то сразу же ясно, что при больших деформациях условие Адамара нарушено. Можно привести и другие примеры.

В заключение отметим, что теоремы 8, 9 и общие представления (3.7), (3.9) легко обобщаются на случай SE-условия. Достаточно лишь заменить в неравенствах (3.1), (3.8) знаки ≥ на > и считать функции $f(I_m)$, $f(J_m)$ положительными и строго возрастающими. Оценки (3.13)—(3.18) остаются при этом неизменными. Кроме того, подчеркнем, что развитые выше методы исследования системы элементарных неравенств (1.1)—(1.3) эффективны также при анализе других дополнительных неравенств нелинейной теории упругости (например, неравенства Хилла [11]).

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант МТА).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
3. *Эриксен Дж.* Исследования по механике сплошных сред. М.: Мир, 1977. 246 с.
4. *Гурвич Е. Л., Лурье А. И.* К теории распространения волн в нелинейно-упругой среде (эффективная проверка условия Адамара)//Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 110—116.
5. *Гурвич Е. Л.* Условие Адамара в нелинейной теории упругости//Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 1. С. 45—51.
6. *Zee L., Sternberg E.* Ordinary and strong ellipticity in the equilibrium theory of incompressible hyperelastic solids//Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1983. V. 83. No. 1. P. 53—90.
7. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
8. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
9. *Hart — Smith L. J.* Elasticity parameters for finite deformations of rubber — like materials//ZAMP: 1966. Bd. 17. № 5. S. 608—626.
10. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 648 с.
11. *Hill R.* On constitutive inequalities for simple materials//J. Mech. and Phys. Solids. 1968. V. 16. No. 4. P. 229—242.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
10.VIII.1992