

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. Л. Л. БОЙКО

ВЛИЯНИЕ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ

Исследуется вопрос о влиянии разномодульности материала на критическую нагрузку устойчивости сжатой шарнирной пластины. Проведенное сравнение для изотропных материалов показало, что это влияние может быть значительным.

На основании исследований, приведенных в [1, 2], предложены определяющие соотношения для описания напряженного состояния изотропного разномодульного тела¹. Потенциал напряжений для разномодульного тела представлен в виде

$$U(e, e_0) = \frac{1}{2} (M + N\eta^2) [1 + \psi(\eta)] e_0^2 \quad (1)$$

где $\eta = e/e_0$ — безразмерный параметр деформированного состояния, $e = 1/3e_{ii}$ — объемная деформация, $e_0 = (2/3\bar{\epsilon}_i\bar{\epsilon}_{ij})^{1/2}$ — интенсивность деформаций, $\bar{\epsilon}_{ij} = e_{ij} - e\delta_{ij}$ — компоненты девиатора деформаций, M и N — константы. При $\psi(\eta) = 0$ потенциал (1) совпадает с потенциалом для классического упругого тела.

На основе [2] получены следующие зависимости напряжений от деформаций:

$$\sigma_{ij} = 2/3\vartheta(\eta)\bar{\epsilon}_{ij} + \theta(\eta)e\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

$$\vartheta(\eta) = -1/2(M + N\eta^2)\eta\psi' + M(1 + \psi) \quad (3)$$

$$\theta(\eta) = 1/3[1/2(M + N\eta^2)\psi'/\eta + (1 + \psi)N] \quad (4)$$

$$\sigma = \theta(\eta)e, \quad \sigma_0 = \vartheta(\eta)e_0 \quad (4)$$

Здесь ϑ, θ — функции деформированного состояния, $\sigma = 1/3\sigma_{ii}$ — среднее напряжение, $\sigma_0 = (3/2S_iS_{ij})^{1/2}$ — интенсивность напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ — компоненты девиатора напряжений. Между функциями $\vartheta(\eta)$ и $\theta(\eta)$ существует следующая дифференциальная связь:

$$\vartheta' + 3\eta^2\theta' = 0 \quad (5)$$

Применим указанный вариант разномодульной теории упругости к задаче устойчивости шарнирно закрепленной по контуру квадратной пластины со стороной a , сжатой в направлении оси x , направленной по одной из ее сторон, равномерно распределенной нагрузкой. Так как пластина находится в плоском напряженном состоянии, преобразуем соотношения (2) к соответствующему виду. Используя условие $\sigma_{33} = 0$, из (2) получим $e_{33} = (2\vartheta - 3\theta)e^v/(4\vartheta + 3\theta)$, $e^v = e_{11} + e_{22}$. Тогда

$$e = 2\vartheta e^v/(4\vartheta + 3\theta) \quad (6)$$

¹ См. Бойко Л. Л. К разномодульной теории упругости // Вопросы механики деформируемых сред. Ч. 2. М., 1982. С. 2—10. Рукопись деп. в ВИНТИ 4 марта 82 г. № 919—В 82.

и соотношения (2) примут вид

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{3} \vartheta e_{ij} + \frac{2\vartheta(3\vartheta - 2\vartheta)}{3(4\vartheta + 3\vartheta)} e^v \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \quad (7)$$

$$e_0 = \left[\frac{2}{3} \left(e_{ij} e_{ij} + \frac{9\vartheta^2 - 12\vartheta - 8\vartheta^2}{(4\vartheta + 3\vartheta)^2} e^{v2} \right) \right]^{1/2} \quad (8)$$

Как известно [3], для задачи устойчивости необходимы соотношения между приращениями напряжений и деформаций. Уравнение равновесия пластины при условии однородности ее докритического состояния в результате варьирования принимает вид

$$\delta M_{ij, ij} + N_{ij} \delta w_{, ij} = 0 \quad (9)$$

$$\delta M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_{ij} z dz, \quad N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz \quad (10)$$

где w — прогиб срединной плоскости, h — толщина пластины.

Произведя варьирование уравнений (7), получим

$$\delta \sigma_{ij} = 2/3 \vartheta \delta e_{ij} + \mu_{ij} \delta e^v - v_{ij} e_{mn} \delta e_{mn} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mu_{ij} = & \frac{2}{3} \vartheta \frac{4(4\vartheta + 3\vartheta)^2 e_{mn} e_{mn} [(4\vartheta + 3\vartheta) \vartheta' e_{ij} + \vartheta(3\vartheta' - 2\vartheta') e^v \delta_{ij}] + }{[3(4\vartheta + 3\vartheta)^3 e_0^3 + 12(\vartheta\vartheta' - \vartheta\vartheta')(4\vartheta + 3\vartheta) e^v e_{mn} e_{mn} + } \\ & + 3(3\vartheta - 2\vartheta) [(4\vartheta + 3\vartheta)^3 e_0^3 + 4(\vartheta\vartheta' - \vartheta\vartheta')(3\vartheta - 2\vartheta) e^{v3}] \delta_{ij} \\ & + 12(\vartheta\vartheta' - \vartheta\vartheta')(3\vartheta - 2\vartheta) e^{v3}] (4\vartheta + 3\vartheta) \end{aligned} \quad (12)$$

$$v_{ij} = \frac{2}{3} \vartheta \frac{4 [\vartheta(4\vartheta + 3\vartheta)^2 e^v e_{ij} + (18\vartheta^2\vartheta' - 8\vartheta^2\vartheta' + 9\vartheta^2\vartheta' - 12\vartheta\vartheta') e^{v2} \delta_{ij}]}{3(4\vartheta + 3\vartheta)^3 e_0^3 + 12(\vartheta\vartheta' - \vartheta\vartheta')(4\vartheta + 3\vartheta) e^v e_{mn} e_{mn} + 12(\vartheta\vartheta' - \vartheta\vartheta')(3\vartheta - 2\vartheta) e^{v3}}$$

После подстановки зависимостей (10) — (12) в уравнение (9) с использованием гипотезы Кирхгофа — Лява и учетом того, что в рассматриваемой задаче $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$, $e_{xy} = 0$, придем к следующему уравнению устойчивости:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\vartheta h^3}{18} + \mu_{xx} \frac{h^3}{12} - v_{xx} e_{xx} \frac{h^3}{12} \right) \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^4} + \\ & + \left(2 \frac{\vartheta h^3}{18} + \mu_{xx} \frac{h^3}{12} - v_{xx} e_{yy} \frac{h^3}{12} + \mu_{yy} \frac{h^3}{12} - v_{yy} e_{xx} \frac{h^3}{12} \right) \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ & + \left(\frac{\vartheta h^3}{18} + \mu_{yy} \frac{h^3}{12} - v_{yy} e_{yy} \frac{h^3}{12} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^4} + N_{xx} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Задавая функцию δw в виде $\delta w = A \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a)$, удовлетворяющем граничным условиям $\delta w = 0$, $\delta M_{xx} = 0$ при $x = 0$, a ; $\delta w = 0$, $\delta M_{yy} = 0$ при $y = 0$, a и внося это выражение в уравнение (13), получим

$$1/12 (\pi^2 h^3 / a^2) [8/3 \vartheta + 2(\mu_{xx} + \mu_{yy}) - (v_{xx} + v_{yy})(e_{xx} + e_{yy})] - N_{xx} = 0$$

откуда следует

$$N_{xx} = 1/12 (\pi^2 h^3 / a^2) (8/3 \vartheta + 2\mu_{ij} \delta_{ij} - v_{ij} \delta_{ij} e^v) \quad (i, j = 1, 2) \quad (14)$$

Рассмотрим случай, когда функция $\vartheta(\eta)$ в уравнениях (12) и (14) аппроксимируется линейной зависимостью

$$\vartheta(\eta) = \alpha + \beta\eta \quad (15)$$

Тогда из дифференциального уравнения (5) найдем

$$\theta(\eta) = \frac{1}{3}\beta/\eta + \gamma \quad (16)$$

Постоянные α , β и константа интегрирования γ зависят от характеристик материала и могут быть определены с помощью двух экспериментов, например, — эксперимента на чистый сдвиг с определением модуля сдвига G и — на простое растяжение или сжатие с определением модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν .

При чистом сдвиге $e = 0$ и, следовательно, $\eta = 0$. Поэтому из (2) ввиду (15) будем иметь $\sigma_{23} = \frac{2}{3}\alpha e_{23}$. С другой стороны, $\sigma_{23} = 2Ge_{23}$. Из этих двух зависимостей следует, что

$$\alpha = 3G \quad (17)$$

Перепишем зависимости (2) с учетом выражений (15) и (16) в виде

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{3}\alpha\Theta_{ij} + \gamma e\delta_{ij} + \frac{1}{3}\beta(2e\Theta_{ij}/e_0 + e_0\delta_{ij}) \quad (18)$$

При простом растяжении-сжатии

$$e_{22} = e_{33} = -\nu e_{11}, \quad e = \frac{1}{3}e_{11}(1 - 2\nu), \quad \Theta_{11} = \frac{2}{3}e_{11}(1 + \nu)$$

$$\Theta_{22} = -\frac{1}{2}\Theta_{11}, \quad e_0 = |\Theta_{11}| = \frac{2}{3}|e_{11}|(1 + \nu), \quad 1 + \nu > 0 \quad (19)$$

Так как $\sigma_{22} = 0$, то из (18) ввиду (19) найдем

$$e = \frac{\alpha\Theta_{11} - \beta|\Theta_{11}|}{3\gamma - \beta\Theta_{11}/|\Theta_{11}|}$$

и, следовательно

$$\eta = \frac{e}{e_0} = \frac{e}{|\Theta_{11}|} = \frac{\alpha\Theta_{11}/|\Theta_{11}| - \beta}{3\gamma - \beta\Theta_{11}/|\Theta_{11}|}$$

С другой стороны, согласно (19):

$$\eta = \frac{1}{2}(1 - 2\nu)e_{11}/(|e_{11}|(1 + \nu)) \quad (20)$$

Поэтому

$$\frac{\alpha\Theta_{11}/|\Theta_{11}| - \beta}{3\gamma - \beta\Theta_{11}/|\Theta_{11}|} = \frac{(1 - 2\nu)e_{11}}{2|e_{11}|(1 + \nu)} \quad (21)$$

Из зависимостей (18) с учетом соотношений (19) получим следующее выражение для σ_{11} :

$$\sigma_{11} = \frac{4}{9}\alpha e_{11}(1 + \nu) + \frac{1}{3}\gamma e_{11}(1 - 2\nu) + \frac{2}{9}\beta [e_{11}^2(1 - 2\nu)/|e_{11}| + |e_{11}|(1 + \nu)]$$

Но так как $\sigma_{11} = Ee_{11}$, то следовательно

$$E = \frac{4}{9}\alpha(1 + \nu) + \frac{1}{3}\gamma(1 - 2\nu) + \frac{2}{9}\beta [e_{11}(1 - 2\nu)/|e_{11}| + |e_{11}|(1 + \nu)/e_{11}] \quad (22)$$

Уравнения (21) и (22) содержат два неизвестных коэффициента β и γ , которые находятся в результате совместного решения этих уравнений.

Рассматривая поочередно случаи простого растяжения ($e_{11} > 0$) и сжатия ($e_{11} < 0$), получим следующие выражения для коэффициентов β и γ , считая уже известным коэффициент α из зависимости (17):

$$\beta = \frac{3 [E_+ - 2G(1 + v_+)]}{1 - 2v_+} = \frac{3 [2G(1 + v_-) - E_-]}{1 - 2v_-} \quad (23)$$

$$\gamma = \frac{4G(1 + v_+)^2 - E_+(1 + 4v_+)}{(1 - 2v_+)^2} = \frac{4G(1 + v_-)^2 - E_-(1 + 4v_-)}{(1 - 2v_-)^2}$$

При этом из (20):

$$\eta_+ = \frac{1}{2}(1 - 2v_+)/(1 + v_+), \quad \eta_- = -\frac{1}{2}(1 - 2v_-)/(1 + v_-) \quad (24)$$

Здесь E_+ , v_+ , η_+ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и значение параметра η при растяжении, а E_- , v_- , η_- — при сжатии.

Заменив в соотношениях (15) и (16) коэффициенты α , β и γ соответственно их выражениями (17) и (23) через G , E_- , v_- , а η — выражением (24) для η_- , получим

$$\theta(\eta_-) = \frac{3}{2}E_-/(1 + v_-), \quad \theta(\eta_-) = E_-/(1 - 2v_-) \quad (25)$$

Аналогично, для производных $\theta'(\eta)$ и $\theta''(\eta)$ будем иметь

$$\theta'(\eta_-) = \beta = \frac{3 [2G(1 + v_-) - E_-]}{1 - 2v_-} \quad (26)$$

$$\theta''(\eta_-) = \frac{4(1 + v_-)^2 [E_- - 2G(1 + v_-)]}{(1 - 2v_-)^3}$$

Учитывая, что в соотношениях (12) индексы принимают значения только 1 и 2, имеем для рассматриваемого случая

$$e_{mn}e_{mn} = e_{11}^2 + e_{22}^2 = (1 + v_-^2)e_{11}^2 \quad (27)$$

$$e^v = (1 - v_-)e_{11}, \quad e_0 = -2/3e_{11}(1 + v_-)$$

Тогда в результате подстановки (25), (26) и (27) в (12) найдем

$$\mu_{ij}\delta_{ij} = \frac{E_- [E_-(14v_-^2 - v_- + 3) - 6G(1 + v_-)(2v_-^2 + v_- + 1)]}{(1 + v_-) [E_-(1 + 6v_- - 4v_-^2) - 6G(1 + v_-)]} \quad (28)$$

$$v_{ij}\delta_{ij} = \frac{3E_- (1 - 2v_-) [2G(1 + v_-) - E_-]}{(1 + v_-) e_{11} [6G(1 + v_-) - E_-(1 + 6v_- - 4v_-^2)]}$$

и, согласно (14), критическая нагрузка для разномодульного материала будет определяться зависимостью

$$\sigma_{xx} = \frac{N_{xx}}{h} = \frac{\pi^2 h^2 E_-}{a^2} \frac{E_- (7 + 31v_- + 6v_-^2) - 6G(1 + v_-)(5 + 5v_- + 2v_-^2)}{12(1 + v_-) [E_-(1 + 6v_- - 4v_-^2) - 6G(1 + v_-)]} \quad (29)$$

В рассматриваемой задаче критическая нагрузка при отсутствии разномодульности определяется формулой [3]:

$$\sigma_{xx}^0 = \frac{\pi^2 h^2 E_-}{a^2} \frac{1}{3(1 - v_-^2)} \quad (30)$$

К настоящему моменту данные, относящиеся к изотропным разномодульным материалам, к сожалению, малочисленны. В связи с этим вычисления, в качестве примера, критической нагрузки по формулам (29) и (30) произведены лишь для двух материалов — бетона и графита АРВ, коэффициенты упругости которых $E_+ = 27\ 330$ МПа, $E_- = 34090$ МПа, $v_+ = 0,16$ и $E_+ = 5220$ МПа, $E_- = 7990$ МПа,

$v_+ = 0,2$ соответственно взяты из [4—6]. Входящие в (29) и (30) G и v_- определялись по следующим формулам, полученным из соотношений (23):

$$G = \frac{3E_+^2 + E_+ E_- (1 - 8v_+)}{9E_+ - E_- (1 + 4v_+)^2}$$

$$v_- = - \frac{G(4v_+^2 - 7v_+ - 2) + E_+(1 + v_+)}{G(1 + 4v_+)^2 + E_+(1 - 8v_+)}$$

В результате вычислений найдено:

для бетона $G = 12\ 830$ МПа, $v_- = 0,25$, $\sigma_{xx}^0 = 11\ 590,6\pi^2 h^2/a^2$ МПа,
 $\sigma_{xx}^0 = 11\ 931,5\pi^2 h^2/a^2$ МПа;

для графита АРВ $G = 2689,1$ МПа, $v_- = 0,44$, $\sigma_{xx}^0 = 4474,4\pi^2 h^2/a^2$ МПа,
 $\sigma_{xx}^0 = 3275,9\pi^2 h^2/a^2$ МПа.

Как следует из проведенных вычислений, учет разномодульности может приводить к существенной разнице в оценке критической нагрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панферов В. М. Теория упругости и деформационная теория пластичности для твердых тел с разными свойствами на сжатие, растяжение и кручение//Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 1. С. 41—44.
2. Ломакин Е. В., Работников Ю. Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела//Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29—34.
3. Ключников В. Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ, 1986. 224 с.
4. Hütte E. Des Ingenieurs Taschenbuch. Bd. 1. Berlin: Ernst, 1955. 1668 S.
5. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов, Киев: Наук. думка, 1975. 704 с.
6. Ломакин Е. В. Разномодульность композитных материалов//Механика композит. материалов. 1981. № 1. С. 23—29.

Москва

Поступила в редакцию
28.X.1992