

УДК 539.374

© 1994 г. С. Е. АЛЕКСАНДРОВ

ОБ УСЛОВИЯХ ТЕКУЧЕСТИ ПОРИСТЫХ И ПОРОШКОВЫХ ТЕЛ

Механико-математическое моделирование технологических процессов обработки давлением в порошковой металлургии основывается в большинстве случаев на феноменологической теории пластического течения пористых тел [1, 2]. Эта теория является прямым обобщением на пористые и порошковые материалы теории пластичности компактных материалов. Возможные для пористых и порошковых материалов необратимые деформации объема в рамках модели сплошной среды описываются с помощью условия (поверхности) текучести, зависящего от среднего напряжения. В этом случае применение ассоциированного закона течения обеспечивает наличие конечной величины объемных пластических деформаций (уплотнения материала). В настоящее время наиболее широкое применение нашли гладкие условия текучести, предложенные в работах [3, 4]. Применение этих условий текучести приводит к течению без уплотнения только если напряженное состояние соответствует девиаторной плоскости пространства главных напряжений. Однако прямые и косвенные эксперименты показывают, что течение без уплотнения возможно в некотором диапазоне изменений среднего напряжения при падении его величины [5—7]¹. В [2] для описания этого явления было предложено использовать поверхность текучести [3], сдвинутую вдоль гидростатической оси². Однако и в этом случае, хотя течение без уплотнения и возможно при ненулевых средних напряжениях, нельзя описать отсутствие уплотнения на некотором конечном участке очага деформации, например, на протяжении всей зоны опережения при прокатке [6, 7]. Другое описание явления отсутствия уплотнения в зоне опережения было предложено в [8], но при этом пришлось отказаться от применения ассоциированного закона течения.

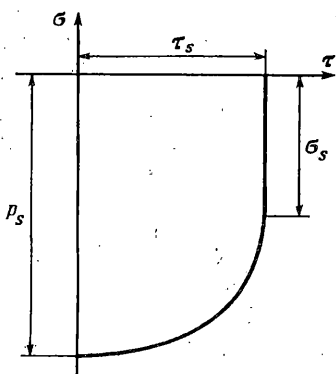
В публикуемой работе предлагаются новые условия текучести, позволяющие описать рассматриваемое явление без отказа от ассоциированного закона течения. Рассмотрены гладкие и кусочно-линейные (в главных напряжениях) условия текучести. Это связано, во-первых, с трудностью непосредственного экспериментального определения формы поверхности текучести, что приводит к необходимости судить о ней с помощью косвенных экспериментов и, следовательно, к необходимости предварительного решения некоторой задачи с применением различных условий текучести; во-вторых, с известной зависимостью формы поверхности текучести от материала для компактных тел [9, 10]. Кусочно-линейные условия текучести для пористых материалов предложены и рассмотрены в [2, 11, 12]³. Они также не описывают отсутствие уплотнения при падении величины среднего напряжения для общего случая.

1. Описание и свойства поверхностей текучести. Как следует из уравнений ассоциированного закона течения, для описания течения без уплотнения поверхность текучести должна иметь цилиндрические участки с образующими параллельными гидростатической оси. Из экспериментальных данных следует, что эти участки должны располагаться вблизи девиаторной поверхности. Естественно, принять их форму подобной форме поверхностей текучести для компактных материалов. Для последних наиболее употребительными являются поверхности текучести

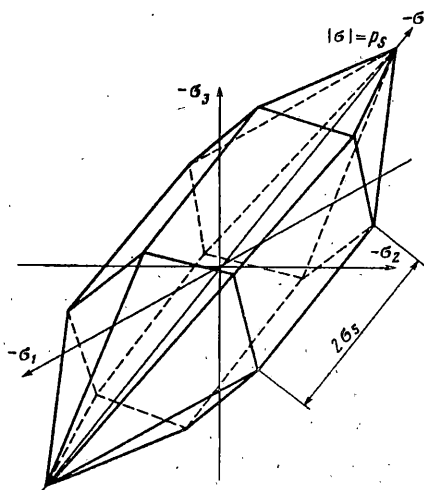
¹ См. также: Шипицын С. Н. Формирование пластичных порошковых материалов в условиях трехосного напряженного состояния: Авт. дисс. ... канд. техн. наук: Новокузнецк, 1985, 16 с.

² См.: Мидуков В. З. Исследование закономерностей пластического деформирования материалов с необратимой объемной сжимаемостью: Авт. дисс. ... канд. техн. наук: Томск, 1975, 21 с.

³ См. также: Друянов Б. А., Александров С. Е. Об условии текучести уплотняемых материалов // Тез. докл.: Кинетика и термодинамика пластической деформации. Барнаул. 1988. С. 52.



Фиг. 1



Фиг. 2

Мизеса и Треска. Эти поверхности определяются одним параметром, например, пределом текучести при чистом сдвиге τ_s . Примем, что для пористых и порошковых материалов вблизи девиаторной плоскости поверхность текучести будет иметь вид кругового цилиндра или правильной шестигранной призмы. Для этого случая отличие от компактных материалов будет заключаться в том, что площадь поперечного сечения этих поверхностей, определяемая величиной τ_s , будет зависеть от текущей относительной плотности ρ в данной точке. Величина ρ определяется из решения и, следовательно, τ_s зависит от истории деформирования материальной точки. При достаточно больших величинах среднего напряжения σ материал уплотняется. Следовательно, в этом случае условие текучести должно зависеть от σ . Положим, что уплотнение прекращается при $|\sigma| = \sigma_s$, величина σ_s , которая в [2] названа пределом уплотнения, может зависеть от тех же параметров, что и пределы текучести. В частности, в порошковой металлургии наиболее существенной считается зависимость пределов текучести от ρ . Поэтому в простейшем случае можно положить $\sigma_s = \sigma_s(\rho)$. Положим, что при $|\sigma| \geq \sigma_s$ материал подчиняется условиям текучести типа условия Грина [3] или кусочно-линейного условия текучести⁴. Тогда гладкое условие текучести можно записать в виде:

$$\tau = \tau_s \text{ при } |\sigma| \leq \sigma_s, \quad (1.1)$$

$$(|\sigma| - \sigma_s)^2 / (p_s - \sigma_s)^2 + (\tau / \tau_s)^2 = 1 \text{ при } \sigma_s \leq |\sigma| \leq p_s,$$

$$p_s \geq \sigma_s,$$

Здесь p_s — предел текучести при гидростатическом сжатии, τ — интенсивность касательных напряжений.

Соответствующая поверхность текучести в координатах σ, τ представлена на фиг. 1. Ввиду симметрии на нем показан только квадрант $\sigma \leq 0, \tau \geq 0$, характерный для операций обработки давлением.

Кусочно-линейное условие текучести, состоящее из призмы Треска и кусочно-линейного условия текучести⁴, можно записать так (σ_i — главные напряжения):

$$|\sigma_i - \sigma_j| / 2 \leq \tau_s \text{ при } |\sigma| \leq \sigma_s, \quad (1.2)$$

⁴ См. указ. публ. Друянов Б. А., Александров С. Е. ... с. 107.

$$|\sigma_i - \sigma_j|/(2\tau_s) + (|\sigma| - \sigma_s)/(p_s - \sigma_s) \leq 1 \quad \text{при } |\sigma| \geq \sigma_s$$

$$(i, j = 1, 2, 3) \quad p_s \geq \sigma_s$$

Для того, чтобы пластическое течение имело место, необходимо выполнение равенства в одном, двух, четырех или шести уравнениях системы (1.2). Если равенство выполняется в одном уравнении, то напряженное состояние соответствует грани призмы или пирамиды; если в двух — линии пересечения двух граней, причем возможно пересечение двух граней пирамиды, двух граней призмы или одной грани призмы и одной грани пирамиды; если в четырех — точке пересечения двух граней пирамиды; если в шести — вершине пирамиды. Соответствующая поверхность текучести в пространстве главных напряжений представлена на фиг. 2.

Условия текучести (1.1) и (1.2) в предельных случаях переходят в известные условия текучести. При $p_s \rightarrow \infty$ ($\rho = 1$ — компактный материал) условие (1.1) переходит в условие Мизеса, а (1.2) — в Треска. Если $\sigma_s = 0$, то условие (1.1) переходит в условие Грина, а (1.2) в условие, предложенное Мидуковым В. З.⁵. Наконец, при $\sigma_s = p_s$ условие (1.1) переходит в цилиндрическое условие текучести, примененное в [13].

Общие свойства уравнений при применении предлагаемых условий текучести могут быть получены из исследований, проведенных для частных условий. При $|\sigma| < \sigma_s$ имеют силу исследования по теории пластичности компактных материалов (возможно неоднородных), например, [14]. Интересно отметить, что разрывы скоростей в пористых и порошковых телах недопустимы [15]. Однако при применении условий (1.1) и (1.2) возможность построения разрывных решений при $|\sigma| \leq \sigma_s$ имеется. Заметим, что течения с разрывами скоростей наблюдались при прокатке порошкового материала [16]. Некоторые свойства уравнений при достаточно произвольных гладких условиях текучести исследованы в [14] — для плоского течения и в [17] — для осесимметричного. Условие (1.1) относится к рассмотренному в этих работах типу. Второе выражение в условии (1.2) для исследования общих свойств удобно представить в виде

$$|\sigma_i - \sigma_j|/(2\tau_s') + |\sigma|/p_s \leq 1 \quad (1.3)$$

$$\tau_s' = (p_s - \sigma_s)/(\tau_s p_s)$$

В этом виде оно по форме полностью совпадает с условием, предложенным Мидуковым В. З.⁶. Уравнения плоского течения для условия (1.3) исследованы в [18], а осесимметричного — в [18, 19]. Течение в угловых точках поверхностей текучести изучено в [20, 21].

В [14, 17—19] рассмотрен идеальный материал, то есть при анализе уравнение неразрывности, служащее в общей системе уравнений для определения распределения плотности, не учитывалось. Возможность применения этих исследований к анализу технологических процессов показана в [2]⁷.

Отметим, что составные поверхности текучести применялись и для компактных материалов [22, 23].

2. Пример. Рассмотрим начальное течение втулки из пористого материала, подчиняющегося условию текучести (1.1), в условиях плоской деформации под действием равномерного внутреннего $kq \geq 0$ и внешнего $kp \geq 0$ давления. Здесь k — предел текучести при чистом сдвиге материала твердой фазы, величину p будем считать заданной, а величина q должна быть определена из решения. Для пределов текучести известны различные теоретические и экспериментальные зависимости от плотности [24]. Примем

⁵ См. указ. публ. Мидуков В. З. ... с. 107.

⁶ См. указ. публ. Мидуков В. З. ... с. 107.

⁷ См. также: Александров С. Е. Исследование осесимметричных и плоских течений уплотняемых пластических тел. Авт. дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Куйбышев, 1990. 16 с.

$$\tau_s = \rho^{3/2} k, \quad p_s = (2/3)^{1/2} [\rho^2 / (1 - \rho)^{1/2}] k \quad (2.1)$$

Для σ_s в настоящее время зависимости от ρ неизвестны [2]. Однако в [2] указывается, что эта величина имеет порядок $\sigma_s \approx 0,5 k$. Поэтому для расчета примера примем $\sigma_s = 0,5 k = \text{const}$.

Предположим, что в начальный момент распределение плотности было равномерное $\rho = \rho_0 = \text{const}$, внутренний радиус втулки был R_1 , а внешний — R_2 .

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z . Ввиду осевой симметрии и плоской деформации отлична от нуля будет только радиальная скорость $u = u(r)$. Для того, чтобы получить эффект от применения составного условия текучести (1.1), необходимо рассмотреть расширение втулки, то есть должно быть $u > 0$.

Перейдем к безразмерным величинам. За характерный размер для напряжений примем величину k , а для длин — R_2 . Для безразмерных величин сохраним прежние обозначения. Причем в этом случае $R_2 = 1$.

Предположим, что имеется область течения без уплотнения вблизи внешнего радиуса. Тогда в этой области система уравнений для определения напряжений будет состоять из уравнения равновесия и первого уравнения в условии текучести (1.1), в котором учтены зависимости (2.1):

$$r d\sigma_r / dr + \sigma_r - \sigma_\varphi = 0, \quad \sigma_\varphi - \sigma_r = 2\rho_0^{3/2} \quad (2.2)$$

Такой выбор знака в условии текучести соответствует направлению радиальной скорости от оси симметрии. Решение системы (2.2) при краевом условии $\sigma_r = -p$ при $r = 1$ будет $\sigma_r = 2\rho_0^{3/2} \ln r - p$, $\sigma_\varphi = 2\rho_0^{3/2} (\ln r + 1) - p$. Тогда $\sigma = (1 + 2 \ln r) \rho_0^{3/2} - p$. Определим границу этой области r_* из условия $|\sigma| = \sigma_s = 0,5$ при $r = r_*$:

$$r_* = \exp \{ (1/2) [(p - 0,5) \rho_0^{3/2} - 1] \} \quad (2.3)$$

Если эта область есть, то должно выполняться условие $r_* < 1$. Это будет иметь место, если $p < \rho_0^{3/2} + 0,5$.

Рассмотрим внутреннюю область втулки, в которой материал будет уплотняться. К условию текучести (1.1) добавим условие отсутствия течения вдоль оси z , следующее из ассоциированного закона течения, и уравнение равновесия

$$\frac{2}{3} \frac{(\sigma + \sigma_s)}{(p_s - \sigma_s)^2} + \frac{\sigma_z - \sigma}{\tau_s^2} = 0 \quad (2.4)$$

$$r d\sigma_r / dr + \sigma_r - \sigma_\varphi = 0 \quad (2.5)$$

Исключая из (1.1), (2.4) напряжения σ_z и σ_φ и подставляя их в (2.5), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно σ_r :

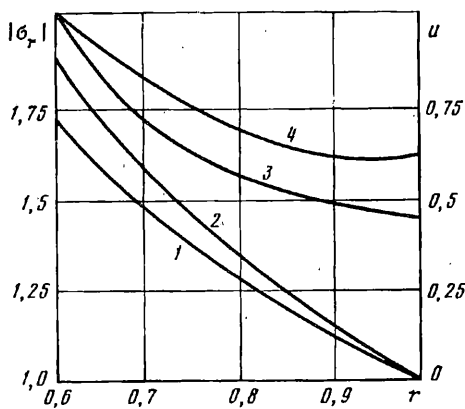
$$\frac{dr}{r} = \frac{2a_1 d\sigma_r}{- [(2a_1 + a_2) \sigma_r + a_3] + [(a_2 \sigma_r + a_3)^2 - 4a_1 (a_1 \sigma_r^2 + a_3 \sigma_r + a_4)]^{1/2}} \quad (2.6)$$

$$a_1 = 9k_s^2 + 15k_s + 4, \quad a_2 = 2(2 + 3k_s - 9k_s^2)$$

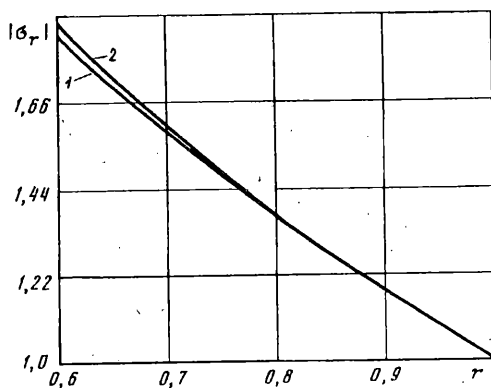
$$a_3 = 12\sigma_s(1 + 3k_s), \quad a_4 = 4(1 + 3k_s)[3\sigma_s^2 - \tau_s^2(1 + 3k_s)]$$

$$k_s = (\rho_s - \sigma_s)^2 / \tau_s^2$$

Краевое условие для уравнения (2.6) имеет вид: $\sigma_r = 2 \ln r_* - p = 0,5 - \rho_0^{3/2} = \sigma_0$ при $r = r_*$. Следовательно, его решение будет



Фиг. 3



Фиг. 4

$$r = r_* \exp \times$$

$$\times \left\{ \int_{\sigma_0}^{\sigma_r} \frac{2a_1 d\sigma_r}{-[(2a_1 + a_2)\sigma_r + a_3] + [(a_2\sigma_r + a_3)^2 - 4a_1(a_1\sigma_r^2 + a_3\sigma_r + a_4)]^{1/2}} \right\} \quad (2.7)$$

Внутреннее давление q определяется из уравнения

$$R_1 = r_* \exp \left\{ \int_{\sigma_0}^q \frac{2a_1 d\sigma_r}{-[(2a_1 + a_2)\sigma_r + a_3] + [(a_2\sigma_r + a_3)^2 - 4a_1(a_1\sigma_r^2 + a_3\sigma_r + a_4)]^{1/2}} \right\}$$

Скорость u во внешней области определяется уравнением неразрывности $du/dr + u/r = 0$, из которого следует

$$u = u_* r_* / r \quad (2.8)$$

где u_* — значение скорости u при $r = r_*$. Скорость во внутренней области определяется из уравнений ассоциированного закона течения, которые можно преобразовать к виду $\varepsilon_r/\varepsilon_\varphi = \Phi_r/\Phi_\varphi$. Величины Φ_r и Φ_φ определяются так

$$\Phi_r = \frac{2}{3} \frac{(\sigma + \sigma_s)}{(\rho_s - \sigma_s)^2} + \frac{\sigma_r - \sigma}{\tau_s^2}, \quad \Phi_\varphi = \frac{2}{3} \frac{(\sigma + \sigma_s)}{(\rho_s - \sigma_s)^2} + \frac{\sigma_\varphi - \sigma}{\tau_s^2} \quad (2.9)$$

Отсюда уравнение для определения u в этой области при краевом условии $u = 1$ при $r = R_1$ будет иметь вид

$$u = \exp \left[\int_{R_1}^r \frac{\Phi_r}{r\Phi_\varphi} dr \right] \quad (2.10)$$

Так как соотношения (1.1), (2.4), (2.7), (2.9) позволяют выразить Φ_r и Φ_φ через r , то уравнение (2.10) определяет $u = u(r)$.

Для определения скорости во внешней области по уравнению (2.8) определим u_* из (2.10):

$$u_* = \exp \left[\int_{R_1}^{r_*} \frac{\Phi_r}{r\Phi_\varphi} dr \right]$$

Результаты расчета распределения величин $|\sigma_r|$ и u вдоль радиуса для различных значений плотности и при $p = 1$ и $R_1 = 0,6$ приведены на фиг. 3 (кривые 1 и 2 — распределение $|\sigma_r|$ при $\rho_0 = 0,75$ и $\rho_0 = 0,9$; кривые 3 и 4 —

распределение u при $\rho_0 = 0,75$ и $\rho_0 = 0,9$ соответственно). Значение q можно определить по графику $|\sigma_r|$ при $r = R_1$.

Для сравнения рассмотрим распределение величины $|\sigma_r|$ при применении условия Грина. Это распределение может быть получено из (2.7) при $\sigma_s = 0$. Оно представлено на фиг. 4 (кривая 1) для $\rho_0 = 0,9$. На этой же фигуре показано распределение $|\sigma_r|$ при $\sigma_s = 0,5 k$ (кривая 2). Эти результаты могут служить для косвенного экспериментального сравнения двух рассмотренных в примере условий текучести.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сердюк Г. Г., Штерн М. Б. Теория, технология и оборудование для формирования порошков в порошковой металлургии//Итоги науки и техники. Сер. Порошковая металлургия. Т. 2. М.: ВИНТИ, 1986. С. 65—129.
2. Друянов Б. А. Прикладная теория пластичности пористых тел. М.: Машиностроение, 1989. 165 с.
3. Green R. J. Plasticity Theory for Porous Solids//Int. J. Mech. Sci. 1972. V. 14. № 4. P. 215—224.
4. Shime S., Oyane M. Plasticity Theory for Porous Metals//Int. J. Mech. Sci. 1976. V. 18. № 6. P. 285—291.
5. Живов Л. И., Павлов В. А., Макагон В. И., Оресов Ю. Г. Технологические режимы горячей экструзии порошкового титана//Теория и практика прессования порошков. Киев: Наук. думка. 1975. С. 146—150.
6. Виноградов Г. А., Каташинский В. П. Теория листовой прокатки металлических порошков и гранул. М.: Металлургия, 1979. 223 с.
7. Ложечников Е. Б. Прокатка в порошковой металлургии. М.: Металлургия, 1987. 184 с.
8. Друянов Б. А., Вишняков Л. Р., Александров С. Е. О расчетах процессов деформирования сжимаемых анизотропных тел//Технология и конструкционная пластичность порошковых материалов. Киев: Изд-е ин-та ИПМ АН УССР. 1988. С. 21—32.
9. Phillips Aris, Das Pranas K. Yield Surfaces and Loading Surfaces of Aluminum and Brass; An Experimental Investigation at Room and Elevated Temperatures//Int. J. Plast. 1985. V. 1. № 1. P. 89—109.
10. Billington E. W. Generalized Isotropic Yield Criterion for Incompressible Materials//Acta Mech. 1988. V. 72. № 1—2. P. 1—20.
11. Oyane M., Tabata T. Slip — Line Field Theory and Upper — Bound Theory for Porous Materials//J. Jap. Soc. Tech. Plast. 1974. V. 15. № 156. P. 43—51.
12. Перельман В. Е. Формование порошковых материалов. М.: Металлургия, 1979. 232 с.
13. Друянов Б. А., Пирумов А. Р. Исследование процесса экструзии пористого материала//Вестник машиностроения. 1980. № 9. С. 61—62.
14. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 407 с.
15. Друянов Б. А. О сильных разрывах в сжимаемых пластических средах//Реологические модели и процессы деформирования пористых порошковых и композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. С. 23—33.
16. Григорьев А. К., Рудской А. И. Пластическая деформация пористых материалов. Л.: ЛДНТП, 1989. 28 с.
17. Александров С. Е. Об уравнениях осесимметричного течения при гладком условии текучести//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 141—146.
18. Александров С. Е., Друянов Б. А. О типе уравнений двумерных течений идеальной жесткопластической среды при условии текучести Драккера//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 155—158.
19. Штейн М. Ш. Осесимметричное пластическое течение идеально связанной среды с трением//ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1, С. 146—156.
20. Hodge P. G. Minimum principles of piecewise linear isotropic plasticity//J. Rat. Mech. Analysis. 1956. V. 5. № 6. P. 917—938.
21. Ивлев Д. Д. О выводе уравнений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности//Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 3. С. 137.
22. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
23. Черников А. К. Вдавливание штампа в полуплоскость и полупространство//Изв. вузов. Машиностроение. 1981. № 11. С. 13—17.
24. Штерн М. Б. К теории пластичности пористых тел и уплотняемых порошков//Реологические модели и процессы деформирования пористых порошковых и композиционных материалов. Киев.: Наук. думка. 1985. С. 12—23.