

УДК 539.375

© 1994 г. А. В. БАЛУЕВА, И. Н. ДАШЕВСКИЙ

## МОДЕЛЬ РОСТА ВНУТРЕННЕЙ ГАЗОНАПОЛНЕННОЙ ТРЕЩИНЫ В МАТЕРИАЛЕ

Настоящая публикация является продолжением работы [1], в которой был предложен численный метод решения задачи о кинетическом распространении трещин под действием поступающего в них газа. Численные результаты выявили установление стационарного режима роста трещин. В данной работе дается аналитическое доказательство выхода роста трещин на стационарный режим и приводится выражение для скорости роста. На основе этого доказательства приводится содержательная интерпретация полученных в [1] численных результатов.

**1. Постановка задачи.** Как известно, в отсутствие агрессивных сред трещиностойкость материала определяется единственной константой, так что если коэффициент интенсивности напряжений (КИН) ниже этой константы — трещина стоит, выше — движется в динамическом режиме. Для развития же трещин в присутствии агрессивных сред характерна плавная зависимость  $v(K)$ , называемая кинетической кривой, с порогом срагивания  $K_{sc}$  меньше статического коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  (кривая 1 на фиг. 1). Такое кинетическое подрастание трещин характерно, в частности, для металлов при наводороживании.

Для осесимметричного случая в предположении, что трещиностойкость является const и равна нижнему пороговому значению  $K_{sc}$  (кривая 2 на фиг. 1), модель роста внутренней трещины при диффузии в нее газа была разработана в [2]. Установлено, что в этом случае трещина растет сбалансированно (за счет постоянного увеличения объема трещины и сброса поэтому давления газа внутри нее) с постоянной скоростью

$$v_i = 3/4 \theta^2 D (1/K_{sc}^2) \quad (1.1)$$

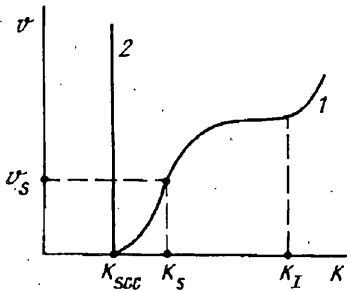
$$\theta^2 = c_0 R T E / (1 - \nu^2) \quad (1.2)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии,  $c_0$  — концентрация газа на бесконечности,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $T$  — температура газа,  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона среды.

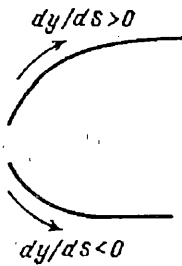
В [1] модель роста внутренней газонаполненной трещины развивается на случай трещины произвольной формы и учета полной кинетической кривой (кривая 1 на фиг. 1). Очевидно из графиков на фиг. 1, что неучет кинетической кривой приводит к завышению долговечности (в реальных ситуациях трещины растут с более медленной скоростью). Это подтвердили и результаты численных расчетов [1]. Представляет интерес сопоставление параметров долговечности при расчете с полной кинетической кривой и с одним критическим значением  $K_{sc}$  и выявление зависимости этого отклонения от внешних параметров: концентрации газа, вида кинетической кривой.

Напомним кратко математическую постановку задачи [1] и основные результаты методических расчетов.

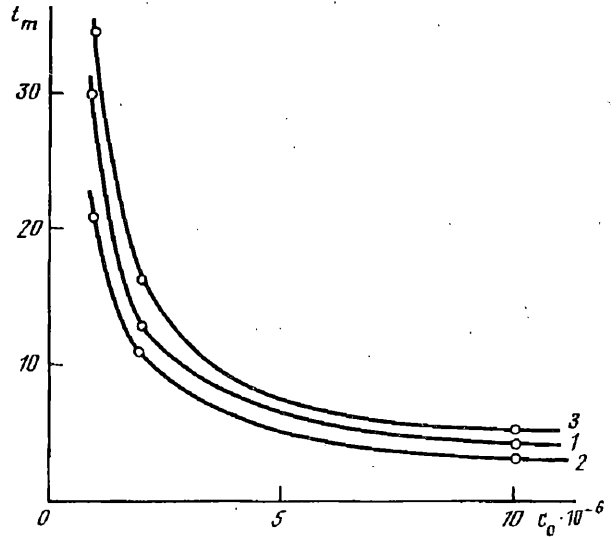
Пусть трещина занимает в безграничной упругой среде в плоскости  $z=0$  область  $G$ . В начальный момент времени  $t=0$  в теле вдали от трещины на



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

бесконечности появляется газ концентрации  $c_0$ , который стекает в трещину, моделируемую идеальным стоком. По мере накопления в трещине газа в ней создается давление, достаточное для начала ее роста.

Считается, что при распространении скорость  $v$  в каждой точке контура трещины определяется зависимостью  $v(K)$ , характерной для данного материала в присутствии газа (кривая 1 на фиг. 1).  $K$  — вообще говоря свой в каждой точке контура. Скорость роста трещины много меньше скорости установления равновесного распределения концентрации газа. Поэтому задача рассматривается в квазистационарной постановке. На каждом шаге по  $t$  решается следующая система уравнений:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \iint_{G(t)} \frac{q(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (1.3)$$

$$p(t) = -\frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \Delta_{x,y} \iint_{G(t)} \frac{u(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (1.4)$$

$$pV = nRT \quad (1.5)$$

$$V(t) = \iint_{G(t)} u(x, y) dx dy \quad (1.6)$$

$$Q = -D \iint_{G(t)} q(x, y) dx dy \quad (1.7)$$

$$n(t + \Delta t) = n(t) + Q\Delta t \quad (1.8)$$

$$u(\zeta, s, t) = \frac{4(1-\nu^2)}{E} K(s, t) \sqrt{\zeta} \quad (1.9)$$

$$v(s, t) = f(K(s, t)) \quad (1.10)$$

$$R(t + \Delta t, s) = R(t, s) + v(s, t) \Delta t \quad (1.11)$$

где  $G(t)$  — текущая область трещины,  $p(t)$  — давление газа,  $u(x, y)$  — раскрытие трещины и по ним находится объем трещины  $V$ ,  $q(x, y)$  — плотность диффузионного потока и по нему находится расход газа  $Q$ .

Последние три уравнения — вычисление КИН в точках контура  $s$ , скорости  $v(s)$  и новых точек контура [1].

Сначала рассчитывается период инкубации  $t_i$  — время, в течение которого в результате диффузии газа в трещину его давление достигает такой величины, что КИН в какой-либо точке контура становится равным критическому и трещина страгивается. В случае круговой трещины  $t_i = 2\pi^2 K_{cc}^2 a / (12\theta^2 D)$ , где  $a$  — начальный радиус трещины. Затем вычисляется время роста трещины  $t_m$  до определенного радиуса и площади.

Расчеты показывают, что любая трещина по мере ее роста выкругляется, а ее скорость стремится к const, независимой от ее начальной формы и размеров, как и наблюдалось в ряде экспериментов. Это означает выход на стационарный режим с постоянным КИН на контуре, когда увеличение радиуса трещины компенсируется сбросом давления газа. Для круговой трещины и при произвольной неубывающей кинетической кривой этот факт удастся доказать аналитически (а так как трещина произвольной формы в плане при равномерной нагрузке в конечном счете dorастает до круговой, то доказательство распространяется на случай любой трещины).

2. Доказательство выхода на стационарный режим. В случае круговой трещины диффузионное уравнение (1.3) (аналог интегрального уравнения в задаче о штампе) и уравнение для трещины нормального отрыва (1.4) имеют аналитические решения, по которым из уравнений (1.6), (1.7) интегрированием находим выражения для полного расхода газа  $Q = 4c_0 r D$  и для объема трещины  $V = cpr^3$ , где  $c = 16(1 - \nu^2)/3E$ . Тогда изменение количества молей газа в трещине можно записать в виде

$$dn = 4c_0 D r dt \quad (2.1)$$

Исходя из уравнения состояния идеального газа (1.5), эту величину можно записать  $dn = d(pV/(RT))$ ; или с учетом выражения для объема

$$dn = d(cp^2 r^3 / (RT)) \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) имеем  $d(cp^2 r^3 / (RT)) = 4c_0 D r dt$ . Откуда следует  $d(c'K^2 r^2 / (RT)) = 4c_0 D r dr / v$ , или

$$d(K^2 r^2) = \frac{4}{3} \theta^2 D dr^2 / v \quad (2.3)$$

где  $\theta$  определяется выражением (1.2). Перепишем (2.3) в виде

$$\frac{d(K^2 r^2)}{dr^2} = \frac{\alpha_0}{v}, \quad \alpha_0 = \frac{4}{3} \theta^2 D \quad (2.4)$$

Обозначим  $r^2 = x$ ,  $K^2 = y$ ,  $v(K) = v(\sqrt{y}) = \varphi(y)$ . Тогда (2.4) принимает вид

$$d(yx)/dx = \alpha_0 / \varphi(y)$$

где  $\varphi(y) = v(\sqrt{y}) = v(K)$  — монотонно возрастающая функция по  $y$ , а  $y = K^2 > 0$ .

*Лемма.* Пусть имеется функция  $y(x) > 0$  для любого  $x$  и она удовлетворяет уравнению

$$d(yx)/dx = \alpha_0 / \varphi(y) \quad (2.5)$$

где  $\varphi(y)$  — монотонно возрастает по  $y$ . Тогда  $y(x) \rightarrow \text{const}$  при  $x \rightarrow \infty$  ( $K(r) \rightarrow \text{const}$  при  $r \rightarrow \infty$ ).

*Доказательство.* 1. Докажем сначала, что  $y(x)$  — ограничена при  $x \rightarrow \infty$ . Предположим, что  $y(x)$  — не ограничена при  $x \rightarrow \infty$ . Тогда, так как  $\varphi(y)$  —

монотонно возрастает по  $y$ , то  $\alpha_0/\varphi(y) \rightarrow c_1$  при  $x \rightarrow \infty$ , где  $c_1$  — некоторая константа, откуда из (2.5) получим  $d(yx)/dx \rightarrow c_1$  при  $x \rightarrow \infty$ .

После интегрирования по  $x$  имеем  $yx \rightarrow c_1x + c_2$  при  $x \rightarrow \infty$  или  $y \rightarrow c_1 + c_2/x$  при  $x \rightarrow \infty$ , откуда  $y \rightarrow c_1$ . Пришли к противоречию. Значит  $y(x)$  ограничена при  $x \rightarrow \infty$ .

2. Докажем теперь, что  $y(x)$  — не осциллирующая при  $x \rightarrow \infty$ , и значит  $y(x) \rightarrow \text{const}$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Докажем для этого, что  $dy/dx \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Из (2.5) имеем.

$$dy/dx x + y = \alpha_0/\varphi(y) \quad (2.6)$$

Откуда следует

$$\frac{dy}{dx} = \left( \frac{\alpha_0}{\varphi(y)} - y \right) \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty$$

так как  $\alpha_0/\varphi(y)$  и  $y(x)$  ограничены при  $x \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $y \rightarrow \text{const}$  снизу, если  $\frac{\alpha_0}{\varphi(y)} - y > 0$ , и  $y \rightarrow \text{const}$  при  $x \rightarrow \infty$  сверху, если  $\frac{\alpha_0}{\varphi(y)} - y < 0$  (фиг. 2).

3. Зависимость долговечности от внешних параметров. Таким образом, по прошествии трещиной некоторого пути режим ее роста выйдет на стационарный с  $K = \text{const}$ , а значит с  $v = \text{const}$ . Это означает, что скорость увеличивается согласно кинетической кривой (кривая 2 на фиг. 1) до некоторой точки ( $K_s, v_s$ ) и в пределе по  $r$  остается на этом уровне. Рассмотрим, как связаны стационарные скорость  $v_s$  и коэффициент интенсивности напряжений  $K_s$  с параметрами задачи.

Пусть  $v = \text{const} = v_s$ , тогда перепишем уравнение (2.3) в виде

$$d(K_s^2 r^2) = d(4/3 \theta^2 D r^2 / v_s)$$

Откуда  $K_s$  и  $v_s(K)$  в стационарном режиме связаны соотношением

$$v_s(K) K_s^2 = 3/4 \theta^2 D, \quad \theta^2 = c_0 RTE / (1 - \nu^2) \quad (3.1)$$

Если скорость  $v$  и КИН связаны явным соотношением (как это имеет место для некоторых полимеров, ВТСП-керамик), например, в виде  $v = AK^\beta$ , то для скорости стационарного распространения имеем явное аналитическое выражение

$$v_s = (3/4 A^2 \theta^2 D)^{1/\beta}, \quad \kappa = (\beta + 2)/\beta \quad (3.2)$$

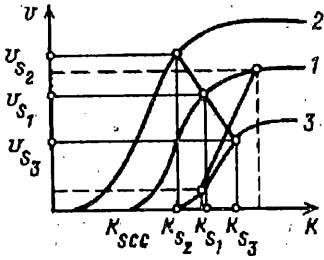
и для нижней оценки времени роста трещины от начального радиуса до радиуса  $r$  (не учитывающей времени достационарного роста с меньшей скоростью) можно записать выражение

$$t_m = (r - a)(3/4 A^2 \theta^2 D)^{\kappa}$$

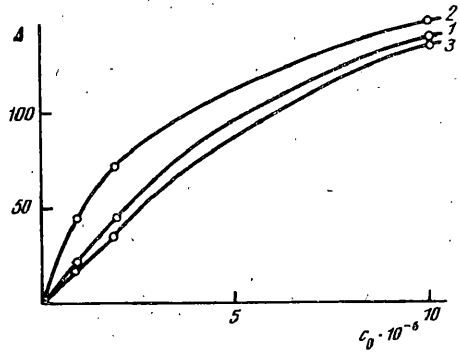
В [1] проведено численное исследование долговечности в зависимости от внешних параметров: вида кинетической кривой, начальных размеров и формы трещин, концентрации газа. Вопрос, как влияет на долговечность начальная форма (на примере роста равновеликих эллиптических трещин), достаточно подробно был освещен в [1]. Здесь же мы остановимся на объяснении зависимости от остальных параметров на примере роста круговых трещин. Как выявили численные расчеты, время роста трещин тем меньше, чем больше концентрация притекающего газа  $c_0$  (см. фиг. 3) и чем левее кинетическая кривая (на фиг. 4). И время роста  $t_m$  тем больше, чем больше начальный размер трещин.

Для объяснения зависимости долговечности от концентрации газа  $c_0$  достаточно взглянуть на формулу (3.1), связывающую точку на кинетической кривой ( $K_s, v_s(K)$ ) с параметром  $\theta^2$ ; чем больше  $c_0$  (или  $\theta^2$ ), тем на большую «высоту» мы поднимаемся по кинетической кривой (фиг. 1), то есть тем больше  $v_s$  (а значит меньше долговечность).

Рассмотрим, как влияют на долговечность параметры кинетической кривой



Фиг. 4



Фиг. 5

(на примере кинетических кривых 1, 2 на фиг. 4). При одной и той же концентрации  $c_0$  (при одном  $\theta^2$ ) для кривых 1 и 2 на (3.1):

$$K_s^2 v_s(K) = \text{const} \quad (3.3)$$

Откуда возможен только режим  $K_{s2} < K_{s1}$  при соответственно  $v_{s2} > v_{s1}$ . (Предположим, например,  $K_{s2} > K_{s1}$ , но тогда и  $v_{s2} > v_{s1}$  (фиг. 4) и  $K_{s2} v_{s2} > K_{s1} v_{s1}$ , что противоречит (3.3)). Поэтому кривая долговечности 2 лежит под кривой 1 (фиг. 3).

Так как скорость роста в стационарном режиме  $v_s$  не зависит от начального размера трещин (формула (3.1)), то время роста трещин (или увеличения их радиуса), на первый взгляд, должно быть одинаково, вне зависимости большая трещина или нет.

Однако численные расчеты показывают, что трещины большего радиуса прорастают на такое же расстояние за большее время, чем трещины меньшего. Это связано с разницей во времени выхода на стационарный режим. Общее время продвижения трещины на расстояние  $\Delta r$  можно рассчитать по приближенной формуле

$$t_m = t_m^* + (\Delta r - \Delta r^*)/v_s \quad (3.4)$$

где  $t_m^*$  — время достационарного роста,  $\Delta r^*$  — расстояние, пройденное трещиной за это время. Для того, чтобы понять почему время выхода на стационарный режим увеличивается с начальным радиусом перепишем уравнение (2.6) в виде  $dx/x = dy/(\alpha_0/\varphi(y) - y)$  и проинтегрируем

$$\ln \frac{x}{x_0} = \int_{K_{scc}}^{K^2} \frac{\varphi(y) dy}{\alpha_0 - \varphi(y) y} \quad (3.5)$$

где учтено, что при  $K \leq K_{scc}$  функция  $\varphi(y) = v(K) = 0$  и при  $x = x_0$   $K = K_{scc}$  ( $x_0 = r_0^2$ ). Или (3.5) можно записать в виде

$$\ln \frac{r}{r_0} = \int_{K_{scc}}^{K^2} \frac{v(K') K' dK'}{\alpha_0 - v(K') K'^2} \quad (3.6)$$

Устремим  $r \rightarrow \infty$ . Тогда  $\ln(r/r_0) \rightarrow \infty$ , а правая часть (3.6), ввиду ограниченности  $v(K)$  и  $K(r)$  (по доказанному в лемме), будет стремиться к бесконечности только при  $v(K)K^2 \rightarrow \alpha_0$  при  $r \rightarrow \infty$  и опять приходим к доказанной в п. 2 формуле

$$v(K) K^2 \rightarrow \alpha_0, \quad \alpha_0 = 3/4\theta^2 D$$

При возрастании  $r_0$  для того, чтобы  $\ln(r/r_0)$  достиг требуемой величины для выхода на стационарный режим (в пределах данной точности),  $r$  — расстояние до этого выхода — также должен возрасти во столько же раз. Таким образом, с увеличением начального радиуса трещин, растет  $\Delta r^*$ , а значит и  $t_m^*$  и общее время  $t_m$ .

Представляет интерес выяснение поправки, обозначим ее  $\Delta$ , которую вносит учет реальной полной кинетической кривой (кривая 1 на фиг. 1) вместо одного порогового значения  $K_{scc}$  (кривая 2 на фиг. 1). Для скорости роста без учета кинетической кривой, как указывалось выше, получено выражение в работе [2]  $v_i = 3/4\theta^2 D (1/K_{scc}^2)$ . Сравним эту формулу с формулой (3.1), которую запишем в виде  $v_s(K) = 3/4\theta^2 D (1/K_s^2)$ .

Так как  $K_s^2 > K_{scc}^2$  (фиг. 1), то  $v_s(K) < v_i$  и время роста трещины, рассчитанное без учета кинетической кривой, заведомо меньше или долговечность занижена. На самом деле занижение долговечности будет еще больше, так как до установления стационарного режима скорость увеличивается от нуля до  $v_s$ , т. е. она еще меньше. Минимальное относительное отклонение долговечности, рассчитанное с одним пороговым значением  $K = K_{scc}$ , от истинного будет

$$\Delta = (t - t_0)/t_0 = K_s^2/K_{scc}^2 - 1$$

Численные расчеты показали (фиг. 5), что отклонение  $\Delta$  растет с увеличением концентрации газа  $c_0$  (так как, как уже указывалось, с возрастанием  $c_0$  мы поднимаемся на большую «высоту» по кинетической кривой и, следовательно,  $K_s$ , а значит и  $\Delta$  по формуле (24) больше). В зависимости от вида кинетической кривой поправка  $\Delta$  тем больше, чем левее кинетическая кривая (в отличие от долговечности, которая меньше для более левых кинетических кривых).

Таким образом, учет полной кинетической кривой для оценки долговечности тем важнее, чем больше концентрация притекающего газа и чем более резкая зависимость скорости от КИН в кинетической кривой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16481).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балуева А. В. Пространственные задачи кинетики трещин с учетом диффузии в них газа // Изв. АН СССР. МТТ. 1993. № 6. С. 123—131.
2. Гольдштейн Р. В., Ентов В. М., Павловский Б. Р. Модель развития водородных трещин в металле // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 4. С. 828—831.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.

Москва

Поступила в редакцию  
22.VI.1993