

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. Л. С. РЫБАКОВ, Л. Г. СИЛЬЧЕНКО

СТАТИЧЕСКАЯ УПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПАНЕЛИ ПРИ РАЗЛИЧНОМ ДВУХСТОРОННЕМ РАВНОМЕРНОМ СЖАТИИ

Упругий анализ деформирования ребристых пластин и оболочек, содержащийся в [1—6] и других, базировался на концепции сингулярно неоднородного тела, позволившей изучавшиеся там задачи свести к проблеме решения дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от δ -функции и ее производных.

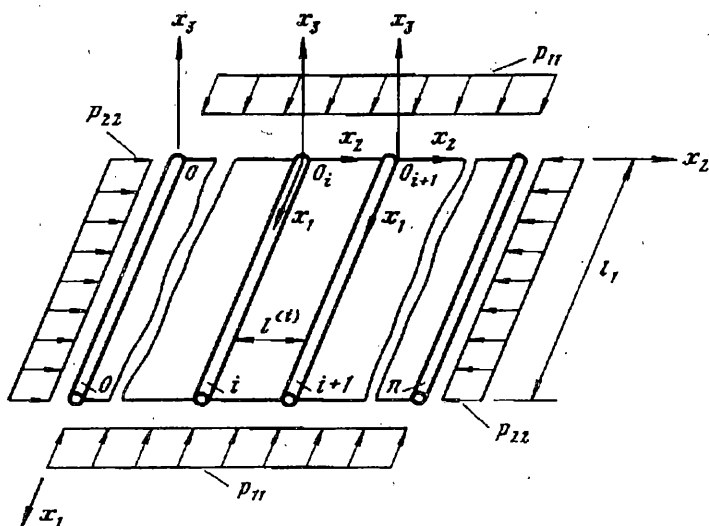
В настоящей статье задача о статической упругой устойчивости дискретно подкреплённой в одном направлении стрингерами прямоугольной пластины (панели) при различном двухстороннем равномерном ее сжатии сведена с помощью метода «склейки» в версии, изложенной в [7, 8], к задаче на собственные значения для системы дифференциально-разностных уравнений. Последняя, в свою очередь, для условий шарнирного опирания на краях панели, перпендикулярных ее стрингерам, приведена к дискретной задаче на собственные значения, точное решение которой проиллюстрировано на примерах, включающих частичную оптимизацию структуры панели.

1. Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольную упругую панель, представляющую собой прямоугольную ортотропную (конструктивно-ортотропную) пластину, дискретно подкреплённую нерегулярным набором стрингеров, параллельных одной из ее кромок. Схема изучаемой панели без детализации формы поперечных сечений стрингеров и их расположения относительно срединной плоскости пластины изображена фрагментарно на фиг. 1. Там же показаны предполагаемый характер нагружения панели — различное двухстороннее равномерное сжатие и принятая нумерация стрингеров, число которых, включая крайние, равно $n + 1$, где n — любое целое положительное число.

Сущность упругой системы, моделирующей поведение панели, определим следующими допущениями: 1). Деформирование пластины постоянной, по предположению, толщины описывается ортотропными вариантами плоского напряженного состояния и теории изгиба тонких пластин, основанных на известной гипотезе Кирхгоффа. Плоскости ортотропии пластины параллельны граничным плоскостям панели. 2). Все стрингеры, вообще говоря, различны и расположены с переменным шагом. Однако каждый стрингер однороден и имитируется в упругой системе прямой упругой линией, проходящей через центры тяжести его поперечных сечений и наделенной заданными жесткостями на растяжение — сжатие, кручение и изгиб в двух плоскостях. Деформация стрингеров в расчет не принимается. 3). Стрингеры и пластина взаимодействуют между собой континуально по поверхности их контакта.

Ортотропия пластины может быть обусловлена не только свойствами ее материала [9] (естественная ортотропия), но и процедурой «размазывания» [10] не требующего дискретного учета подкрепляющего набора (конструктивная ортотропия), который, как здесь предполагается, расположен симметрично относительно срединной плоскости пластины.

Обратимся к постановке задачи о статической устойчивости описанной выше



Фиг. 1

панели с помощью метода склейки [7, 8]. В соответствии с этим методом расчленим панель на элементы — приведенные стрингеры и заключенные между ними пластинки. Под приведенным стрингером (в дальнейшем он именуется просто стрингер) понимается стержень, составленный из самого стрингера и жестко связанной с ним, расположенной под ним, части пластины. К каждому изолированному элементу панели приложим сжимающие внешние силы и силы его взаимодействия с соседними элементами, подчиняющиеся, как известно, третьему закону Ньютона. Тогда в рамках используемого здесь статического подхода докритический и критический анализ панели сводится к такому же анализу ее изолированных элементов и формулировке геометрических условий их сопряжения.

Изложение будем вести в безразмерной форме. С этой целью примем за основные размерные параметры некий линейный размер l и некоторый модуль упругости E . В качестве l может выступать один из характерных геометрических параметров панели, а за E может быть принят модуль Юнга какого-либо ее элемента. Условимся в дальнейшем считать, что все величины с линейной размерностью обезразмерены путем деления на l . Правила образования других безразмерных величин будут указаны по мере их введения.

Отнесем панель к глобальной декартовой системе отсчета $Ox_1x_2x_3$; оси x_1, x_2 которой расположены в срединной плоскости пластины и направлены вдоль границ панели (см. фиг. 1). При анализе изолированных элементов панели будем использовать локальные системы $O_ix_1x_2x_3$, получаемые из глобальной системы путем поступательного смещения ее в плоскости x_2x_3 до совпадения ее начала O с началом O_i отсчета соответствующего i -го элемента панели. Для всех элементов панели $x_1 \in [0, l_1]$, где l_1 — размер панели вдоль стрингерного набора. Область изменения локальной координаты x_2 для пластинки i , расположенной между стрингерами i и $i+1$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), — отрезок $[0, l^{(i)}]$, где $l^{(i)}$ — ширина этой пластинки (см. фиг. 1).

Условимся впредь, что все переменные величины, относящиеся к конкретному элементу панели, являются функциями его локальных координат, частные производные которых по этим координатам отмечаются соответствующими нижними индексами после запятой. Производные функций одного аргумента обозначаются, как обычно, нужным числом штрихов сверху.

Введем обозначения (здесь и далее греческие индексы принимают значения 1, 2; h — толщина пластины):

$$B = \frac{Ehl}{1 - \nu_1\nu_2}, \quad D = \frac{Eh^3l^3}{12(1 - \mu_1\mu_2)}, \quad t = \frac{Bl^2}{D} = \frac{12(1 - \mu_1\mu_2)}{h^2(1 - \nu_1\nu_2)}$$

Здесь ν_α и μ_α — приведенные коэффициенты поперечного сжатия (вдоль осей $x_{3-\alpha}$), отвечающие соответственно плоскому напряженному состоянию и поперечному изгибу конструктивно-ортотропной пластины; B_α и B_0 — отнесенные к B погонные жесткости пластины на растяжение — сжатие вдоль оси x_α и сдвиг в плоскости x_1x_2 ; D_α и $D_{0\alpha}$ — отнесенные к D погонные жесткости пластины на изгиб в плоскости $x_\alpha x_3$ и кручение вокруг оси x_α [10]; $u_\alpha^{(i)}(x_1, x_2)$ и $w^{(i)}(x_1, x_2)$ — смещения точек срединной плоскости пластинки i вдоль осей x_α и x_3 ; $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)}(x_1, x_2)$ и $n_{\alpha\beta}^{(i)}(x_1, x_2)$ — компоненты плоских тензоров деформаций и отнесенных к B внутренних погонных усилий пластинки i ; $n_{\alpha 3}^{(i)}(x_1, x_2)$ и $q_{\alpha 3}^{(i)}(x_1, x_2)$ — обычные и обобщенные (по Кирхгоффу) погонные перерезывающие силы (отнесены к Dl^{-2}), а $m_{\alpha\beta}^{(i)}(x_1, x_2)$ — отнесенные к Dl^{-1} компоненты тензора погонных моментов пластинки i ; $g_k^{(i)}$ ($k = 0, 1, 2, 3$), $g_{23}^{(i)}$ — упругогеометрические характеристики сечения стрингера i (жесткость на растяжение — сжатие $g_1^{(i)}$ отнесена к Bl ; крутильная жесткость $g_0^{(i)}$, жесткости $g_2^{(i)}$ и $g_3^{(i)}$ на изгиб в плоскостях x_1x_2 и x_1x_3 , а также жесткость $g_{23}^{(i)}$, обусловленная несовпадением осей x_2, x_3 с главными осями сечения стрингера, отнесены к Dl); $v_j^{(i)}(x_1)$, $\theta^{(i)}(x_1)$ и $\varepsilon_1^{(i)}(x_1)$ — соответственно смещения вдоль осей x_j ($j = 1, 2, 3$), угол закручивания и удлинение упругой оси стрингера i ; $n_1^{(i)}(x_1)$ — отнесенное к Bl внутреннее осевое усилие в произвольном сечении стрингера i ; p_{11} , p_{22} — отнесенные к $E/(1 - \nu_1\nu_2)$ равномерно распределенные поверхностные силы, сжимающие панель вдоль осей x_1, x_2 соответственно (см. фиг. 1).

Отметим, что параметры конструктивной ортотропии пластины удовлетворяют известным тождествам [10] $\nu_1 B_2 = \nu_2 B_1$, $\mu_1 D_2 = \mu_2 D_1$, причем в случае естественной ортотропии $B_\alpha = D_\alpha$, $B_0 = D_{0\alpha}$, $\nu_\alpha = \mu_\alpha$.

Найдем докритическое напряженное состояние панели, предполагая его однородным в пределах каждого ее элемента. Последующие рассуждения убеждают, что такая возможность реализуема при отсутствии изгиба и кручения всех элементов панели в этом состоянии.

Докритическое плоское напряженное состояние панели определяется уравнениями равновесия ее изолированных элементов

$$n_{\alpha\beta, \beta}^{(i)} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$n_1^{(i)'}(x_1) + n_{12}^{(i)}(x_1, 0) - n_{12}^{(i-1)}(x_1, l^{(i-1)}) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

(здесь и далее повторяющийся греческий индекс указывает на суммирование по его значениям 1, 2, а величины, относящиеся к несуществующим элементам панели, например, $n_{12}^{(-1)}$, $n_{12}^{(n)}$, считаются равными нулю), физическими соотношениями

$$n_{11}^{(i)} = B_1(\varepsilon_{11}^{(i)} + \nu_2 \varepsilon_{22}^{(i)}), \quad n_{22}^{(i)} = B_2(\varepsilon_{22}^{(i)} + \nu_1 \varepsilon_{11}^{(i)})$$

$$n_{12}^{(i)} = 2B_0 \varepsilon_{12}^{(i)}, \quad n_1^{(i)} = g_1^{(i)} \varepsilon_1^{(i)} \quad (1.1)$$

статическими условиями сопряжения смежных пластинок

$$n_{22}^{(i)}(x_1, 0) = n_{22}^{(i)}(x_1, l^{(i-1)}) \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

условиями совместного деформирования соседних пластинок и стрингеров

$$\varepsilon_1^{(i)}(x_1) = \varepsilon_{11}^{(i)}(x_1, 0) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$\varepsilon_1^{(i)}(x_1) = \varepsilon_{11}^{(i-1)}(x_1, l^{(i-1)}) \quad (i = 1, \dots, n)$$

и, наконец, статическими граничными условиями

$$n_{1\alpha}^{(i)}(0, x_2) = n_{1\alpha}^{(i)}(l_i, x_2) = [(-1)^\alpha - 1] p_{11}/2 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$n_{\alpha 2}^{(0)}(x_1, 0) = n_{\alpha 2}^{(n-1)}(x_1, l^{(n-1)}) = -[(-1)^\alpha + 1] p_{22}/2$$

Нетрудно видеть, что всем этим соотношениям удовлетворяет поэлементно однородное напряженное состояние

$$n_{11}^{(i)} = -p_{11}, \quad n_{22}^{(i)} = -p_{22}, \quad n_{12}^{(i)} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$n_1^{(i)} = -p g_1^{(i)} \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad p = (B_1^{-1} p_{11} - v_2 B_2^{-1} p_{22}) / (1 - v_1 v_2)$$

осуществимое лишь при сжатии стрингеров специальными силами, зависящими от эффекта Пуассона в пластине и пропорциональными жесткостям стрингеров на растяжение — сжатие. Последнее, кстати, подтверждает хорошо известный факт: внутренние силы в элементах упругой системы пропорциональны жесткостям этих элементов. Со всем этим можно согласиться, если иметь в виду, что рассматриваемая изолированная панель, как правило, — фрагмент более сложной конструкции, деформированием которой и предопределяется подобное нагружение изучаемой панели.

Обратимся теперь к поэлементному анализу самой устойчивости панели. Но прежде подчеркнем, что из-за произвольности формы поперечных сечений стрингеров и эксцентричного, вообще говоря, прикрепления их к пластине относительно ее срединной плоскости элементы панели будут испытывать в критическом состоянии пространственное деформирование. По этой причине критическое состояние пластинки i описывается уравнениями [9, 10]:

$$B_1 \varphi_{,111}^{(i)} + 2B_{12} \varphi_{,112}^{(i)} + B_2 \varphi_{,222}^{(i)} = 0$$

$$D_1 w_{,111}^{(i)} + 2D_{12} w_{,112}^{(i)} + D_2 w_{,222}^{(i)} + t p_{\alpha\alpha} w_{,\alpha\alpha}^{(i)} = 0 \quad (1.2)$$

в которых введены коэффициенты

$$2B_{12} = (1 - v_1 v_2) B_1 B_2 B_0^{-1} - v_1 B_2 - v_2 B_1$$

$$2D_{12} = 2(D_{01} + D_{02}) + \mu_1 D_2 + \mu_2 D_1$$

и функция Эйри $\varphi^{(i)}(x_1, x_2)$, связанная с переменными сопровождающего изгиба пластинки i плоского напряженного состояния зависимостями (см. (1.1); $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера):

$$n_{\alpha\beta}^{(i)} = \varphi_{,\alpha\beta}^{(i)} \delta_{\alpha\beta} - \varphi_{,\beta\alpha}^{(i)} \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_{11}^{(i)} = u_{1,1}^{(i)} = (B_1^{-1} \varphi_{,22}^{(i)} - v_2 B_2^{-1} \varphi_{,11}^{(i)}) / (1 - v_1 v_2)$$

$$\varepsilon_{22}^{(i)} = u_{2,2}^{(i)} = (B_2^{-1} \varphi_{,11}^{(i)} - v_1 B_1^{-1} \varphi_{,22}^{(i)}) / (1 - v_1 v_2)$$

$$\varepsilon_{12}^{(i)} = (u_{1,2}^{(i)} + u_{2,1}^{(i)}) / 2 = -\varphi_{,12}^{(i)} / (2B_0)$$

Заметим, что, начиная с этого момента, символы, применявшиеся ранее для обозначения переменных докритического напряженно-деформированного состояния панели, связываются теперь с ее критическим состоянием.

Из физических соотношений теории изгиба для пластинки i в дальнейшем понадобятся лишь выражения

$$\begin{aligned} m_{22}^{(i)} &= -D_2 (w_{,22}^{(i)} + \mu_1 w_{,11}^{(i)}) \\ q_{23}^{(i)} &= n_{23}^{(i)} + m_{21,1}^{(i)} = -D_2 w_{,222}^{(i)} - (D_{12} + D_{01} + D_{02}) w_{,112}^{(i)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Поскольку выпучивание (изгиб в двух плоскостях) стрингеров сопровождается в общем случае их растяжением — сжатием и кручением, то линеаризованные уравнения устойчивости стрингера i имеют вид

$$\begin{aligned} g_2^{(i)} v_2^{(i)IV} + t p g_1^{(i)} v_2^{(i)''} + q_{23}^{(i)} v_3^{(i)IV} &= p_2^{(i)} + s_3^{(i)} \\ g_1^{(i)} v_1^{(i)''} &= -p_1^{(i)}, \quad g_0^{(i)} \theta^{(i)''} = -s_1^{(i)} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$g_3^{(i)} v_3^{(i)IV} + t p g_1^{(i)} v_3^{(i)''} + g_{23}^{(i)} v_2^{(i)IV} = p_3^{(i)} + s_2^{(i)} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

где в правых частях стоят внешние по отношению к этому стрингеру результирующие погонные силы $p_j^{(i)}(x_i)$ (действуют вдоль осей x_j ; $p_1^{(i)}$ отнесена к B ; $p_2^{(i)}, p_3^{(i)}$ — к Dl^{-2}) и моменты $s_j^{(i)}(x_i)$ относительно осей x_j (отнесены к Dl^{-1} ; $j = 1, 2, 3$), полученные в результате снесения на упругую линию стрингера i сил и моментов, с которыми действуют на него соседние пластинки. Эти результирующие, очевидно, равны

$$p_1^{(i)} = n_{12}^{(i)}(x_i, 0) - n_{12}^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)}) \quad (1.6)$$

$$p_2^{(i)} = t [n_{22}^{(i)}(x_i, 0) - n_{22}^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)})], \quad p_3^{(i)} = q_{23}^{(i)}(x_i, 0) - q_{23}^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)})$$

$$s_1^{(i)} = e_3^{(i)} p_2^{(i)} + e_2^{(i)+} q_{23}^{(i)}(x_i, 0) + e_2^{(i)-} q_{23}^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)}) - m_{22}^{(i)}(x_i, 0) + m_{22}^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)})$$

$$s_2^{(i)} = -t e_3^{(i)} p_1^{(i)}, \quad s_3^{(i)} = t [e_2^{(i)+} n_{12}^{(i)}(x_i, 0) + e_2^{(i)-} n_{12}^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)})]$$

Здесь $e_3^{(i)}$ — удаленность упругой линии стрингера i от срединной плоскости пластины, $e_2^{(i)+}$ и $e_2^{(i)-}$ — расстояния от этой же линии вдоль оси x_2 до пластинок i и $i-1$.

Из анализа совместности смещений соседних элементов панели вытекают геометрические условия сопряжения смежных пластинок через разделяющий их стрингер

$$u_1^{(i)}(x_i, 0) = u_1^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)}) - e_2^{(i)} v_2^{(i)'}, \quad u_2^{(i)}(x_i, 0) = u_2^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)}) \quad (1.7)$$

$$w^{(i)}(x_i, 0) = w^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)}) + e_2^{(i)} \theta^{(i)}, \quad w_{,2}^{(i)}(x_i, 0) = w_{,2}^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)}) \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

где $e_2^{(i)} = e_2^{(i)+} + e_2^{(i)-}$, а также выражения

$$v_1^{(i)} = u_1^{(i)}(x_i, 0) + e_2^{(i)+} u_{2,1}^{(i)}(x_i, 0) - e_3^{(i)} w_{,1}^{(i)}(x_i, 0), \quad v_2^{(i)} = u_2^{(i)}(x_i, 0) - e_3^{(i)} w_{,2}^{(i)}(x_i, 0)$$

$$v_3^{(i)} = w^{(i)}(x_i, 0) - e_2^{(i)+} w_{,2}^{(i)}(x_i, 0), \quad \theta^{(i)} = w_{,2}^{(i)}(x_i, 0) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$v_1^{(i)} = u_1^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)}) - e_2^{(i)-} u_{2,1}^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)}) - e_3^{(i)} w_{,1}^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)})$$

$$v_2^{(i)} = u_2^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)}) - e_3^{(i)} w_{,2}^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)})$$

$$v_3^{(i)} = w^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)}) + e_2^{(i)-} w_{,2}^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)})$$

$$\theta^{(i)} = w_{,2}^{(i-1)}(x_i, l^{(i-1)}) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.8)$$

смещений стрингера i через смещения соединенных с ним пластинок.

Таким образом, задача о статической упругой устойчивости панели сведена к совместному решению уравнений (1.2), (1.5) (при $i = 1, 2, \dots, n-1$), (1.7) с привлечением нужных зависимостей (1.3), (1.4), (1.6), (1.8). Эти уравнения образуют однородную систему дифференциально-разностных уравнений с иско-

мыми параметрами p_{11} , p_{22} . Ее следует дополнить однородными же условиями на краях панели. Те из них, которые относятся к подкрепленным краям панели, содержатся в равенствах (1.5), отвечающих $i = 0, n$. Остальные краевые условия формулируются на краях панели $x_1 = 0, l_1$. Из всех возможных их вариантов выделим условия

$$\begin{aligned} n_{11}^{(i)}(0, x_2) &= n_{11}^{(i)}(l_1, x_2) = u_2^{(i)}(0, x_2) = u_2^{(i)}(l_1, x_2) = 0 \\ w^{(i)}(0, x_2) &= w^{(i)}(l_1, x_2) = w_{,11}^{(i)}(0, x_2) = w_{,11}^{(i)}(l_1, x_2) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (1.9) \\ n_1^{(i)}(0) &= n_1^{(i)}(l_1) = v_m^{(i)}(0) = v_m^{(i)}(l_1) = v_m^{(i)''}(0) = v_m^{(i)''}(l_1) = \theta^{(i)}(0) = \theta^{(i)}(l_1) = 0 \\ (m &= 2, 3; i = 0, 1, \dots, n) \end{aligned}$$

для которых ниже строится точное решение только что сформулированной дифференциально-разностной задачи на собственные значения.

2. Сведение проблемы устойчивости панели к дискретной задаче на собственные значения. Представим решения уравнений (1.2) в виде

$$\varphi^{(i)}(x_1, x_2) = \varphi_{1k}^{(i)}(x_{2k}) \sin x_{1k}, \quad w^{(i)}(x_1, x_2) = w_{1k}^{(i)}(x_{2k}) \sin x_{1k} \quad (2.1)$$

$$x_{\alpha k} = x_{\alpha} \pi_k, \quad \pi_k = k\pi/l_1 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

где $\varphi_{1k}^{(i)}$ и $w_{1k}^{(i)}$ — искомые функции. Подстановка этих представлений в (1.2) приводит к сходным обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$B_2 \varphi_{1k}^{(i)IV} - 2B_{12} \varphi_{1k}^{(i)'''} + B_1 \varphi_{1k}^{(i)''} = 0, \quad D_2 w_{1k}^{(i)IV} - 2D_{12} w_{1k}^{(i)'''} + D_{1k} w_{1k}^{(i)''} = 0 \quad (2.2)$$

$$D_{12k} = D_{12} - p_{22} t_k/2, \quad D_{1k} = D_1 - p_{11} t_k, \quad t_k = t/\pi_k^2$$

С помощью четырехмерных вектор-столбцов $\Phi_k^{(i)}(x)$, $W_k^{(i)}(x)$ с компонентами ($j = 1, 2, 3, 4$) $\varphi_{jk}^{(i)}(x) = d^{j-1} \varphi_{1k}^{(i)}(x)/dx^{j-1}$, $w_{jk}^{(i)}(x) = d^{j-1} w_{1k}^{(i)}(x)/dx^{j-1}$ и их начальных значений $\Phi_k^{(i)} = \Phi_k^{(i)}(0)$, $W_k^{(i)} = W_k^{(i)}(0)$ общее решение уравнений (2.2) записывается следующим образом:

$$\Phi_k^{(i)}(x_{2k}) = a(x_{2k}) \Phi_k^{(i)}, \quad W_k^{(i)}(x_{2k}) = a_k(x_{2k}) W_k^{(i)} \quad (2.3)$$

Здесь введены квадратные матрицы $a(x)$, $a_k(x)$ четвертого порядка. Элементы первой строки $a(x)$ выражаются формулами

$$\begin{aligned} a_{11}(x) &= a_{12}'(x), \quad a_{12}(x) = (\lambda_1^3 \operatorname{sh} \lambda_2 x - \lambda_2^3 \operatorname{sh} \lambda_1 x) / [\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)] \\ a_{13}(x) &= a_{14}'(x), \quad a_{14}(x) = (\lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_1 x - \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2 x) / [\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\lambda_{\alpha} = \lambda [1 - (-1)^{\alpha} (1 - B_1 B_2 B_{12}^{-2})^{1/2}]^{1/2}, \quad \lambda = \sqrt{B_{12}/B_2}$$

а любая другая строка этой матрицы является производной предыдущей строки. Из других полезных свойств матрицы $a(x)$ выделим свойства

$$a(x+y) = a(x) a(y), \quad a^{-1}(x) = a(-x), \quad |a(x)| = 1$$

Выражения (2.4) справедливы, если $B_{12}^2 \neq B_1 B_2$. В противном случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и, как нетрудно видеть, элементы матрицы $a(x)$ принимают неопределенные значения типа 0/0. Раскрывая эти неопределенности, устанавливаем, что в этом случае

$$a_{12}(x) = (3 \operatorname{sh} \lambda x - \lambda x \operatorname{ch} \lambda x) / (2\lambda), \quad a_{14}(x) = (\lambda x \operatorname{ch} \lambda x - \operatorname{sh} \lambda x) / (2\lambda^3)$$

а указанные ранее правила вычисления других элементов $a(x)$ сохраняют силу и здесь.

Что касается матрицы $a_k(x)$, то она получается из $a(x)$ путем замены в выражениях для ее элементов $\lambda_{\alpha}, \lambda$ соответственно на $\lambda_{\alpha k}, \lambda_k$, где

$$\lambda_{\alpha k} = \lambda_k [1 - (-1)^{\alpha} (1 - D_{1k} D_2 D_{12k}^{-2})^{1/2}]^{1/2}, \quad \lambda_k = \sqrt{D_{12k}/D_2}$$

Полагая, далее

$$u_1^{(j)} = u_{1k}^{(j)}(x_{2k}) \cos x_{1k}, \quad u_2^{(j)} = u_{2k}^{(j)}(x_{2k}) \sin x_{1k}$$

$$n_{22}^{(j)} = \pi_k u_{3k}^{(j)}(x_{2k}) \sin x_{1k}, \quad n_{12}^{(j)} = \pi_k u_{4k}^{(j)}(x_{2k}) \cos x_{1k} \quad (2.5)$$

после подстановки этих выражений, а также первого представления (2.1) в формулы (1.3) и введения вектор-столбца $u_k^{(j)}(x_{2k})$ с элементами $u_{jk}^{(j)}(x_{2k})$ ($j = 1, 2, 3, 4$) находим зависимости

$$u_k^{(j)}(x_{2k}) = b(x_{2k}) U_k^{(j)}, \quad b(x_{2k}) = c a(x_{2k}) c^{-1}, \quad U_k^{(j)} = u_k^{(j)}(0) = -\pi_k c \Phi_k^{(j)} \quad (2.6)$$

в которых введены постоянная невырожденная квадратная матрица c и обратная ей матрица c^{-1} , отличающиеся от нулевой матрицы 4×4 элементами

$$c_{11} = v_1 c_{13} = -v_1 c_{24} = v_1 / [B_1 (1 - v_1 v_2)]$$

$$c_{22} = B_0^{-1} - v_2 / [B_2 (1 - v_1 v_2)], \quad c_{31} = c_{42} = c_{13}^{(-1)} = c_{24}^{(-1)} = 1$$

$$c_{31}^{(-1)} = -c_{42}^{(-1)} = B_1 (1 - v_1 v_2), \quad c_{33}^{(-1)} = -v_1, \quad c_{44}^{(-1)} = B_1 [(1 - v_1 v_2) B_0^{-1} - v_2 B_2^{-1}]$$

Попутно устанавливаем равенство $n_{11}^{(j)} = \pi_k \Phi_{3k}^{(j)}(x_{2k}) \sin x_{1k}$, которое вместе со вторыми представлениями (2.1), (2.5) свидетельствует о выполнении двух первых групп граничных условий (1.9). Отметим еще, что в силу (1.4), (2.1):

$$m_{22}^{(j)} = -\pi_k^2 D_2 [w_{3k}^{(j)}(x_{2k}) + \mu_1 w_{1k}^{(j)}(x_{2k})] \sin x_{1k}$$

$$q_{32}^{(j)} = -\pi_k^3 [D_2 w_{4k}^{(j)}(x_{2k}) - (D_{12} + D_{01} + D_{02}) w_{2k}^{(j)}(x_{2k})] \sin x_{1k} \quad (2.7)$$

Итак, критическое состояние пластинки i найдено с точностью до двух искомых постоянных векторов $U_k^{(j)}, W_k^{(j)}$ и, конечно же, параметров p_{11}, p_{22} . Нетрудно показать, что и критическое состояние стрингеров определяется этими же величинами. Действительно, внося в формулы (1.8) нужные представления (2.1), (2.5), получаем

$$v_1^{(j)} = u_{1k}^{(j)} \cos x_{1k}, \quad v_2^{(j)} = u_{2k}^{(j)} \sin x_{1k}$$

$$v_3^{(j)} = u_{3k}^{(j)} \sin x_{1k}, \quad \theta^{(j)} = \pi_k \theta_k^{(j)} \sin x_{1k} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

$$u_{1k}^{(j)} = U_{1k}^{(j)} + e_{2k}^{(j)+} U_{2k}^{(j)} - e_{3k}^{(j)} W_{1k}^{(j)}$$

$$u_{2k}^{(j)} = U_{2k}^{(j)} - e_{3k}^{(j)} W_{2k}^{(j)}, \quad v_{3k}^{(j)} = W_{1k}^{(j)} - e_{2k}^{(j)+} W_{2k}^{(j)}$$

$$\theta_k^{(j)} = W_{2k}^{(j)} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.8)$$

$$v_{1k}^{(i+1)} = u_{1k}^{(i)}(l_k^{(i)}) - e_{2k}^{(i+1)-} u_{2k}^{(i)}(l_k^{(i)}) - e_{3k}^{(i+1)} w_{1k}^{(i)}(l_k^{(i)})$$

$$v_{2k}^{(i+1)} = u_{2k}^{(i)}(l_k^{(i)}) - e_{3k}^{(i+1)} w_{2k}^{(i)}(l_k^{(i)})$$

$$v_{3k}^{(i+1)} = w_{1k}^{(i)}(l_k^{(i)}) + e_{2k}^{(i+1)-} w_{2k}^{(i)}(l_k^{(i)}), \quad \theta_k^{(i+1)} = w_{2k}^{(i)}(l_k^{(i)}) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$l_k^{(i)} = \pi_k l^{(i)}, \quad e_{2k}^{(i)+} = \pi_k e_2^{(i)+}, \quad e_{2k}^{(i)-} = \pi_k e_2^{(i)-}, \quad e_{3k}^{(i)} = \pi_k e_3^{(i)}$$

так что для внутреннего осевого усилия в стрингере i имеем

$$n_1^{(i)}(x_i) = g_1^{(i)} v_1^{(i)'}(x_i) = -\pi_k g_1^{(i)} v_{1k}^{(i)} \sin x_{1k} \quad (2.9)$$

Из выражений (2.8), (2.9) видно, что и третья группа граничных условий (1.9) также выполнена.

Для нахождения искоемых $U_k^{(i)}, W_k^{(i)}$ в нашем распоряжении имеются уравнения (1.5), (1.7). Поступим с ними следующим образом. Преобразуем, прежде всего, систему (1.5) по такой схеме: принимая во внимание зависимости (1.6), исключим из первого и четвертого уравнений с помощью второго уравнения величину $n_{12}^{(i-1)}(x_1, l^{(i-1)})$, после чего, воспользовавшись новыми видами первого и четвертого уравнений, исключим из третьего уравнения величины $n_{22}^{(i-1)}(x_1, l^{(i-1)})$ и $q_{23}^{(i-1)}(x_1, l^{(i-1)})$. Сгруппируем затем геометрические условия (1.7) и преобразованные уравнения (1.5), относящиеся к внутренним стрингерам ($i = 1, \dots, n-1$), в единую систему, начинающуюся с первой пары (1.7), за которой следует первая пара преобразованных уравнений (1.5), а уже потом вторая пара равенств (1.7) и вторая же пара преобразованных уравнений (1.5). При таком порядке формирования системы первые ее четыре уравнения связаны с деформированием панели в ее плоскости, а остальные четыре уравнения — с деформированием панели из ее плоскости. Последовательная подстановка в эту систему нужных зависимостей (2.1), (2.3), (2.5) — (2.8) приводит в итоге к системе разностных уравнений восьмого порядка с переменными коэффициентами. Компактное матричное представление ее

$$S_k^{(i)} X_k^{(i)} = G_k^{(i-1)} X_k^{(i-1)} \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (2.10)$$

где $X_k^{(i)} (i = 0, 1, \dots, n-1)$ — новый искомый вектор-столбец восьмого порядка, составленный из неизвестных $U_k^{(i)}$ и $W_k^{(i)}$, поясняет блочная матричная запись

$$S_k^{11(i)} U_k^{(i)} S_k^{12(i)} W_k^{(i)} = B_k^{(i-1)} U_k^{(i-1)} \quad (2.11)$$

$$S_k^{21(i)} U_k^{(i)} + S_k^{22(i)} W_k^{(i)} = A_k^{(i-1)} W_k^{(i-1)} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

Как видно, матрица $G_k^{(i)}$ порядка 8×8 имеет блочно-диагональную структуру. Роль ее диагональных блоков играют матрицы $B_k^{(i)} = b(I_k^{(i)})$, $A_k^{(i)} = a_k(I_k^{(i)})$. Что касается матрицы $S_k^{(i)}$, блоки $S_k^{\alpha\beta(i)}$ порядка 4×4 которой фигурируют в левых частях равенств (2.11), то она отличается от единичной матрицы 8×8 элементами (в их обозначениях для краткости опущен индекс k):

$$S_{12}^{(i)} = -S_{16}^{(i)}/e_{3k}^{(i)} = -S_{34}^{(i)} = -S_{56}^{(i)} = S_{74}^{(i)} D_2 / (t_k e_{3k}^{(i)}) = -S_{78}^{(i)} = e_{2k}^{(i)}$$

$$S_{31}^{(i)}/e_{2k}^{(i)-} = -S_{41}^{(i)} = -S_{42}^{(i)}/e_{2k}^{(i)+} = S_{45}^{(i)}/e_{3k}^{(i)} = -S_{81}^{(i)} D_2 / (t_k e_{3k}^{(i)}) = g_{1k}^{(i)}$$

$$S_{32}^{(i)} = g_{1k}^{(i)} e_{2k}^{(i)+} e_{2k}^{(i)-} - r_{2k}^{(i)}/t_k, \quad S_{35}^{(i)} = -g_{1k}^{(i)} e_{2k}^{(i)} e_{3k}^{(i)} - g_{23k}^{(i)}/t_k$$

$$S_{36}^{(i)} t_k = r_{2k}^{(i)} e_{3k}^{(i)} + g_{23k}^{(i)} e_{2k}^{(i)+}, \quad S_{72}^{(i)} D_2 = r_{2k}^{(i)} e_{3k}^{(i)} - g_{23k}^{(i)} e_{2k}^{(i)}$$

$$S_{75}^{(i)} D_2 = g_{23k}^{(i)} e_{3k}^{(i)} - r_{3k}^{(i)} e_{2k}^{(i)-}, \quad S_{82}^{(i)} D_2 = g_{23k}^{(i)} - g_{1k}^{(i)} e_{2k}^{(i)+} e_{3k}^{(i)} t_k$$

$$S_{76}^{(i)} D_2 = 2 (D_{01} + D_{02}) e_{2k}^{(i)} - g_{0k}^{(i)} - D_2 (e_{2k}^{(i)+} S_{75}^{(i)} + e_{3k}^{(i)} S_{72}^{(i)})$$

$$S_{85}^{(i)} D_2 = r_{3k}^{(i)} + g_{1k}^{(i)} e_{3k}^{(i)2} t_k, \quad S_{86}^{(i)} D_2 = -g_{23k}^{(i)} e_{3k}^{(i)} - r_{3k}^{(i)} e_{2k}^{(i)+}$$

$$g_{mk}^{(i)} = \pi_k g_m^{(i)}, \quad g_{23k}^{(i)} = \pi_k g_{23}^{(i)}, \quad r_{jk}^{(i)} = g_{jk}^{(i)} - p t_k g_{1k}^{(i)}, \quad e_{jk}^{(i)} = \pi_k e_j^{(i)}$$

$$(m = 0, 1, 2, 3; j = 2, 3; i = 0, 1, \dots, n)$$

Как показывают вычисления, $|S_k^{(i)}| = 1$.

Заметим, что матрица $S_k^{(i)}$ после замены в ее элементах $g_m^{(i)}, g_{23}^{(i)}, e_{2k}^{(i)+}, e_{2k}^{(i)-}$ соответственно на $-g_m^{(i)}, -g_{23}^{(i)}, -e_{2k}^{(i)-}, -e_{2k}^{(i)+}$ переходит в обратную ей матрицу $(S_k^{(i)})^{-1}$.

Аналогичные преобразования уравнений (1.5), отвечающих $i = 0, n$, приводят к матричным равенствам

$$S_k^{1(i)} U_k^{(0)} + S_k^{2(i)} W_k^{(0)} = 0, \quad S_k^{1(n)} U_k^{(n-1)} (I_k^{(n-1)}) + S_k^{2(n)} W_k^{(n-1)} (I_k^{(n-1)}) = 0 \quad (2.12)$$

в которых введены квадратные матрицы четвертого порядка $S_k^{(0)}$, отличные от нуля элементы которых определяются выражениями (индекс k в обозначениях элементов опущен):

$$\begin{aligned} -S_{12}^{(0)}/r_{2k}^{(0)} &= S_{13}^{(0)}/t_k = -S_{14}^{(0)}/(t_k e_{2k}^{(0)+}) = -S_{21}^{(0)}/g_{1k}^{(0)} = -S_{22}^{(0)}/(g_{1k}^{(0)} e_{2k}^{(0)+}) = \\ &= S_{24}^{(0)} = S_{33}^{(0)} D_2 / (t_k e_{3k}^{(0)}) = S_{42}^{(0)} D_2 / g_{23k}^{(0)} = -S_{44}^{(0)} D_2 / (t_k e_{3k}^{(0)}) = -S_{11}^{(2)}/g_{23k}^{(0)} = \\ &= S_{21}^{(2)}/(g_{1k}^{(0)} e_{3k}^{(0)}) = -S_{31}^{(2)}/\mu_1 = S_{33}^{(2)} = -S_{34}^{(2)}/e_{2k}^{(0)+} = S_{41}^{(2)} D_2 / r_{3k}^{(0)} = S_{44}^{(2)} = 1 \\ S_{12}^{(2)} &= r_{2k}^{(0)} e_{3k}^{(0)} + g_{23k}^{(0)} e_{2k}^{(0)+}, \quad S_{32}^{(2)} D_2 = (D_{12} + D_{01} + D_{02}) e_{2k}^{(0)+} - g_{0k}^{(0)} \\ S_{42}^{(2)} D_2 &= -r_{3k}^{(0)} e_{2k}^{(0)+} - g_{23k}^{(0)} e_{3k}^{(0)} - D_{12} - D_{01} - D_{02} \end{aligned}$$

Матрицы $S_k^{(\alpha(n))}$ получаются из соответствующих матриц $S_k^{(\alpha(0))}$ в результате замены $g_m^{(0)}$, $g_{23}^{(0)}$, $e_2^{(0)+}$ на $-g_m^{(n)}$, $-g_{23}^{(n)}$, $-e_2^{(n)-}$ ($m = 0, 1, 2, 3$).

Для системы (2.10) (или (2.11)) равенства (2.12) играют роль краевых условий. Они носят общий характер и, как нетрудно видеть, из них легко извлекаются, например, условия свободного опирания

$$\begin{aligned} U_{3k}^{(0)} &= U_{4k}^{(0)} = u_{3k}^{(n-1)} (I_k^{(n-1)}) = u_{4k}^{(n-1)} (I_k^{(n-1)}) = 0 \\ W_{1k}^{(0)} &= W_{3k}^{(0)} = w_{1k}^{(n-1)} (I_k^{(n-1)}) = w_{3k}^{(n-1)} (I_k^{(n-1)}) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

и условия защемления (в части поперечного изгиба):

$$\begin{aligned} U_{3k}^{(0)} &= U_{4k}^{(0)} = u_{3k}^{(n-1)} (I_k^{(n-1)}) = u_{4k}^{(n-1)} (I_k^{(n-1)}) = 0 \\ W_{1k}^{(0)} &= W_{2k}^{(0)} = w_{1k}^{(n-1)} (I_k^{(n-1)}) = w_{2k}^{(n-1)} (I_k^{(n-1)}) = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

для неподкрепленных крайних кромок панели, параллельных ее стрингерному набору.

Система разрешающих уравнений (2.10) и условия (2.12) (или их частные варианты) представляют дискретную задачу на собственные значения, к решению которой при сделанных предположениях сведена точным образом поставленная ранее проблема статической упругой устойчивости панели.

3. О решении дискретной задачи на собственные значения. Рекуррентный характер системы (2.10), а именно

$$X_k^{(i)} = H_k^{(i-1)} X_k^{(i-1)} \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad H_k^{(i)} = (S_k^{(i+1)})^{-1} G_k^{(i)} \quad (3.1)$$

позволяет записать ее общее решение в виде

$$X_k^{(i)} = K_k^{(i)} X_k^{(0)} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$K_k^{(i)} = \prod_{m=1}^i H_k^{(i-m)} = H_k^{(i-1)} H_k^{(i-2)} \dots H_k^{(0)} \quad (3.2)$$

где упорядоченное матричное произведение, обозначенное символом Π , считается равным единичной матрице соответствующего порядка, если верхний предел Π меньше нижнего. В силу (2.3), (2.6) и (3.2) краевые условия (2.12) допускают запись

$$M_k^{(0)} X_k^{(0)} = 0 \quad (3.3)$$

Здесь $M_k^{(0)}$ — квадратная матрица 8×8 , верхняя $M_k^{1(0)}$ и нижняя $M_k^{2(0)}$ блочные строки которой определяются выражениями

$$M_k^{1(0)} = \|S_k^{(1)} S_k^{2(0)}\|, \quad M_k^{2(0)} = \|S_k^{1(n)} S_k^{2(n)}\| G_k^{(n-1)} K_k^{(n-1)} \quad (3.4)$$

Таким образом, дискретная задача на собственные значения (2.10), (2.12) сведена к более простой алгебраической проблеме на собственные значения —

решению однородной системы линейных алгебраических уравнений (3.3) восьмого порядка с коэффициентами (элементами матрицы $M_k^{(0)}$), зависящими от искоемых параметров сжимающей нагрузки p_{11} , p_{22} . Критические значения последних (p_{11} при фиксированном p_{22} или, наоборот, p_{22} при фиксированном p_{11}) определяются минимальными корнями характеристического уравнения

$$|M_k^{(0)}| = 0 \quad (3.5)$$

Схема нахождения этих критических значений предусматривает для каждого $k = 1, \dots, k_*, k_* + 1$ пошаговое, нарастающее от нуля, задание искомого параметра нагрузки, вычисление на каждом шаге определителя $|M_k^{(0)}|$ и фиксацию его перемены знака с последующим уточнением того значения нагрузки, при котором имеет место эта перемена знака. Число k_* полуволн формы выпучивания панели вдоль стрингерного набора (см. (2.1)) отвечает наименьшему корню уравнения (3.5), которое и принимается за критическую нагрузку панели. Чтобы получить представление о поведении формы выпучивания панели поперек набора, достаточно теперь найти соответствующее $k = k_*$ и критической нагрузке решение системы (3.3), пронормировать его и воспользоваться нужными выражениями (2.3), (3.2).

При фиксированной погрешности вычислений описанный алгоритм требует конечного числа алгебраических операций и потому может быть отнесен к разряду точных алгоритмов. Однако практическая реализация его на ЭВМ оказывается порой затруднительной. Объясняется это, прежде всего, необходимостью многократного перемножения матриц (см. (3.1), (3.2)), в элементах которых присутствуют быстро растущие гиперболические функции, что влечет неконтролируемый рост погрешности вычислений и сближение (стремление к линейной зависимости) строк матриц, получаемых в результате этого перемножения, не говоря уже об исчерпании возможности ЭВМ в представлении больших чисел. Усугубляющими факторами здесь являются мощный подкрепляющий набор, большое число стрингеров и большая ширина ($l^{(0)}$) пластинок.

Отмеченная неустойчивость вычислений присуща обсуждаемому алгоритму органически. Поэтому при создании на его основе достоверных вычислительных процессов приходится рассчитывать не на полное устранение причин такой неустойчивости, а лишь на снижение их отрицательных последствий. Для этой цели можно было бы воспользоваться, например, методом прогонки. В настоящей работе предпочтение отдано вычислениям на ЭВМ с двойной точностью и поэтапному масштабированию в сочетании с двумя искусственными приемами, названными ниже методом плавающего начального вектора и методом усечения.

Первый из них призван ослабить отрицательное влияние большого числа стрингеров и основан на замене равенств (3.2), (3.3), (3.5) эквивалентными представлениями

$$X_k^{(j)} = K_k^{(i,j)} X_k^{(j)}, \quad M_k^{(j)} X_k^{(j)} = 0, \quad |M_k^{(j)}| = 0$$

$$K_k^{(i,j)} = \prod_{m=1}^{i-j} H_k^{(i-m)} \quad (i \geq j), \quad K_k^{(i,j)} = \prod_{m=i}^{j-1} (H_k^{(m)})^{-1} \quad (i \leq j) \quad (3.6)$$

$$M_k^{(j)} = \|S_k^{(1,0)} S_k^{(2,0)}\| K_k^{(0,j)}, \quad M_k^{(j)} = \|S_k^{(n)} S_k^{(2,n)}\| G_k^{(n-1)} K_k^{(n-1,j)}$$

$$K_k^{(1,0)} = K_k^{(0)}, \quad K_k^{(0,j)} = (K_k^{(j)})^{-1} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n-1)$$

где $M_k^{(j)}$ — блочные строки матрицы $M_k^{(j)}$ (срав. с (3.4)), причем $|M_k^{(j)}| = |M_k^{(0)}|$ (в силу того, что $|S_k^{(j)}| = |G_k^{(j)}| = 1$).

Достоинство представлений (3.6) — в свободе выбора основного искомого начального вектора (отсюда и название метода). Нетрудно видеть, что использование вместо $X_k^{(0)}$ вектора $X_k^{(j)}$, где $j = [(n+1)/2]$ ($[x]$ — целая часть x), равносильно с

точки зрения вычислений сокращению количества стрингеров на j при нечетном n и $(j-1)$ при четном n , если иметь в виду, что при вычислении определителя применяется процедура Гаусса, не требующая перемножения элементов этого определителя.

Метод плавающего начального вектора открывает более широкие возможности и при выполнении наиболее трудного этапа — нахождения векторов $X_k^{(j)}$, которыми определяется форма выпучивания панели. Действительно, здесь вместо неустойчивого счета по формуле (3.2) можно прибегнуть к независимому решению второй системы (3.6) для каждого j , что вызывает меньше трудностей, с последующим согласованием полученных результатов с помощью формулы (3.1).

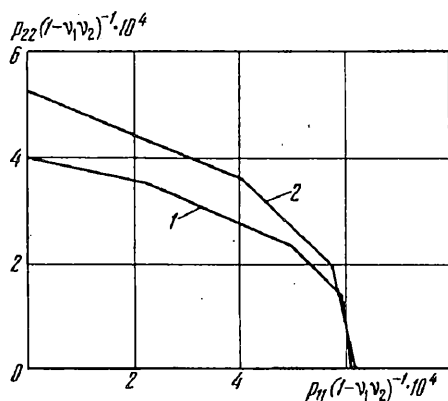
Метод усечения — приближенный асимптотический подход, предполагающий замену расчета исходной панели с мощным многострингерным набором серий расчетов панелей с меньшим, но нарастающим числом стрингеров. Каждая такая панель получается из исходной панели путем соответствующего усечения ее средней части. Тот факт, что мощный многострингерный набор практически исключает взаимное влияние приграничных стрингеров, позволяет утверждать, что с ростом числа стрингеров усеченной панели ее критическая нагрузка будет стремиться к критической нагрузке исходной панели. Метод усечения предназначен, прежде всего, для расчета панелей регулярной структуры.

Описанный выше алгоритм и улучшающие его приемы были положены в основу фортран-программы, рассчитанной на диалоговый режим работы на ЭВМ, при котором пользователь имеет возможность не только следить визуально за динамикой изменения погрешностей и величин с трудно предсказуемым поведением, но и вторгаться в нужный момент в процесс вычислений с целью его корректировки. Некоторые результаты вычислений, полученные с помощью этой программы, обсуждаются ниже.

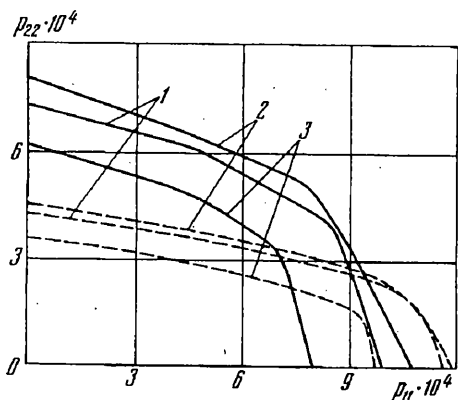
4. Примеры. В качестве первого примера рассмотрим панель регулярной структуры со свободно опертыми кромками (см. (1.9), (2.13)) и девятью внутренними стрингерами ($n=10$) с формой сечения в виде равностороннего уголка. Панель изготовлена из однородного изотропного материала и имеет упругогеометрические параметры $l_1=1$; $l^{(j)}=0,1333$; $h=0,005$; $e_2^{(j)+}=0,021$; $e_2^{(j)-}=0,0123$; $e_3^{(j)}=0,008167$; $B_\alpha=D_\alpha=1$; $\nu_\alpha=\mu_\alpha=0,3$; $B_0=D_0=0,35$; $g_0^{(j)}=0,3919$; $g_1^{(j)}=0,08739$; $g_2^{(j)}=4,468$; $g_3^{(j)}=4,208$; $g_{23}^{(j)}=-2,34$.

Наряду с этой панелью возьмем еще панель с ортотропной пластиной, отличающейся от первой панели лишь параметрами: $B_2=D_2=2$; $\nu_1=\mu_1=0,15$; $\nu_2=\mu_2=0,3$; $B_0=D_0=0,3673$. На фиг. 2 показаны границы областей устойчивости обеих панелей: ломанная 1 отвечает изотропной, а ломанная 2 — ортотропной пластине. В обоих случаях форма выпучивания панели имеет вдоль набора одну полуволну ($k_*=1$). При переходе через излом справа налево число узловых линий, параллельных набору, возрастает на 1. Как видно, повышение жесткости обшивки в направлении, перпендикулярном набору, увеличивает область устойчивости панели, причем заметный прирост критических значений параметров нагрузки наблюдается в условиях двухстороннего сжатия.

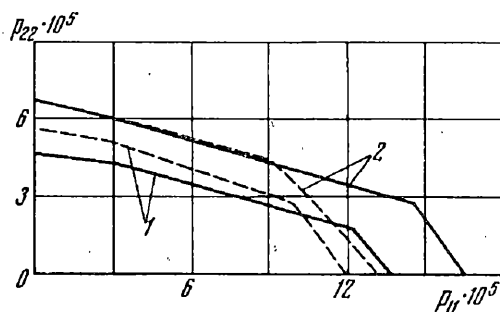
Во втором примере был проведен сравнительный расчет двух регулярных панелей, изготовленных из однородного изотропного материала, со свободно опертыми кромками и шестью внутренними стрингерами ($n=7$) в виде тонкостенных стержней несимметричного трапецевидного профиля. Панели отличались только толщиной пластины. Параметры панели с пластиной большей толщины равны: $l_1=1$; $l^{(j)}=0,13$; $h=0,006$; $e_2^{(j)+}=0,03667$; $e_2^{(j)}=0,03333$; $e_3^{(j)}=0,008373$; $B_\alpha=D_\alpha=1$; $\nu_\alpha=\mu_\alpha=0,3$; $B_0=D_0=0,35$; $g_0^{(j)}=2,234$; $g_1^{(j)}=0,1183$; $g_2^{(j)}=14,81$; $g_3^{(j)}=6,056$; $g_{23}^{(j)}=-1,286$. Для панели с вдвое меньшей толщиной пластины претерпевают изменение параметры $h=0,003$; $e_2^{(j)+}=0,03729$; $e_2^{(j)-}=0,03271$; $e_3^{(j)}=0,01051$; $g_0^{(j)}=13,5$; $g_1^{(j)}=0,1728$; $g_2^{(j)}=83,46$; $g_3^{(j)}=37,05$; $g_{23}^{(j)}=-8,367$, что, как видно сильно сказывается на соотношении жесткостных параметров пластины и стрингеров в сторону увеличения мощности последних. Границы областей устойчивости панелей представлены на фиг. 3 линиями 1 (сплошные линии отвечают панели с большей, а штриховые — с меньшей толщиной). О влиянии ширины стрингеров ($e_2^{(j)}=e_2^{(j)+}+e_2^{(j)-}$) на



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

области устойчивости панелей можно судить по линиям 2, 3, соответствующих $e_2^{(i)} = 0$. В случае границ 2 все другие параметры панелей оставались неизменными, что равносильно сокращению размера панелей вдоль оси x_2 за счет обнуления $e_2^{(i)+}$ и $e_2^{(i)-}$, а в случае границ 3 такое сокращение отсутствовало из-за соответствующего увеличения размеров $l^{(i)}$ пластинок на $e_2^{(i)+} + e_2^{(i+1)-}$. Во всех случаях для форм выпучивания панелей реализовывалась вдоль стрингеров одна полуволна ($k_* = 1$). Приведенные на фиг. 3 результаты показывают, что рост мощности стрингерного набора вызывает естественное повышение способности панели к восприятию сжатия вдоль стрингеров и не столь очевидное заметное снижение способности панели к восприятию поперечного (по отношению к стрингерам) сжатия. Одновременно с этим происходит сглаживание границ областей устойчивости и наблюдается более раннее с ростом поперечного сжатия появление новых узловых линий в форме выпучивания панели.

С целью иллюстрации метода усечения рассмотрим задачу устойчивости равномерно сжатой вдоль набора свободно опертой по всей границе регулярной панели, изготовленной из однородного изотропного материала, с заведомо мощными стрингерами, форма поперечных сечений которых имеет вид узкого, вытянутого по одну сторону нормали пластины, прямоугольника. Упругогеометрические параметры панели равны: $l_1 = 1$; $l^{(i)} = 0,2$; $h = 0,004167$; $e_2^{(i)+} = e_2^{(i)-} = 0$; $e_3^{(i)} = 0,04167$; $B_\alpha = D_\alpha = 1$; $\nu_\alpha = \mu_\alpha = 0,3$; $B_0 = D_0 = 0,35$; $g_0^{(i)} = 2,119$; $g_1^{(i)} = 0,2123$; $g_2^{(i)} = 1,51$; $g_3^{(i)} = 93,64$; $g_{23}^{(i)} = 0$. При расчете панели число внутренних стрингеров полагалось равным 1, 2, 3, 4 и 5 (далее вычисления становятся неустойчивыми). В итоге оказалось, что при одно- и двухстрингерном наборе критическое значение нагрузки p_{11} равно соответственно $1,894 \cdot 10^{-3}$ и $1,912 \cdot 10^{-3}$, а при числе стрингеров 3 и более — $1,913 \cdot 10^{-3}$. Другая особенность изучаемой панели состоит в том, что следующее собственное значение задачи устойчивости весьма близко к критической нагрузке: для одно- и двухстрингерной

панели оно равно $1,934 \cdot 10^{-3}$ и $1,914 \cdot 10^{-3}$, а начиная с трех стрингеров — $1,913 \cdot 10^{-3}$. Исследование форм выпучивания панели показало, что вдоль набора реализуется 6 полуволн ($k_* = 6$), а оба собственных значения связаны с местной потерей устойчивости крайних пластинок, которые при критической сжимающей нагрузке выпучиваются в разные стороны, если число внутренних стрингеров нечетно, и в одну сторону, если это число четно. Для второго собственного значения наблюдается обратная картина. Отметим еще, что критическая нагрузка изолированной крайней пластинки с защемленной кромкой, примыкавшей к стрингеру, и свободно опертыми другими кромками равна $1,936 \cdot 10^{-3}$, что отличается от найденной критической нагрузки многострингерной панели на 1,2%.

В заключение приведем результаты решения одной частной оптимизационной задачи. В качестве объекта оптимизации была взята регулярная панель, изготовленная из однородного изотропного материала, с девятью ($n = 10$) внутренними стрингерами той же формы, что и в предыдущем примере. Параметры эталонной панели равны $l_1 = 1$; $l^{(i)} = 0,1$; $h = 0,002$; $e_2^{(i)+} = e_2^{(i)-} = 0,002$; $e_3^{(i)} = 0,0065$; $B_\alpha = D_\alpha = 1$; $\nu_\alpha = \mu_\alpha = 0,3$; $B_0 = D_0 = 0,35$; $g_0^{(i)} = 0,1371$; $g^{(i)} = 0,0273$; $g_2^{(i)} = 0,1092$; $g_3^{(i)} = 1,536$; $g_{23}^{(i)} = 0$. Цель оптимизационной задачи состояла в отыскании панели с переменным шагом стрингеров симметричной структуры ($l^{(i)} = l^{(9-i)}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$), имеющей максимальное критическое значение нагрузки p_{11} . Результаты решения этой задачи, полученные с помощью стандартной процедуры оптимизации, представлены на фиг. 4, где показаны границы областей устойчивости панели регулярной (штриховые линии) и оптимальной (сплошные линии) структуры. Границы 1 отвечают свободно опертым (см. (2.13)), а границы 2 — защемленным (см. (2.14)) крайним кромкам панели, параллельным стрингерному набору. При первом варианте краевых условий оптимальная структура панели характеризуется величинами: $l^{(0)} = 0,2706$; $l^{(1)} = 0,0425$; $l^{(2)} = 0,0566$; $l^{(3)} = 0,0642$; $l^{(4)} = 0,0661$, а эффект оптимизации (повышение критического значения нагрузки p_{11} в условиях одноосного сжатия) составляет около 15%. Для второго варианта краевых условий эти величины соответственно равны: $l^{(0)} = 0,3369$; $l^{(1)} = 0,0333$; $l^{(2)} = 0,0399$; $l^{(3)} = 0,0441$; $l^{(4)} = 0,0458$ и 24%. Как видно, в обоих случаях в средней части оптимальной панели прослеживается тенденция к регулярной структуре с меньшим по сравнению с эталонной панелью шагом стрингеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гребень Е. С. Основные соотношения технической теории ребристых оболочек // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 3. С. 124—130.
2. Жилин П. А. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами // Инж. ж. МТТ. 1966. № 5. С. 139—142.
3. Жилин П. А. Линейная теория ребристых оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 4. С. 150—163.
4. Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. М.: Машиностроение, 1973. 659 с.
5. Методы расчета оболочек. Т. 2. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Теория ребристых оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 367 с.
6. Михайлов Б. К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами. Л.: Изд-е ЛГУ, 1980. 196 с.
7. Рыбаков Л. С. Упругий изгиб подкрепленной прямоугольной пластины // Прикладные методы расчета авиационных конструкций. М.: Изд-е МАИ, 1986. С. 46—50.
8. Рыбаков Л. С. Осесимметричное упругое деформирование подкрепленной шпангоутами круговой цилиндрической оболочки // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 132—140.
9. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
10. Королев В. И. Упругопластические деформации оболочек. М.: Машиностроение, 1971. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.1.1992