

УДК 539.4

© 1994 г. Д. Л. БЫКОВ, А. М. ВАСИЛЬЕВ, В. С. ДЕЛЬЦОВ, Д. Н. КОНОВАЛОВ

## О МОДЕЛИРОВАНИИ ТРЕХМЕРНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ ОБРАЗЦОВ<sup>1</sup>

Предлагается метод моделирования с помощью испытаний образцов специальной формы сложного напряженного состояния, которое может возникать в конструкциях. Предложена классификация видов трехмерного напряженного состояния. Методом конечных элементов проведены расчеты и дан анализ полей напряжений и их градиентов, возникающих в исследуемом материале. Результаты расчетов представлены на фигурах и в таблицах, позволяющих целенаправленно выбирать размеры и способ нагружения образцов для моделирования заданных напряженных состояний.

При проектировании конструкций из новых материалов, свойства которых изучены в ограниченных пределах, могут встречаться случаи, когда напряженное состояние, реализуемое в наиболее напряженных элементах конструкции, не охватывается экспериментально проверенными критериями прочности. В связи с этим необходима информация об условиях разрушения материалов при тех полях напряжений, которые возникают в опасных местах конструкции.

Воспроизведение полей напряжений с учетом их концентрации и градиентов в общем случае требует создания специальных образцов и применения соответствующих программ нагружения. Выбор формы образцов и способов их нагружения усилиями и температурными полями ограничены технологическими возможностями. Поэтому представляет интерес исследование целенаправленного создания образцов с заданными свойствами. Если такая возможность осуществится, можно будет проводить только одно испытание специального образца и получать для заданной комбинации напряжений ее разрушающее значение.

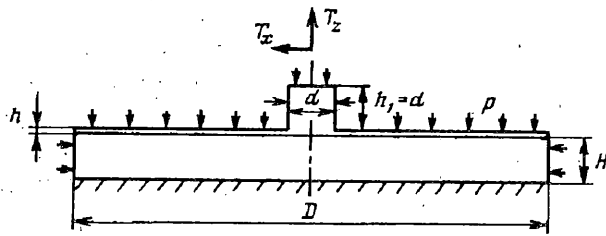
Рассмотрим поставленную задачу применительно к малосжимаемым упругим материалам с относительно малой жесткостью и покажем, что для них можно использовать описываемый ниже образец, в котором реализуются разнообразные трехмерные напряженные состояния.

Заметим, что для создания различных трехмерных напряженных состояний необходимо предварительно провести их классификацию. В данной работе вид напряженного состояния предлагается определять двумя отношениями главных напряжений к наибольшему из них по абсолютной величине. Такой подход не является единственно возможным, но вполне приемлем для решения поставленной задачи, так как позволяет учитывать и амплитуды напряжений, и их знаки.

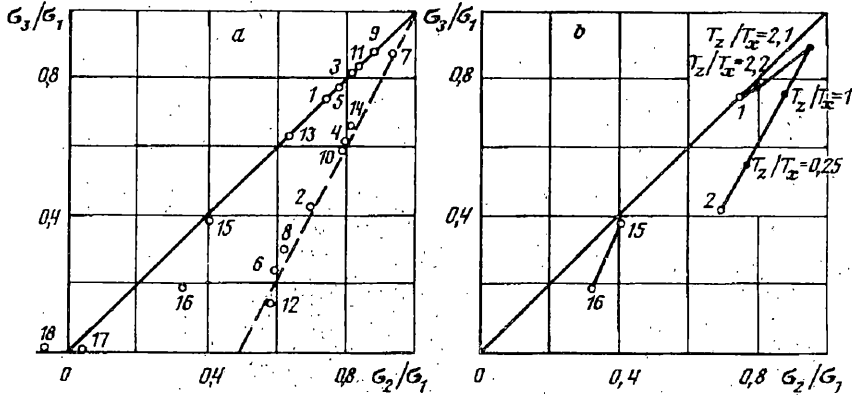
Образец состоит из закрепленного на жестком основании цилиндрического слоя исследуемого материала и скрепленной с ним круглой пластины из более жесткого и прочного материала, которая в центральной части усилена цилиндрическим выступом (фиг. 1). Рассматривается нагружение образца осевой ( $T_z$ ) и боковой ( $T_x$ ) силами, прикладываемыми к цилиндрическому выступу, и равномерным наружным давлением  $p$ .

Оба материала будем считать линейно упругими. Упрощенное допущение о связи напряжений с деформациями законом Гука не принципиально для данного

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16531).



Фиг. 1



Фиг. 2

подхода и лишь облегчает проведение числовых расчетов при сложном напряженном состоянии образца. Аналогично приводимому примеру можно рассматривать и более сложные уравнения состояния.

Задача об упругом деформировании образца при таких нагружениях решалась в перемещениях методом конечных элементов. Использовались осесимметричные четырехугольные изопараметрические элементы второго порядка. В случае нагружения образца боковой силой зависимости перемещений, деформаций и напряжений от окружной координаты представлялись в виде одной гармоника.

Используемые сетки конечных элементов сгущались в зоне концентрации напряжений, расположенной под цилиндрическим выступом. Конечные элементы в цилиндрической области диаметром  $2d$  имели одинаковый размер в радиальном направлении, равный  $d/16$ . Осевые размеры элементов уменьшались от значения  $0,175H$  в средней части слоя исследуемого материала до значения  $0,075H$  на контакте с пластиной. Тонкая пластина из более жесткого материала разбивалась по толщине на 2 слоя элементов. Точность определения максимальных значений напряжений в слое исследуемого материала оценивалась с использованием экстраполяции Ричардсона [1] на примере анализа типичного варианта образца. В этом анализе наряду с описанным выше разбиением использовались два более мелких разбиения, полученные из исходного путем уменьшения линейных размеров всех элементов в 1,5 и 2,5 раза. Оцененные таким образом величины погрешностей определения максимальных значений растягивающего напряжения и интенсивности напряжений не превышали 1%.

Цель расчетов состояла в том, чтобы выяснить, насколько широк спектр напряженных состояний, которые могут быть получены в образце при варьировании вида нагружения (величин  $T_z$ ,  $T_x$ ,  $p$ ) и геометрических параметров образца  $d/D$ ,  $H/D$ ,  $h/D$ . В табл. 1 приведен перечень рассмотренных образцов  $N$  и видов их нагружения  $\alpha$ .

В этой таблице  $E$ ,  $E_0$  — модули Юнга исследуемого материала и материала пластины;  $\nu$  — коэффициент Пуассона исследуемого материала (коэффициент

$N$	$d/D$	$H/D$	$h/D$	$E/E_0$	$\nu$	$\alpha$
1	0,1	0,1	0,01	$5 \cdot 10^{-5}$	0,4998	1
2	...	...	...	...	...	2
3	0,2	...	...	...	...	1
4	...	...	...	...	...	2
5	0,05	...	...	...	...	1
6	...	...	...	...	...	2
7	0,1	0,2	...	...	...	1
8	...	...	...	...	...	2
9	...	0,05	...	...	...	1
10	...	...	...	...	...	2
11	...	0,1	0,02	...	...	1
12	...	...	...	...	...	2
13	...	...	0,005	...	...	1
14	...	...	...	...	...	2
15	0,1	0,1	0,01	$5 \cdot 10^{-5}$	0,3	1
16	...	...	...	...	...	2
17	...	...	...	...	0,05	1
18	...	...	...	...	...	2

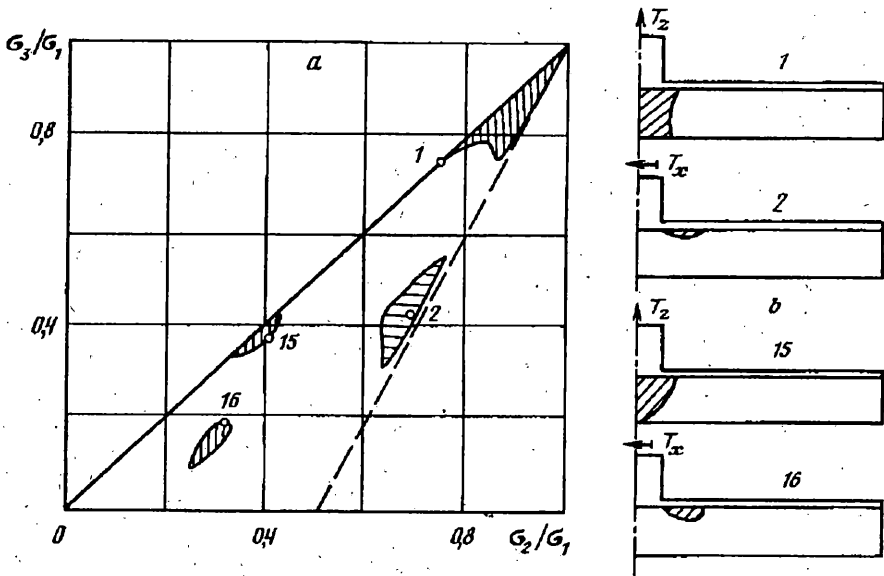
Пуассона материала пластины брался равным 0,3). Вид нагружения  $\alpha = 1$  соответствует нагружению образца осевой силой  $T_z$ ,  $\alpha = 2$  — боковой силой  $T_x$ .

Напряженное состояние образца анализировалось с точки зрения соотношения главных напряжений в наиболее нагруженной зоне и с точки зрения их пространственного распределения (концентрация и градиенты напряжений).

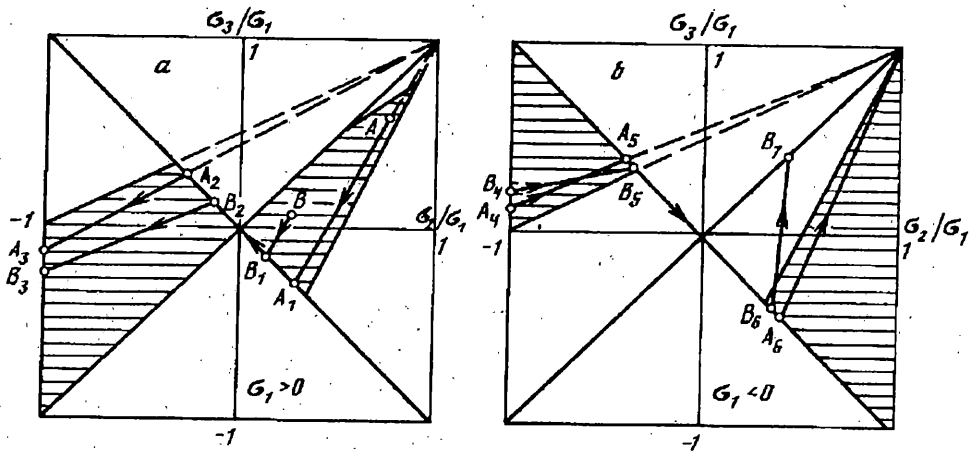
Вид напряженного состояния в исследуемом материале характеризуется точкой в одной из двух плоских систем координат, по осям которых откладываются величины отношений  $\sigma_2/\sigma_1$  и  $\sigma_3/\sigma_1$ , где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения, упорядоченные в порядке убывания их абсолютных величин ( $|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq |\sigma_3|$ ). Введение двух систем координат позволяет различать напряженные состояния с одинаковыми отношениями  $\sigma_2/\sigma_1$  и  $\sigma_3/\sigma_1$ , но с разными по знаку напряжениями  $\sigma_1$ .

На фиг. 2, а для каждого образца из табл. 1 указан вид напряженного состояния в точке исследуемого материала, где достигается максимальное положительное значение главного напряжения  $\sigma_1$ . Отметим, что в образцах 1, 5, 13, 17, 18 в точке максимума  $\sigma_1$  достигается и максимальное значение интенсивности напряжений, а в образцах 8, 15, 16 максимум интенсивности напряжений достигается вблизи этой точки и отличие величины интенсивности напряжений в точке максимума  $\sigma_1$  от ее максимального значения не превышает 5%.

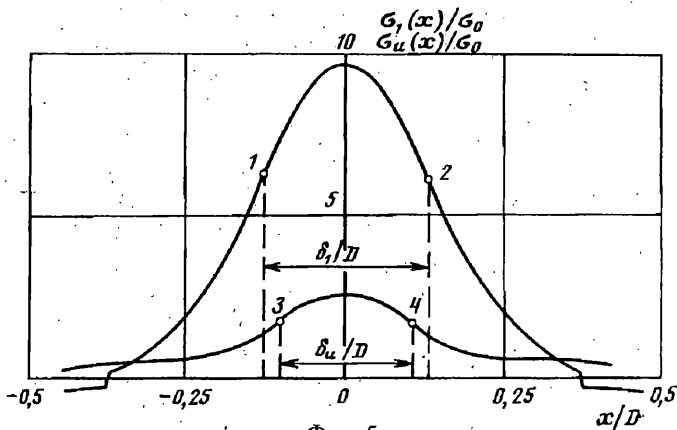
При нагружении образца из мягкого слабосжимаемого материала осевой силой  $T_z$  точки максимума  $\sigma_1$  располагаются на оси образца в средней части слоя материала. В остальных рассмотренных вариантах точка максимума  $\sigma_1$  располагается на поверхности контакта с пластиной. Как видно на фиг. 2, а, точки, характеризующие вид напряженного состояния, достигаемого в эксперименте при максимуме  $\sigma_1$ , располагаются либо вблизи прямой  $\sigma_2/\sigma_1 = \sigma_3/\sigma_1$ , т. е. гипотенузы треугольника возможных видов напряженного состояния, либо вблизи медианы этого треугольника, выходящей из точки всестороннего равномерного растяжения  $\sigma_2/\sigma_1 = \sigma_3/\sigma_1 = 1$ . При этом, если точка максимума  $\sigma_1$  располагается в средней части слоя исследуемого материала, то соответствующая точка лежит практически на гипотенузе. Если же точка максимума  $\sigma_1$  располагается на поверхности



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

контакта с пластиной, то в плоскости  $(\sigma_2/\sigma_1, \sigma_3/\sigma_1)$  ей соответствует точка вблизи медианы.

На фиг. 2, *b* для двух вариантов образца показаны траектории, характеризующие изменение вида напряженного состояния в точке максимума  $\sigma_1$  при изменении отношения  $T_z/T_x$  от 0 до  $\infty$ . Излом траектории, соединяющей точки 1 и 2, связан с перемещением точки максимума  $\sigma_1$  из середины слоя на поверхность контакта с пластиной.

При анализе результатов испытаний образцов, в которых реализуются неоднородные поля напряжений, представляют интерес напряженные состояния не только в точках предполагаемого разрушения, но и в тех точках, где разрушение не происходит, поскольку информация о напряжениях в этих точках может служить источником получения весьма важных с практической точки зрения нижних оценок предельных напряженных состояний различного вида.

На фиг. 3, *a* для двух вариантов материала образца и двух вариантов его нагружения показаны области видов напряженного состояния точек, в которых величины  $\sigma_1$  отличаются от максимального по всему слою материала значения не более, чем на 10%. Эти области расширяют поле видов напряженных состояний, которые могут моделироваться с помощью рассматриваемого образца. На фиг. 3, *b* показаны области сечений образцов, содержащие эти точки.

Рассмотрим вопрос о том, как влияет на вид напряженного состояния образца его дополнительное нагружение наружным давлением  $p$ . Если в образце используется мягкий слабосжимаемый материал, то давление передается практически полностью во все внутренние точки, и напряженное состояние образца получает гидростатическую добавку величиной  $-p$ . Можно показать, что в этом случае траектория изменения вида напряженного состояния будет представлять собой прямую линию, исходящую из точки  $\sigma_2/\sigma_1 = \sigma_3/\sigma_1 = 1$ , причем с увеличением давления движение вдоль траектории в плоскости  $\sigma_1 > 0$  будет происходить в направлении от точки всестороннего растяжения, а движение в плоскости  $\sigma_1 < 0$  — в направлении к точке всестороннего сжатия. На фиг. 4, *a, b* показана траектория изменения вида напряженного состояния в точке слабосжимаемого материала при возрастании давления  $p$  от 0 до  $\infty$  (ломаная  $AA_1-A_2A_3-A_4A_5-A_6$  — точка всестороннего сжатия). Скачки  $A_1-A_2$  и  $A_5-A_6$  на этой траектории связаны с перенумерацией напряжений  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , а переход  $A_3-A_4$  — с перенумерацией напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  и одновременной сменой знака напряжения  $\sigma_1$ .

Если материал, используемый в образце, не является слабосжимаемым, то при действии только наружного давления в зоне образца под цилиндрическим выступом реализуется практически однородное напряженное состояние, не являющееся, однако, близким к состоянию всестороннего сжатия. В образце с  $d/D = 0,1$ ,  $H/D = 0,1$ ,  $h/D = 0,01$  и  $E/E_0 = 5 \cdot 10^{-5}$  при значениях коэффициента Пуассона исследуемого материала, равных 0,4998, 0,3 и 0,05, величины отношения  $\sigma_2/p$  составляют  $-1,000$ ,  $-1,001$  и  $-0,975$ , а отношения  $\sigma_1/p$ :  $-0,999$ ,  $-0,426$  и  $-0,052$ , соответственно. Как видно, давление в осевом направлении передается практически без потерь. При передаче же давления в радиальном направлении потери существенно зависят от степени сжимаемости материала образца.

На фиг. 4, *a, b* показана траектория  $V_1V_2 \dots -V_7$  изменения вида напряженного состояния в точке, где при  $p = 0$  достигается максимальное по объему исследуемого материала значение интенсивности напряжений, в образце 16 из табл. 1 при его дополнительном нагружении наружным давлением. Следует отметить, что изменение вида напряженного состояния при увеличении давления, как и в случае малосжимаемого материала, описывается траекторией, состоящей из отрезков прямых (с другим наклоном), и сопровождается поворотом главных осей напряжений.

На этих же фигурах показаны области видов напряженного состояния, которые могут быть реализованы в наиболее нагруженной зоне образца (вариант 1, 2)

Таблица 2

$N$	$k_1$	$\xi_1$	$\eta_1$	$k_u$	$\xi_u$	$\eta_u$
1	9,64 *	2,57	4,54	2,54 *	2,08	1,58
2	7,38	1,19	8,11	4,57	2,08	2,72
3	6,74 *	1,65	6,04	1,68	1,03	2,68
4	10,1	1,37	18,0	6,11	1,45	7,08
5	11,5 *	3,36	2,55	3,58 *	3,36	1,11
6	4,68	2,93	4,90	3,43	3,36	0,78
7	6,38	2,57	2,08	2,88 *	2,57	1,15
8	4,99	1,67	6,53	3,09	3,21	0,86
9	15,9 *	2,08	9,90	3,27	1,87	4,50
10	14,5	2,12	22,1	8,23	1,67	8,24
11	5,45 *	3,21	1,86	1,23	3,94	1,09
12	3,31	3,82	2,17	2,84	2,57	0,73
13	17,5 *	2,08	11,5	6,44 *	1,67	5,24
14	22,4	0,62	36,0	10,5 *	1,06	15,2
15	6,24	2,08	2,72	4,00 *	2,57	1,70
16	4,11	1,67	7,65	3,12 *	1,19	6,22
17	5,95	2,57	2,51	5,81	2,32	2,44
18	3,76	1,67	7,85	3,88	1,67	8,66

при различных комбинациях нагрузок. Как видно, эти области занимают почти половину площади всех возможных видов напряженного состояния.

Рассмотрим теперь вопрос о пространственном распределении напряжений в образце. Будем характеризовать распределение максимального главного напряжения и интенсивности напряжений в окрестности точки максимума следующими тремя параметрами: коэффициентом концентрации  $k = \sigma_{\max}/\sigma_0$  ( $\sigma_{\max}$  — максимальное значение напряжения или интенсивности напряжений,  $\sigma_0$  — некоторое опорное значение напряжения); безразмерным параметром  $\xi = \delta/d$ , характеризующим линейный размер зоны концентрации напряжений в направлении оси  $x$  ( $\delta$  — расстояние по оси  $x$  между точками локальных максимумов градиента напряжений  $|d\sigma/dx|$  расположенных по обе стороны от точки максимума напряжений); безразмерным параметром  $\eta = |d\sigma/dx|_{\max} d/\sigma_0$  ( $|d\sigma/dx|_{\max}$  — наибольший из локальных максимумов градиента напряжений в окрестности точки максимума напряжений).

На фиг. 5 показаны соответствующие варианту 1 образца распределения приведенного главного напряжения  $\sigma_1(x)/\sigma_0$  и приведенной интенсивности напряжений  $\sigma_u(x)/\sigma_0$ , а также показано, каким образом определяется параметр  $\delta$  для каждой из этих функций напряжений. Точки 1, 2 и 3, 4 на этой фигуре — соседние локальные экстремумы градиентов наибольшего главного растягивающего напряжения и интенсивности напряжений в зоне концентрации.

В табл. 2 приведены значения параметров пространственного распределения максимального главного напряжения  $\sigma_1$  ( $k_1$ ,  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ) и интенсивности напряжений ( $k_u$ ,  $\xi_u$ ,  $\eta_u$ ). При вычислении коэффициентов концентрации напряжений в качестве опорного напряжения  $\sigma_0$  бралось среднее по сечению образца значение растягивающего (если образец нагружался осевой силой  $T_1$ ) или сдвигового (если образец нагружался боковой силой  $T_2$ ) напряжения. Звездочкой помечены коэффициенты концентрации величин, максимальные значения которых достигаются внутри слоя исследуемого материала. В остальных случаях максимальные значения достигаются на поверхности скрепления с пластиной. Представленные результаты свидетельствуют о возможности управления градиентами напряжений в зоне их

концентрации путем изменения геометрических параметров образца ( $d/D$ ,  $H/D$  и  $h/D$ ).

Заметим, что в [2] для воспроизведения высоких градиентов напряжений в исследуемом материале применялся специальный образец несколько другой формы. Проводившаяся экспериментальная проверка предлагаемого способа моделирования подтвердила его эффективность для наполненных полимерных материалов.

Отметим, что при испытаниях до разрушения любых элементов конструкций или образцов сложной формы результаты теоретического анализа напряженно-деформированного состояния позволят дополнить информацию о зависимости прочности материалов в конструкции от вида напряженного состояния и его пространственного распределения. Из этого следует практический вывод о целесообразности составления каталога разрушений. В его основу должны быть положены принципы классификации видов сложного напряженного состояния, пригодные для описания исследуемых типов материалов. Пример такой классификации для упругих материалов изложен в публикуемой работе. Описанный образец позволяет воспроизвести широкий спектр сложных трехмерных напряженных состояний, что свидетельствует о его относительной универсальности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 535 с.
2. Быков Д. Л., Васильев А. М., Коновалов Д. Н. К оценке прочности композитных конструкций в зонах локальной концентрации напряжений // Механика композит. материалов. 1984. № 2. С. 308—312.

Москва

Поступила в редакцию  
26.1.1994