

УДК 539.3

© 1994 г. С. В. ЕРМАКОВ

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОМПЕНСИРУЮЩИХ НАГРУЗОК ДЛЯ РАСЧЕТА СОПРЯЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Метод компенсирующих нагрузок, предложенный в [1, 2] для задач изгиба пластин, распространяется на задачи расчета круговых цилиндрических оболочек<sup>1</sup>. Для этого разработана удобная для численной реализации процедура определения внеинтегральных членов при вычислении сингулярных интегралов. Развивается предложенный в [1] метод интегрирования по частям интегралов, содержащих неинтегрируемую особенность  $1/r^2$ . Выведены все выражения для особенностей в ядрах, требуемые при численной реализации метода [3]. Используется вариант уравнений состояния Л. И. Балабуха — В. В. Новожилова [4]. Фундаментальное решение для бесконечно длинной цилиндрической оболочки берется в виде тригонометрического ряда по окружной координате [5] с выделением главного значения [6].

Эффективность разработанного алгоритма по сравнению с использованием метода конечных элементов показана на примерах расчета трубчатых соединений для Т-узла, Х-узла и пространственного ХХ-узла. Проведено сравнение с известными результатами [7], а также с результатами, полученными при помощи конечно-элементного пакета COSMOS/M<sup>2</sup>.

1. Используемые уравнения теории оболочек. Система уравнений равновесия круговой цилиндрической оболочки имеет вид [4, 5]:

$$LU + R^2 B^{-1} q^* = 0, \quad B = Eh/(1 - \nu^2) \quad (1.1)$$

$U = (u_1, u_2, u_3)$  — вектор перемещений;  $h$  — толщина стенки оболочки;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $L = \{L_{ij}\}$  — симметричная матрица дифференциальных операторов по  $\xi, \varphi$  — продольной и окружной координатам, отнесенным к радиусу  $R$ ;  $q^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*)$  — вектор поверхностных усилий. Для краткости введем обозначения  $a^2 = h^2/(12R^2)$ ,  $\lambda = 1 + 4a^2$ ,  $\lambda_1 = 1 + \nu$ ,  $\lambda_2 = 1 - \nu$ ,  $\lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2$ ,  $\lambda_4 = 3 - \nu$ ,  $\lambda_5 = 3 + \nu$ ,  $\lambda_6 = 2 - \nu$ .

Следуя [4], представим частное решение (1.1) в виде

$$U(\xi, \varphi) = -2\lambda_1 R^2 (Eh\lambda)^{-1} \iint \Phi(\xi - \xi_1, \varphi - \varphi_1) q^*(\xi_1, \varphi_1) d\xi_1 d\varphi_1 \quad (1.2)$$

где  $a^{-2}$  — матрица алгебраических дополнений к матрице  $L$ ,  $\Phi$  — фундаментальное решение для цилиндрической оболочки, удовлетворяющее уравнению ( $\delta(\dots)$  — дельта-функция):

$$D^* \Phi(\xi, \varphi) = \delta(\xi) \delta(\varphi), \quad D^* = 2a^{-2} \lambda_2^{-1} D, \quad D = \det L \quad (1.3)$$

Выражения для компонент  $l_{13}, l_{23}, l_{33}$  приведены в [4], для  $l_{12}, l_{22}$  — в [5]. Для  $l_{11}$  при обращении  $L$  получаем выражение

$$l_{11} = \frac{\lambda_2 \lambda}{2a^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2\lambda_6 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + \frac{\lambda \lambda_2}{2} \frac{\partial^6}{\partial \xi^6} +$$

<sup>1</sup> Некоторая часть результатов изложена в докл. С. В. Ермаков «Применение метода потенциала к расчету напряженно-деформированного состояния пространственных трубчатых узловых соединений». Тез. докл. Междунар. конф. «Сварные конструкции», Киев, 24—28.9.1990 г., стр. 109.

<sup>2</sup> COSMOS/M. Version 1.61. July 1990. Copyright (C) 1987—1990 Structural Research and Analysis Corporation (SRAC).

$$+ (\lambda + a^2 \lambda_3) \frac{\partial^6}{\partial \xi^4 \partial \varphi^2} + \frac{5 - \nu}{2} \frac{\partial^6}{\partial \xi^2 \partial \varphi^4} + \frac{\partial^6}{\partial \varphi^6}$$

Для произвольной компоненты  $\chi$  напряженно-деформированного состояния (НДС) из (1.2) получаем

$$\chi(\xi, \varphi) = c_\chi \iint l_\chi \Phi(\xi - \xi_1, \varphi - \varphi_1) q^*(\xi_1, \varphi_1) d\xi_1 d\varphi_1 \quad (1.4)$$

где константа  $c_\chi$  и вектор-строка дифференциальных операторов  $l_\chi$  определяются уравнениями состояния (принят вариант Л. И. Балабуха и В. В. Новожилова [4]) и соотношениями между деформациями и перемещениями [5]. Если вектор нагрузки считать пятимерным, добавив два изгибающих момента ( $m_1$  — в продольном и  $m_2$  — в поперечном направлениях), то соотношение (1.4) остается справедливым, причем [8]:

$$l_{\chi 4} = R^{-1} \partial l_{\chi 3} / \partial \xi_1, \quad l_{\chi 5} = R^{-1} (\partial l_{\chi 3} / \partial \varphi_1 - l_{\chi 2}) \quad (1.5)$$

2. Фундаментальное решение. Фундаментальное решение для тонкой изотропной круговой цилиндрической оболочки представим в виде ряда Фурье

$$\Phi(\xi, \varphi) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \Phi_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\xi) \cos n\varphi \right] \quad (2.1)$$

Выражения для  $\Phi_0, \Phi_1$  и их производных по  $\xi$  приведены в [5], причем  $\Phi_1$  принимается равным  $\Phi_0$ . В задачах расчета сопряжения оболочек смещения точек одной или нескольких оболочек, вообще говоря, содержат составляющие, соответствующие перемещениям этих оболочек как жесткого целого и вызванные деформированием других оболочек. Если компонента этих перемещений в направлении, перпендикулярном оси оболочки, не равна нулю и отношение радиуса к толщине стенки оболочки достаточно мало (порядка 12—30), то, как показали численные расчеты, погрешность вычисления компонент НДС, связанная только с предположением  $\Phi_1 = \Phi_0$ , может достигать значительной величины. Более точное выражение имеет следующий вид:

$$\Phi_1 = (\xi^3 + c_2 \xi) / (12c_1 \lambda) - \exp(-|\xi| x) (c_3 \cos \xi y + c_4 \sin |\xi| y) / (2^{3/2} c_1^{7/4} \lambda) \quad (2.2)$$

$$x = 2^{-1/2} (c_1^{1/2} - c_5)^{1/2}, \quad y = 2^{-1/2} (c_1^{1/2} + c_5)^{1/2}$$

$$c_1 = \lambda_3 \lambda^{-2} [1 - 2a^2 (1 - a^2/2) \lambda^{-1}], \quad c_2 = 12c_6 c_1^{-1/2}, \quad c_3 = 1 - 2c_6 + 4c_6^2$$

$$c_4 = [(1 + c_6)/(1 - c_6)]^{1/2} (1 + 2c_6 - 4c_6^2), \quad c_5 = 2(1 + a^2)/\lambda, \quad c_6 = c_5 c_1^{-1/2}$$

Для  $\Phi_n$  при  $n \geq 2$  имеем выражения [4]:

$$\Phi_n(\xi) = \frac{1}{4n^7} \sum_{j=1}^2 r_j^{-1} \exp(-y_j n |\xi|) \sin(x_j n |\xi| + \psi_j) \quad (2.3)$$

где  $r_j, \psi_j$  выражаются через  $x_j, y_j$  — действительные и мнимые части комплексных корней характеристического уравнения, соответствующего обыкновенному дифференциальному уравнению, получающемуся подстановкой (2.1) в (1.3). Как показано в [9], использование вместо  $D^*$  приближенного оператора, полученного отбрасыванием в  $D^*$  некоторых слагаемых, содержащих множитель  $a^2$ , приводит к необходимости, начиная с некоторого  $n \geq Rh^{-1} (6\lambda_3)^{1/2}$ , вычислять коэффициенты  $\Phi_n$  по другим, более громоздким формулам, что неоправданно усложняет численную реализацию задачи.

Будем выделять главное значение  $\Phi^0(\xi, \varphi)$  [5, 6]:

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} \Phi(\xi, \varphi) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} \Phi_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \Phi_n(\xi) - \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \Phi_n^0(\xi) \right] \frac{\partial^m}{\partial \varphi^m} \cos n\varphi + C_{km} \right\} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \Phi_n^0(\xi) = \frac{\exp(-n|\xi|)}{96n^{7-k}} \sum_{\beta=0}^3 n^\beta |\xi|^\beta A_{\beta k} \quad (0 \leq k \leq 8) \quad (2.5)$$

$$C_{km} = \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} \Phi^0(\xi, \varphi) = \frac{(\text{sign } \xi)^k}{96n} \sum_{\beta=0}^3 A_{\beta k} |\xi|^\beta S_{km\beta}(\xi, \varphi) \quad (0 \leq k, m \leq 8, 2 \leq k+m \leq 8) \quad (2.6)$$

$$S_{km\beta} = \begin{cases} (-1)^{m/2} C_{k+m+\beta-7}, & m - \text{четное,} \\ (-1)^{(m+1)/2} S_{k+m+\beta-7}, & m - \text{нечетное,} \end{cases} \quad \begin{cases} S_p \\ S_p \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \exp(-n|\xi|) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \quad (2.7)$$

Значения  $A_{\beta k}$  приводятся в таблице

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\beta = 0$	15	0	-3	0	3	0	-15	48	-105
$\beta = 1$	15	-3	-3	3	3	-15	33	-57	87
$\beta = 2$	6	-3	0	3	-6	9	-12	15	-18
$\beta = 3$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

Выражения для  $C_p, S_p$  при  $p = -1, 0, 1, 2$  приведены в [5], для  $p = 3, 4$  выражения для  $C_p, S_p$  получаем из соотношений

$$S_{p+1} = -\partial S_p / \partial \xi = -\partial C_p / \partial \varphi, \quad C_{p+1} = \partial S_p / \partial \varphi = -\partial C_p / \partial \xi \quad (2.8)$$

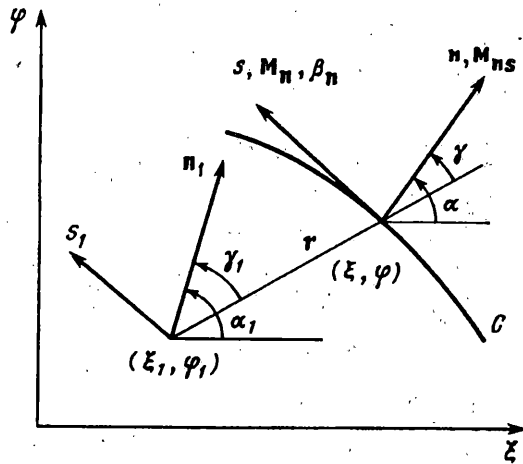
При  $p = -5, -4, -3, -2$   $C_p, S_p$  целесообразно вычислять, суммируя ряды (2.7) (практически достаточно удержать 50—100 членов ряда).

Численные расчеты по суммированию рядов (2.4) показали: целесообразно выделение главной части при вычислении всех производных ( $2 \leq k+m \leq 8$ ); при вычислении производных от  $\Phi$  нечетного порядка по  $\xi$  при  $|\xi| \ll 1$  и достаточно больших  $|\varphi|$  ряды в (2.4) плохо сходятся, что привело к необходимости при  $|\xi| < \xi^*, |\varphi| > \varphi^*$  использовать линеаризацию

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} \Phi(\xi, \varphi) \approx (|\xi|/\xi^*) \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} \Phi(\xi, \varphi) \Big|_{|\xi|=\xi^*}$$

(например, для  $R/h = 30, \nu = 0,3$  принято  $\xi^* = 0,01, \varphi^* = 0,1$ ).

**3. Метод компенсирующих нагрузок.** Будем предполагать, что границы оболочек и линии сопряжения, если они имеются, — гладкие кривые. Схема метода фактически повторяет схему для случая изгиба пластин [1, 2]. Компенсирующие нагрузки прикладываются к бесконечно длинной оболочке по контуру  $C$ , который состоит из границы области реальной оболочки и линий сопряжения с другими оболочками. Выражение для произвольной компоненты НДС  $\chi$  состоит из частного решения  $\chi_p$  при заданных поверхностных нагрузках и соответствующего (1.4) контурного интеграла для вектора плотности компенсирующих нагрузок  $q(s) = (q_1, q_2, q_3, m_n)$ , приложенных по контуру  $C$  ( $m_n = \tau_1 m_1 + \tau_2 m_2$  — изгибающий момент, ось которого совпадает с касательной к контуру: соответственно, компоненты  $l_{\alpha i}$  вектора  $l_\alpha$  имеют вид  $\tau_1 l_{\alpha 4} + \tau_2 l_{\alpha 5}$ , где  $\tau_1 = \cos \alpha, \tau_2 = \sin \alpha$  — направляющие косинусы нормали  $n$  к контуру  $C$  в плоскости развертки оболочек на фиг. 1:



Фиг. 1

$$\chi(\xi_1, \varphi_1) = \chi_p + \int_C G_\chi(\xi - \xi_1, \varphi - \varphi_1) q(s) ds \quad (3.1)$$

На граничных контурах реальной оболочки должны выполняться кинематические или статические граничные условия

$$u_1 = u_1^0 \quad \text{или} \quad F_1 \equiv T_1 \tau_1 + S \tau_2 = F_1^0 \quad (3.2)$$

$$u_2 = u_2^0 \quad \text{или} \quad F_2 \equiv (S + 2H/R) \tau_1 + T_2 \tau_2 = F_2^0$$

$$u_3 = u_3^0 \quad \text{или} \quad Q_n^k \equiv Q_n + \partial M_{ns} / \partial s = Q_n^{k0}$$

$$\beta_n \equiv \beta_1 \tau_1 + \beta_2 \tau_2 = \beta_n^0 \quad \text{или} \quad M_n \equiv M_1 \tau_1^2 + 2H \tau_1 \tau_2 + M_2 \tau_2^2 = M_n^0$$

где  $\beta_n, M_n$  — угол поворота и изгибающий момент в плоскости, перпендикулярной к касательной к контуру;  $\beta_1, \beta_2$  — углы поворота;  $T_1, T_2, S$  — мембранные усилия;  $M_1, M_2, H$  — моменты;  $Q_n = Q_1 \tau_1 + Q_2 \tau_2$ ;  $Q_1, Q_2$  — перерезывающие силы;  $M_{ns} = \tau_1 \tau_2 (M_2 - M_1) + (\tau_1^2 - \tau_2^2) H$ ; величины с индексом  $^0$  — заданные значения. В случае жесткого контакта оболочек на линиях сопряжения должны выполняться все восемь условий (3.2), причем, величины в левых и правых частях равенств, соответствующие контактирующим оболочкам, приведены к одной системе координат.

Интегральные уравнения относительно вектора  $q$  получены подстановкой (3.1) в условия (3.2). Решение интегральных уравнений может быть выполнено различными методами [3, 5], при этом необходимо выделить в ядрах  $G$  особенности  $\ln r, 1/r$  и  $1/r^2$ , где  $r^2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\varphi - \varphi_1)^2$ . Так, например, для компонент  $\chi$ , имеющих в ядре  $G_\chi$  седьмые производные от  $\Phi$ , при стремлении точки  $(\xi_1, \varphi_1)$  к точке  $(\xi, \varphi)$  контура  $C$ , выделяя внеинтегральный член  $v_\chi q$ , получаем в пределе интегральное уравнение второго рода

$$\chi^0(s_0) = \chi_p(s_0) + \nabla_\chi q(s_0) + \text{v.p.} \int_C G_\chi(\xi - \xi_1, \varphi - \varphi_1) q(s) ds \quad (3.3)$$

где значение  $s_0$  параметра  $s$  на контуре соответствует точке  $(\xi, \varphi)$ , а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

4. Особенности  $\ln r, 1/r$ . Асимптотика величин  $C_p, S_p$  имеет вид

$$C_p \sim C_p^* = \text{Re } Z_p, S_p \sim S_p^* = \text{Im } Z_p, Z_p = \frac{\partial^p}{\partial (-z)^p} \frac{1}{z}, z = \xi - i\varphi \quad (4.1)$$

$$C_{-1}^* = -\ln r, C_0^* = \xi r^{-2}, S_0^* = \varphi r^{-2}, C_1^* = (\xi^2 - \varphi^2)/r^4, S_1^* = 2\xi\varphi r^{-4} \quad (4.2)$$

Аналогично для  $p = 2, 3, 4$ . Подставляя (4.2) в (2.6), имеем выражения для асимптотики  $C_{km}^*$  производных  $C_{km}$ . Для шестых производных имеем:

$$C_{51}^*, C_{33}^*, C_{15}^* < \infty; \quad C_{60}^* = C_{06}^* = (5/32) \ln r, \quad C_{42}^* = C_{24}^* = (1/32) \ln r \quad (4.3)$$

Вводя обозначения  $\mu = -2\lambda_1/(Eh\pi\lambda)$ ,  $\eta = 1/(32\pi R\lambda)$ , для

$$\chi = u_1, u_2, u_3, \beta_1, \beta_2, T_1, T_2, S, M_1, M_2, H, Q_1, Q_2, Q_n^k \quad (4.4)$$

выпишем ненулевые коэффициенты при  $\ln r$  ядер  $G_{ij}$  ( $j = 1, 2, 3, n$ ):

$$j = 1: \quad u_1 \sim \mu [\lambda_4/8 + a^2\lambda_2(11 + \nu)/32], \quad \beta_1 \sim -\mu\lambda_1\lambda_4/(64R)$$

$$Q_1 \sim 2\eta(1 - 3\nu - 11a^2\nu)$$

$$Q_n^k - Q_n \sim -\eta\lambda_2 \{ \Phi_2\theta_2\nu [2 + a^2(11 - 9\nu)/\lambda_2] - \Phi_1\theta_1 [\lambda_2 + 2a^2\nu^2/\lambda_2] \}$$

$$j = 2: \quad u_2 \sim \mu\lambda_4/8, \quad \beta_2 \sim -\mu(11 + 2\lambda_6)/(6 + R), \quad Q_2 \sim -2\eta(5 + \nu)$$

$$Q_n^k = Q_n \sim \eta\lambda_2(2\theta_1\Phi_2 - \lambda_5\theta_2\Phi_1)$$

$$j = 3: \quad T_1 \sim \eta(3 - 8\nu + \nu^2), \quad T_2 \sim -\eta(13 - \nu^2)$$

$$M_1 \sim [\lambda_1 + a^2(25 - \nu^2)/8]/(4\pi\lambda), \quad M_2 \sim [\lambda_1 + \nu a^2(11 - \nu)/4]/(4\pi\lambda)$$

$$j = n: \quad u_1 \sim \tau_1\beta_1|_{j=1}, \quad u_2 \sim \tau_2\beta_2|_{j=2} - \varepsilon u_2|_{j=2}$$

$$\beta_1 \sim \tau_1 R^{-2}\mu [\lambda_2/(8a^2) + (25\lambda_2 + 2\nu^2)/64]$$

$$\beta_2 \sim \tau_2 R^{-2}\mu [\lambda_2 a^{-2} + (11 - \nu)/8]/8 - \varepsilon\beta_2|_{j=2}$$

$$Q_1 \sim \tau_1\eta\lambda_5/R, \quad Q_2 \sim \tau_2\eta(20 + \nu - \nu^2)/R - \varepsilon Q_2|_{j=2}$$

$$Q_n^k - Q_n = \partial^2 M_{n_1 s_1} / \partial n \partial s_1 \sim -\lambda_2 \eta R^{-1} \{ \tau_1 \lambda_5 (\Phi_2 \theta_2 / 2 - \Phi_1 \theta_1) +$$

$$+ \tau_2 [\Phi_2 \theta_1 (7 + \nu) / 2 + \Phi_1 \theta_2 \lambda_5] \} - \varepsilon (Q_n^k - Q_n)|_{j=2} \quad (4.5)$$

$$\theta \equiv \cos \alpha_1, \quad \theta_2 \equiv \sin \alpha_1, \quad \Phi_1 \equiv \cos 2\alpha_1, \quad \Phi_2 \equiv \sin 2\alpha_1, \quad \varepsilon \equiv \tau_2/R$$

Вводя обозначения  $\mu = a^2\lambda^{-1}$ ,  $\eta = 1/(R\lambda)$ , выпишем выражения для компонент НДС (4.6), оставляя только седьмые производные

$$j = 1: \quad T_1 \sim -\eta [\lambda C_{70} + (4 + \nu + 2a^2\lambda_1) C_{52} + (5 + 2\nu) C_{34} + (2 + \nu) C_{16}]$$

$$T_2 \sim -\eta [\nu\lambda C_{70} - (1 - 2\nu - 2\nu a^2\lambda_1) C_{52} - \lambda_6 C_{34} - C_{16}]$$

$$S \sim -\eta [(-\nu + 2a^2\lambda_2) C_{61} + (1 - 2\nu + a^2\lambda_3) C_{43} + \lambda_6 C_{25} + C_{07}]$$

$$M_1 \sim -\lambda_1\mu(2C_{52} + \lambda_1 C_{34}), \quad M_2 \sim \lambda_3\mu C_{52}, \quad H \sim \lambda_1\mu(C_{61} + \nu C_{43})$$

$$j = 2: \quad T_1 \sim \eta [C_{61} + \lambda_6 C_{43} + (1 - 2\nu) C_{25} - \nu C_{07}]$$

$$T_2 \sim -\eta [(2 + \nu) C_{61} + (5 + 2\nu) C_{43} + (4 + \nu) C_{25} + C_{07}]$$

$$S \sim -\eta [C_{70} + \lambda_6 C_{52} + (1 - 2\nu) C_{34} - \nu C_{16}]$$

$$M_1 \sim \mu(4C_{61} + 4C_{43} + \lambda_3 C_{25}), \quad M_2 \sim -2\mu\lambda_2(C_{61} + \lambda_2 C_{43})$$

$$H \sim -\mu(2C_{70} + \lambda_1 C_{52} + \nu\lambda_2 C_{34})$$

$$j = 3: \quad Q_1 \sim \eta(\lambda C_{70} + d_1 C_{52} + d_2 C_{34} + C_{16}), \quad Q_2 \sim \eta(d_3 C_{61} + d_4 C_{43} + 3C_{25} + C_{07})$$

$$Q_n^k - Q_n \sim \eta \lambda_2' [\theta_1 \theta_2 (\theta_2 \rho_1 - \theta_1 \rho_2) - \varphi_1 (\theta_2 \rho_3 - \theta_1 \rho_4)]$$

$$j = n: T_1 \sim \eta (\lambda_6 t_1 + \lambda_2^2 t_2 - \nu t_3) / R - \varepsilon T_1|_{j=2} \quad (4.6)$$

$$T_2 \sim -\eta [(4 - \nu^2) t_1 + 4t_2 + t_3] / R - \varepsilon T_2|_{j=2}$$

$$S \sim -\eta (\lambda_6 t_4 + \lambda_2^2 t_5 - \nu t_6) / R - \varepsilon S|_{j=2}$$

$$M_1 \sim \eta [\lambda t_0 + (\lambda + \lambda_1) t_1 + (1 + 2\nu + a^2 \lambda_3) t_2 + \nu t_3] - \varepsilon M_1|_{j=2}$$

$$M_2 \sim \eta [\nu \lambda t_0 + (1 + 2\nu + 2\nu a^2 \lambda_2) t_1 + (2 + \nu) t_2 + t_3] - \varepsilon M_2|_{j=2}$$

$$H \sim \eta \lambda_2 (d_7 t_4 + d_8 t_5 + t_6) - \varepsilon H|_{j=2}$$

$$\rho_1 = \lambda C_{70} + d_5 C_{52} - d_6 C_{34} - C_{16}, \quad \rho_2 = \lambda C_{61} + d_5 C_{43} - d_6 C_{25} - C_{07} \quad (4.7)$$

$$\rho_3 = d_7 C_{61} + d_8 C_{43} + C_{25}, \quad \rho_4 = d_7 C_{52} + d_8 C_{34} + C_{16}$$

$$d_1 = 3 + 2a^2 \lambda_6, \quad d_2 = 3 + a^2 \lambda_2, \quad d_3 = 1 + 2\nu a^2, \quad d_4 = 3 + \nu \lambda_2 a^2$$

$$d_5 = \lambda + 2\nu a^2 \lambda_1 / \lambda_2, \quad d_6 = 1 - a^2 \lambda_1, \quad d_7 = 1 - 2a^2 \nu / \lambda_2, \quad d_8 = 2 - \nu a^2$$

$$t_0 = \tau_1 C_{70} + \tau_2 C_{61}, \quad t_1 = \tau_1 C_{52} + \tau_2 C_{43}, \quad t_2 = \tau_1 C_{34} + \tau_2 C_{25}, \quad t_3 C_{16} + \tau_2 C_{07}$$

$$t_4 = \tau_1 C_{61} + \tau_2 C_{52}, \quad t_5 = \tau_1 C_{43} + \tau_2 C_{34}, \quad t_6 = \tau_1 C_{25} + \tau_2 C_{16}$$

Найдем вклад в  $u_{\lambda_j}$  от интегрирования  $C_p^*$ ,  $S_p^*$  в окрестности  $s_0$  по прямолинейному отрезку касательной к контуру  $C$  в точке  $s_0$ :

$$\int S_0^* ds \sim I_1, \quad \int C_0^* ds \sim I_2, \quad \int \xi S_1^* ds \sim 2I_3, \quad \int \xi C_1^* ds \sim I_2 - 2I_4$$

$$\int \xi^2 S_2^* ds \sim 6I_3 - 8I_5, \quad \int \xi^2 C_2^* ds \sim 2I_2 - 2I_4 - 8I_6 \quad (4.8)$$

$$\int \xi^3 S_3^* ds \sim 24(I_3 - I_5 - 2I_7), \quad \int \xi^3 C_3^* ds \sim 6(I_2 - I_4 - 8I_6 + 8I_8)$$

$$I_1 = \int \varphi r^{-2} ds = \pi \tau_2, \quad I_2 = \int \xi r^{-2} ds = \pi \tau_1$$

$$I_3 = \int \varphi \xi^2 r^{-4} ds = (\pi/2) \tau_2 (\tau_2^2 - \tau_1^2), \quad I_4 = \int \xi \varphi^2 r^{-4} ds = (\pi/2) \tau_1 (\tau_1^2 - \tau_2^2)$$

$$I_5 = \int \xi^2 \varphi^3 r^{-6} ds = (\pi/8) \tau_2 (-3\tau_1^4 + 6\tau_1^2 \tau_2^2 + \tau_2^4)$$

$$I_6 = \int \xi^3 \varphi^2 r^{-6} ds = (\pi/8) \tau_1 (\tau_1^4 + 6\tau_1^2 \tau_2^2 - 3\tau_2^4)$$

$$I_7 = \int \xi^4 \varphi^3 r^{-8} ds = -(\pi/16) \tau_2 (\tau_1^6 + 9\tau_1^4 \tau_2^2 - 9\tau_1^2 \tau_2^4 - \tau_2^6)$$

$$I_8 = \int \xi^3 \varphi^4 r^{-8} ds = -\tau_1 I_7 / \tau_2 \quad (4.9)$$

Подставляя (4.9) в (4.8), затем — в (2.6) и (4.6), получаем все ненулевые значения коэффициентов  $u_{\lambda_j}$ . Например, при  $\tau_1 = \pm 1$ ,  $\tau_2 = 0$ :  $v_{T_1} = -\tau_1/2$ ,  $v_{T_2} = -\nu \tau_1/2$ ,  $v_{S_2} = -\tau_1/(2\lambda)$ ,  $v_{H_2} = -a^2 R \tau_1 / \lambda$ ,  $v_{Q_{13}} = v_{Q_{13}^k} = \tau_1/2$ ,  $v_{M_{14}} = \tau_1/2$ ,  $v_{M_{24}} = \nu \tau_1/2$ .

5. Особый интеграл. В [1] в выражениях для перерезывающих сил ядра  $G$ , имеющие неинтегрируемую особенность  $1/r^2$ , представляются в виде  $\partial G^*/\partial s$ , где  $G^*$  имеет особенность  $1/r$ . Распространим этот метод на случай оболочек. Из (2.8) согласно фиг. 1 имеем (знак штрих обозначает производную по  $s$ ):

$$S_{p+1} = \tau_2 S_p' = \tau_1 C_p', \quad C_{p+1} = \tau_1 S_p' + \tau_2 C_p', \quad p \geq 0 \quad (5.1)$$

Учитывая, что  $\partial \xi / \partial s = -\tau_2$ , из (5.1) получаем

$$\xi S_2 = \tau_2 (\xi S_1)' - \tau_1 (\xi C_1)' - \tau_2 (b_2 S_0' + f_2 C_0') \quad (5.2)$$

$$\xi C_2 = \tau_1 (\xi S_1)' + \tau_2 (\xi C_1)' + \tau_2 (f_2 S_0' - b_2 C_0')$$

$$\xi^2 S_3 = \tau_2 (\xi^2 S_2)' - \tau_1 (\xi^2 C_2)' - 2\tau_2 [b_2 (\xi S_1)' + f_2 (\xi C_1)' + \tau_2 (f_3 S_0' - b_3 C_0')] ]$$

$$\xi^2 C_2 = \tau_1 (\xi^2 S_2)' + \tau_2 (\xi^2 C_2)' + 2\tau_2 [f_2 (\xi S_1)' - b_2 (\xi C_1)' - \tau_2 (b_3 S_0' + f_3 C_0')] ]$$

$$\xi^3 S_4 = \tau_2 (\xi^3 S_3)' - \tau_1 (\xi^3 C_3)' + 3\tau_2 \{-b_2 (\xi^2 S_2)' - f_2 (\xi^2 C_2)' +$$

$$+ 2\tau_2 [-f_3 (\xi S_1)' + b_3 (\xi C_1)' - \tau_2 (b_4 S_0' + f_4 C_0')]\}$$

$$\xi^3 C_4 = \tau_1 (\xi^3 S_3)' + \tau_2 (\xi^3 C_3)' + 3\tau_2 \{f_2 (\xi^2 S_2)' - b_2 (\xi^2 C_2)' +$$

$$+ 2\tau_2 [-b_3 (\xi S_1)' - f_3 (\xi C_1)' + \tau_2 (-f_4 S_0' + b_4 C_0')]\}$$

$b_m \equiv \cos(m\alpha)$ ,  $f_m \equiv \sin(m\alpha)$  ( $m = 2, 3, 4$ ). Формулы для  $C_p^*$ ,  $S_p^*$  — аналогичны.

Обозначая  $\eta = a^2/(R\lambda)$ , выпишем коэффициенты при  $1/r^2$  в ядрах  $G_{ij}$  для перерезывающих сил и  $j = 1, 2, n$ :

$$j = 1: Q_1 \sim -\eta\lambda_1 (C_{62} + C_{44}), Q_2 \sim \eta [\lambda_1 (C_{71} + C_{53}) + \lambda_2 C_{35}] \quad (5.3)$$

$$\partial M_{n_1 s_1} / \partial s_1 \sim -\eta\lambda_1 \{ \theta_1 \theta_1 [ \theta_2 (\lambda_4 C_{62} + \lambda_1 C_{44}) - \theta_1 (\lambda_4 C_{53} +$$

$$+ \lambda_1 C_{35}) ] + \varphi_1 [ \theta_2 (C_{71} + \nu C_{53}) - \theta_1 (C_{62} + \nu C_{44}) ] \}$$

$$j = 2: Q_1 \sim \eta (2C_{71} + \lambda_4 C_{53} + \lambda_2 C_{35}), Q_2 \sim -\eta (2C_{80} + \lambda_4 C_{62} + \lambda_2 C_{44})$$

$$\partial M_{n_1 s_1} / \partial s_1 \sim \eta \{ \theta_1 \theta_1 [ \theta_2 (2\lambda_4 C_{71} + 2d_9 C_{53} + \lambda_3 C_{35}) - \theta_1 (2\lambda_4 C_{62} + 2d_9 C_{44} + \lambda_3 +$$

$$+ C_{26}) ] + \varphi_1 [ \theta_2 (2C_{80} + \lambda_1 C_{62} + \nu\lambda_2 C_{44}) - \theta_1 (2C_{71} + \lambda_1 C_{53} + \nu\lambda_2 C_{35}) ] \},$$

$$d_9 = 3 - 2\nu + \nu^2$$

$$j = n: Q_1 \sim (\lambda \xi_0 + d_1 \xi_1 + d_2 \xi_2 + \xi_3) R^{-2} \lambda^{-1} - \varepsilon Q_1 |_{j=2}$$

$$Q_2 \sim (d_3 \xi_4 + d_4 \xi_5 + 3\xi_6 + \xi_7) R^{-2} \lambda^{-1} - \varepsilon Q_2 |_{j=2}$$

$$\partial^2 M_{n_1 s_1} / \partial n \partial s_1 \sim \lambda_2 R^{-2} \lambda^{-1} \{ \theta_1 \theta_2 [ \theta_2 (\lambda \xi_0 + d_5 \xi_1 - d_6 \xi_2 - \xi_3) - \theta_1 (\lambda \xi_4 + d_5 \xi_5 -$$

$$- d_6 \xi_6 - \xi_7) ] - \varphi_1 [ \theta_2 (d_7 \xi_4 + d_8 \xi_5 + \xi_6) - \theta_1 (d_7 \xi_1 + d_8 \xi_2 + \xi_3) ] \} -$$

$$- \varepsilon \partial M_{n_1 s_1} / \partial s_1 |_{j=2} \quad (5.4)$$

$$\xi_0 = \tau_1 C_{80} + \tau_2 C_{71}, \quad \xi_1 = \tau_1 C_{62} + \tau_2 C_{53}, \quad \xi_2 = \tau_1 C_{44} + \tau_2 C_{35}, \quad \xi_3 = \tau_1 C_{26} + \tau_2 C_{17}$$

$$\xi_4 = \tau_1 C_{71} + \tau_2 C_{62}, \quad \xi_5 = \tau_1 C_{53} + \tau_2 C_{44}, \quad \xi_6 = \tau_1 C_{35} + \tau_2 C_{26}, \quad \xi_7 = \tau_1 C_{17} + \tau_2 C_{08}$$

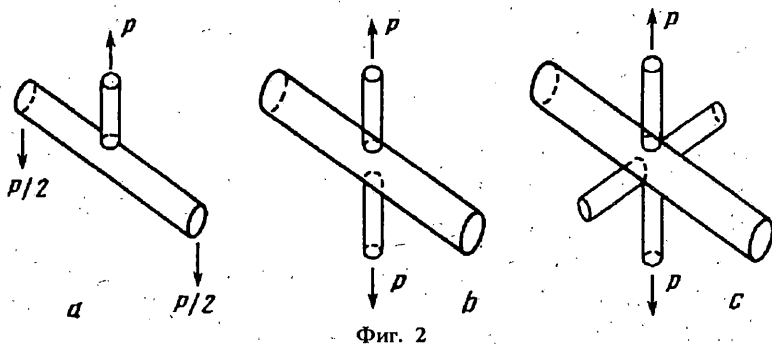
Подставляя (5.1), (5.2) в (2.6), а затем выражения для  $C_{km}$  в (5.3), (5.4), получаем представление для частей  $g/r^2$  ядер  $G_{ij}$ :

$$g/r^2 = \kappa(s) g_1/r + (g_2/r)' \quad (5.5)$$

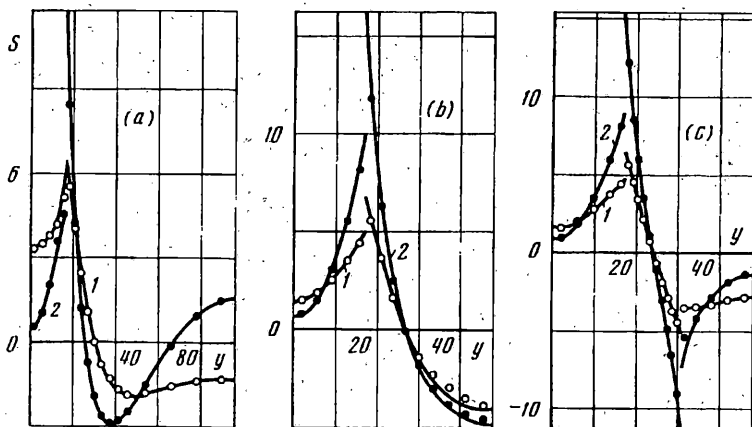
где  $\kappa(s) = \alpha'$  — кривизна контура  $C$ ;  $g_1, g_2$  — ограниченные функции.

В качестве иллюстрации рассмотрим ядро интеграла (3.2) в [2]. Переходя к размерным координатам и полагая  $a^2 = 0$ , получаем из (5.4) для ядра компоненты  $\chi = Q_{n1}^k$  следующее выражение:

$$G_{n1} \equiv \tau_1 Q_1 + \tau_2 Q_2 + \partial^2 M_{n_1 s_1} / \partial n \partial s_1 = B_1 g / (4\pi r^2), \quad B_1 = B h^2 / 12 \quad (5.6)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$g = -2 \cos \gamma_3 - \gamma_2 [\cos (2\gamma_1) \cos \gamma_3 - 2 \cos \gamma_1 \sin \gamma \sin 2\gamma_1], \quad \gamma_3 \equiv \gamma + \gamma_1$$

Выполняя указанные выше операции, опуская выкладки, получаем:

$$g_1 = -2\lambda_2 \cos (3\gamma_1 - 2\gamma) \tag{5.7}$$

$$g_2 = 2 \sin \gamma_1 + \lambda_2 [\sin (\gamma - \gamma_1) \cos (2\gamma_1 - \gamma) + \sin \gamma \cos (3\gamma_1 - \gamma)]$$

Заметим, что если  $C$  — окружность, то  $\int \cos (3\gamma_1 - 2\gamma) r^{-1} ds = 0$  для любой точки  $(\xi_1, \varphi_1)$ . Аналогичные выражения получены для оболочек.

6. Примеры. Значения неизвестного вектора  $q$  на контуре представлялись через значения  $q_k$  в узлах контура при помощи интерполяционных формул второго порядка. Для вычисления интегралов в смысле главного значения (3.3) и интегралов с ограниченными ядрами использовались симметричные квадратурные формулы Гаусса второго, четвертого или восьмого порядка в зависимости от расстояния до узловой точки контура. Для вычисления интегралов с логарифмической особенностью использовалась формула из [10]:  $-\int_{-1}^1 \ln |x| \times f(x) dx \approx f(-1/3) + f(1/3)$ . Система линейных уравнений относительно узловых значений вектора плотности  $q_k$  решалась методом Гаусса без выбора главного элемента.

Проведены расчеты НДС трубчатых соединений для Т-узла, Х-узла и пространственного ХХ-узла, показанных на фиг. 2 а, б, с. Параметры основной трубы (радиус 30, 48, толщина стенки 2,05, длина 485,97) и примыкающих раскосов (16,19; 1,27; 120) взяты из [7] (в см.), в которой вычислены значения продольной  $S_x$  и кольцевой  $S_y$  компонент напряжения на внешней поверхности



основной трубы в центральном поперечном сечении при  $x = 242,985$ ,  $\nu = 0,3$ . При расчетах методом компенсирующих нагрузок всего трубчатого соединения решения сравнивались для 8 и 16 узлов на каждом контуре; относительная разница в значениях напряжений не превышает 3%, время счета в мин. составляет соответственно (а) 1,7; 7,5, (б) 4; 17, (с) 8,5; 45; в ряде (2.1) удерживалось не более 30 членов.

Для обеспечения точности 3—6% при конечноэлементном расчете число узлов сетки, количество элементов, время счета для четвертой части Т-узла и восьмой части Х и ХХ узлов составляют: (а) 370, 320, 2,5 мин; (б) 302, 256, 2 мин; (с) 587, 512, 7 мин. На фиг. 3 показаны значения компонент  $S_x$  (кривые 1),  $S_y$  (кривые 2), в отношении к растягивающему напряжению в раскосе в местах приложения нагрузок. Сплошные линии соответствуют методу компенсирующих нагрузок (для Т-узла значения [7] совпадают со сплошной линией с точностью до построения графика), точками показаны значения в конечных элементах, полученные с помощью пакета COSMOS/M.

Таким образом, даже для оболочек, с отношением радиуса к толщине стенки не превышающим 15, предлагаемый алгоритм, наряду со значительным сокращением времени счета позволяет достаточно точно описывать краевые эффекты, для правильного отражения которых методом конечного элемента требуется существенное увеличение количества элементов.

Выражаю благодарность Расторгуеву О. Б. за помощь в проведении расчетов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулаков В. М., Толкачев В. М. Изгиб пластины произвольного очертания//Докл. АН СССР. 1976. Т. 230. № 1. С. 56—60.
2. Толкачев В. М. Метод компенсирующих нагрузок в теории изгиба пластин//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 155—160.
3. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
5. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
6. Даревский В. М. К вопросу о действии на цилиндрическую оболочку сосредоточенной нагрузки//Докл. АН СССР. 1950. Т. 75. № 1. С. 7—10.
7. Iida K., Asano K., Toyofuku M., Ishikawa K. A Proposal for Fatigue Design Procedure for Offshore Tubular Connections/Naval Architecture University of Tokyo. Doc. XIII—1020.—81. Doc. XV—497—81. Annual Meeting of Intern. Inst. of Welding. NAUT Report № 9031. 1981.
8. Немиров В. Г. О фундаментальных решениях в теории круговой цилиндрической оболочки//ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 1105—1111.
9. Ермаков С. В., Расторгуев О. Б. О фундаментальном решении для цилиндрической оболочки//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С. 190—191.
10. Лаценов К. В. О мультипликативном методе выделения особенностей в численном интегрировании//Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958. Т. 183, С. 151—177.