МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1994

УДК 539.376

 Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ

ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА — ТЕЙЛОРА: РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКИХ ЗОН И УСТОЙЧИВОСТЬ

Описанию стационарных и нестационарных характеристик движения нелинейно вязких и вязкоупругопластических тел посвящено большое число работ. Одним из таких классических движений является течение материала между двумя коаксиальными цилиндрами. В монографии [1] собраны различные результаты задач об осесимметричном вращении вязкопластического слоя (течении Куэтта — Тейлора) при разных режимах движения внутреннего и внешнего цилиндров. В [2] исследовано распределение жестких или упругих ядер при вращательно-поступательном деформировании. Устойчивости плоского идеально- и вязкопластического сдвига при произвольных числах Сен-Венана посвящены работы [3, 4].

Среди работ последних лет отметим обзоры [5, 6] по гидродинамической устойчивости ньютоновских и неньютоновских жидкостей и статьи [7, 8], в которых изучена устойчивость течения Куэтта — Тейлора вязкоупругой жидкости Максвелла в случае неподвижного внешнего цилиндра. В [8] также обнаружен новый чисто упругий механизм потери устойчивости кругового течения.

В публикуемой работе с помощью метода интегральных соотношений [5, 9, 10] исследована устойчивость вязкопластического течения Куэтта — Тейлора. Получены достаточные оценки критического числа Рейнольдса в зависимости от пластических свойств материала и других безразмерных параметров. Отмечены особенности устойчивости кругового движения по сравнению с плоскопараллельным, проведены различные предельные переходы.

1. Невозмущенное движение и условия его существования. Рассмотрим течение несжимаемого вязкопластического материала с плотностью ρ, динамической вязкостью μ и пределом текучести при сдвиге τ_s, заключенного между двумя концентрически вращающимися цилиндрами. Радиусы и угловые скорости вращения равны a, b; ω_a, ω_b соответственно.

Движение вязкопластических тел характеризуется известными векторными соотношениями [3]:

$$\sigma_{\alpha\beta} + p\delta_{\alpha\beta} = 2Tv_{\alpha\beta}/U, \quad \alpha, \beta = r, \theta, z \tag{1.1}$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$, $v_{\alpha\beta}$ — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций в цилиндрической системе координат (r, θ, z), p — давление, T — максимальное касательное напряжение, U — максимальная скорость скольжения. Последние две величины связаны между собой линейными скалярными соотношениями

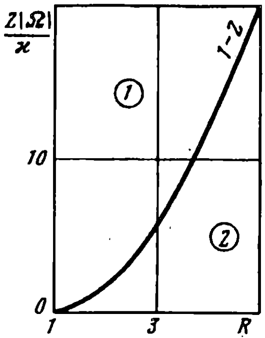
$$T = (\varkappa + U)/\mathrm{Re} \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем все величины обезразмерены в базисе $\{\rho; \omega_a; a\}$; $\mathrm{Re} = \rho\omega_a a^2/\mu$ — число Рейнольдса; $\varkappa = \tau/(\mu\omega_a)$ — число Сен-Венана. Введем также безразмерные постоянные $R = b/a$, $\Omega = (\omega_b - \omega_a)/\omega_a$, $\tau = \tau_s/(\rho\omega_a^2 a^2) \equiv \varkappa/\mathrm{Re}$.

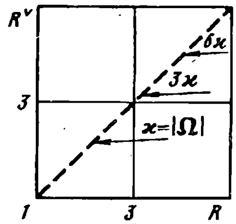
В качестве основного движения, устойчивость которого будем исследовать, выберем одномерное стационарное течение Куэтта — Тейлора [1, 11]. Единственная ненулевая компонента скорости $v_\theta(r) \equiv v^\circ(r)$ в этом течении имеет вид

$$v^\circ = \frac{R^2}{R^2 - 1}(\Omega \pm \ln R)\left(r - \frac{1}{r}\right) \mp \varkappa \ln r + r \tag{1.3}$$

На границах $r = 1$ и $r = R$ приняты условия прилипания. Другие характеристики невозмущенного движения являются следующими функциями радиуса r:



Фиг. 1



Фиг. 2

$$U^\circ \equiv 2|v^\circ_{r\theta}| = \frac{2R^2}{r^2(R^2-1)}(|\Omega| + \varkappa \ln R) - \varkappa \tag{1.4}$$

$$\sigma^\circ_{r\theta} = \frac{2R^2}{r^2(R^2-1)\,\mathrm{Re}}(\Omega \pm \varkappa \ln R), \quad T^\circ = |\sigma^\circ_{r\theta}| \tag{1.5}$$

Верхние знаки в формулах (1.3), (1.5) следует брать, если вращение происходит в положительную сторону, т. е. $v_{r\theta} > 0$, и нижние, если $v_{r\theta} < 0$.

Граница $r = R^V$, разделяющая область вязкопластического течения и жесткую зону, которая вращается как абсолютно твердое целое, определяется на основании вариационных принципов [12]. Течение реализуется в тех точках тела, где $T^\circ(r) > \tau$ или, согласно (1.2), $U^\circ(r) > 0$.

В плоскости параметров $(R;\ 2|\Omega|/\varkappa)$ выделим две области (1) и (2) (фиг. 1), разделяемые кривой $2|\Omega|/\varkappa = R^2 - 1 - 2\ln R$ (кривая 1—2). Из вида $U^\circ(r)$ (1.4) следует, что, если исходная система с ее геометрией и физико-механическими характеристиками принадлежит области (1), то вязкопластическое течение имеет место при $1 < r < R$, и жесткая зона отсутствует. Если же изображающая точка лежит в области (2), то появляется жесткая зона, примыкающая к внешнему цилиндру. В этом случае величина $U^\circ(R^V) = 0$, то есть

$$R^V = R\left(\frac{2(|\Omega| + \varkappa \ln R)}{\varkappa(R^2-1)}\right)^{1/2} \tag{1.6}$$

Заметим, что R^V всегда больше единицы (фиг. 2), т. е. жесткая зона не может занимать весь зазор между цилиндрами. Такое было бы возможным, если на одной из границ задавалось динамическое условие, например, удерживающий момент.

2. Спектральная задача устойчивости относительно малых возмущений. Выбранное в качестве невозмущенного известное течение (1.3)—(1.5) является простым одномерным сдвигом. В теории линейных вязких жидкостей, изучая устойчивость такого типа течений (а также более общего класса плоских течений), достаточно рассматривать только двумерные возмущения в плоскости основного движения [5, 13]. Это утверждение равносильно теореме Сквайра, согласно которой любому трехмерному возмущению можно поставить в соответствие некоторое двумерное, нарастающее с той же скоростью, но при меньшем числе Рейнольдса.

В [14] показано, что для вязкопластических течений класс трехмерных возмущений, сводящихся к двумерным, ограничен (аналог теоремы Сквайра). Таким достаточным ограничением в данной задаче будет условие $\delta v_{rz} = 0$.

С учетом последнего условия исследуем двумерную картину вариаций скоростей $\delta v = (\delta v_r, \delta v_\theta, 0)$. Линеаризуя определяющие соотношения (1.1), (1.2), получим (знаки вариаций опущены)

$$\sigma_{rr} = -p + \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\varkappa}{U^\circ} + 1\right)\frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\varkappa}{U^\circ} + 1\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) \tag{2.1}$$

$$\delta U = 2\delta v_{r\theta} \tag{2.2}$$

Введем функцию тока $\psi(r, \theta, t)$:

$$v_r = \psi_{,\theta}/r, \quad v_\theta = -\psi_{,r} \tag{2.3}$$

тем самым удовлетворив условию несжимаемости. Подставим далее соотношения (2.1), (2.2) в линеаризованные уравнения движения, исключим функцию давления и стандартным путем придем к одному уравнению относительно $\psi(r, \theta, t)$

$$\Delta\Delta\psi + \frac{4\varkappa}{r^2}\left(\frac{\psi_{,r} - \psi/r}{U^\circ}\right)_{,r\theta\theta} = \left(\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{v^\circ}{r}(\Delta\psi)_{,\theta} -\right.$$

$$\left.- \frac{1}{r}\left(v^{\circ\prime\prime} + \frac{1}{r}v^{\circ\prime} - \frac{1}{r^2}v^\circ\right)\psi_{,\theta}\right)\mathrm{Re} \tag{2.4}$$

где Δ — оператор Лапласа.

К (2.4) надо добавить граничные условия при $r = 1$ и $r = R$, если исходная система принадлежала области (1) (фиг. 1), либо при $r = 1$ и $r = R^\vee$, если система принадлежала области (2). Рассмотрим сначала первый случай, т. е.

$$\psi_{,r} = \psi_{,\theta} = 0 \quad \text{при} \quad r = 1;\ R \tag{2.5}$$

Разложим функцию тока в ряд Фурье по θ:

$$\psi(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi_n(r)\exp(in\theta + \alpha_n t), \quad \alpha_n = \alpha_{n*} + i\alpha_{n**} \in C \tag{2.6}$$

и исследуем устойчивость отдельной гармоники возмущения с номером n. Критерием устойчивости будет условие $\alpha_{n*} < 0$ для любого n.

Подставляя ряд (2.6) в (2.4) и (2.5) и опуская для краткости индекс n, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right)^2\psi - \frac{4\varkappa n^2}{r^2}\left(\frac{\psi' - \psi/r}{U^\circ}\right)' =$$

$$= \left[\left(\alpha + in\frac{v^\circ}{r}\right)\left(\psi'' + \frac{\psi'}{r} - \frac{n^2\psi}{r^2}\right) + \frac{2in\varkappa}{r^2}\psi\right] \tag{2.7}$$

с граничными условиями

$$\psi = \psi' = 0 \quad \text{при} \quad r = 1;\ R \tag{2.8}$$

Спектральная задача (2.7), (2.8) представляет собой обобщенную задачу Орра — Зоммерфельда. Аналогичная проблема для плоских вязко- и идеально пластических течений Куэтта и Пуазейля изучалась в [4] с помощью метода интегральных соотношений.

3. Интегральные оценки устойчивости. Пусть комплексная амплитуда $\psi(r)$ является элементом комплекснозначного гильбертова пространства $H_2\,[1; R]$ с нормой

$$\|\psi\| = \left(\int_1^R |\psi''|^2\,dr\right)^{1/2} \tag{3.1}$$

и имеет в области течения четыре непрерывные производные. Умножим обе части (2.7) на r, затем на комплексно-сопряженную функцию $\bar\psi$ и проинтегрируем от 1 до R. Используя однородные граничные условия (2.8), будем иметь

$$L = -[\alpha(I_1^2 + n^2I_0^2) + inQ]\,\mathrm{Re} \tag{3.2}$$

$$L \equiv J_2^2 + (2n^2 + 1)J_1^2 + n^2(n^2 - 4)J_0^2 + 4\varkappa n^2(K_1^2 - K_0^2 + K^2)$$

$$I_m^2 = \int_1^R |\psi^{(m)}|^2 r^{2m-1}\,dr, \quad J_m^2 = \int_1^R |\psi^{(m)}|^2 r^{2m-3}\,dr$$

$$K_m^2 = \int_1^R |\psi^{(m)}|^2\frac{r^{2m-3}}{U^\circ}\,dr \quad (m = 0, 1, 2), \quad K^2 = -\int_1^R |\psi|^2\frac{(U^\circ)'}{r^2(U^\circ)^2}\,dr$$

$$Q = Q_* + iQ_{**}, \quad Q_{**} = \int_1^R U^\circ(\psi'\bar\psi)_{**}dr$$

$$Q_* = \int_1^R\left(v^\circ|\psi'|^2 + \frac{n^2v^\circ}{r^2}|\psi|^2 + U^\circ(\psi'\bar\psi)_* - 2\varkappa I_0^2\right)dr$$

Выделим в уравнении (3.2) действительные и мнимые части

$$\alpha_* = \frac{nQ_{**} - L/\mathrm{Re}}{I_1^2 + n^2 I_0^2}, \quad \alpha_{**} = -\frac{nO_*}{I_1^2 + n^2 I_0^2} \tag{3.3}$$

В силу неравенства Шварца [15] в $\bar{H}_2\,[1; R]$ с нормой (3.1) имеем

$$|Q_{**}| \le \int_1^R U^\circ |\psi'|\,|\psi|\,dr \equiv \int_1^R U^\circ \sqrt{r}\,|\psi'|\,\frac{|\psi|}{\sqrt{r}}\,dr \le qI_1I_0 \tag{3.4}$$

$$q = \max_{1 \le r \le R} U^\circ(r)$$

Воспользуемся также очевидным неравенством $nI_0I_1 \le (n^2I_0^2 + I_1^2)/2$. Из (3.3), (3.4) следует довольно общая интегральная оценка устойчивости основного течения. Сформулируем ее в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть $\alpha\,(n, \mathrm{Re}, \varkappa, \Omega, r)$ — произвольное собственное число обобщенной задачи Орра — Зоммерфельда. Тогда, если

$$\mathrm{Re} \le 2L/[q\,(I_1^2 + n^2I_0^2)] \tag{3.5}$$

то $\alpha_* < 0$, и исходное течение Куэтта — Тейлора устойчиво при $t > 0$.

Оценка (3.5) носит достаточный характер. Дальнейший анализ основан на применении изопериметрических неравенств для квадратичных функционалов (неравенств Фридрихса [15]):

$$I_1^2 \ge \frac{\pi^2 I_0^2}{\ln^2 R}, \quad J_2^2 > \frac{\pi^2 J_1^2}{\ln^2 R}, \quad J_1^2 \ge \frac{(\pi^2 + \ln^2 R)\,J_0^2}{\ln^2 R} \tag{3.6}$$

доказательства которых приводятся ниже.

Доказательство 1. Рассмотрим уравнение $r\psi'' + \psi' + \lambda^2\psi/r = 0$ с граничными условиями $\psi(1) = \psi(R) = 0$. Умножим это уравнение на $\bar{\psi}$ и проинтегрируем от 1 до R, получим $\lambda^2 = I_1^2/I_0^2$. Точное решение $\psi(r) = A_1\cos(\lambda\ln r) + A_2\sin(\lambda\ln r)$ после подстановки в граничные условия дает $\lambda = l\pi/\ln R$ $(l = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, $\lambda_{\min} = \pi^2/\ln^2 R$, и $I^2 \ge \pi^2 I^2/\ln^2 R$.

Доказательство 2. Рассмотрим уравнение $r\psi^{(4)} + 2\psi''' + \lambda^2\psi''/r - \lambda^2\psi'/r^2 = 0$ с граничными условиями (2.8). После умножения его на $\bar{\psi}$ и интегрирования от 1 до R с учетом (2.8) будем иметь $\lambda^2 = J_2^2/J_1^2$. Подставляя точное решение $\psi(r) = A_1 + A_2r^2 + A_3r\cos(\lambda\ln r) + A_4r\sin(\lambda\ln r)$ и приравнивая к нулю характеристический определитель, получим

$$1 - \cos(\lambda\ln R) = \frac{(R-1)\,\lambda}{(R+1)}\sin(\lambda\ln R) \tag{3.7}$$

либо

$$1 + \cos(\lambda\ln R) = -\frac{(R+1)\,\lambda}{(R-1)}\sin(\lambda\ln R) \tag{3.8}$$

Можно показать, что минимальный положительный корень уравнений (3.7), (3.8) лежит в пределах $\pi/\ln R < \lambda_{\min} < 2\pi/\ln R$, поэтому заведомо справедлива оценка $J_2^2 > \pi^2 J_1^2/\ln^2 R$.

Доказательство 3. Рассмотрим уравнение $\psi''/r - \psi'/r^2 + \lambda^2\psi/r^3 = 0$ с граничными условиями $\psi(1) = \psi'(R) = 0$. После выполнения аналогичных предыдущим операций получим $\lambda^2 = J_1^2/J_0^2$. Точное же решение имеет вид

$$\psi(r) = \{A_1\exp[\sqrt{1-\lambda^2}\,\ln r] + A_2\exp[-\sqrt{1-\lambda^2}\,\ln r]\}r, \quad \text{если } |\lambda| < 1$$

$$\psi(r) = (A_1 + A_2\ln r)\,r, \quad \text{если } |\lambda| = 1$$

$$\psi(r) = [A_1\cos(\sqrt{\lambda^2-1}\,\ln r) + A_2\sin(\sqrt{\lambda^2-1}\,\ln r)]\,r, \quad \text{если } |\lambda| > 1$$

Характеристические уравнения в каждом из трех случаев в итоге сводятся к одному

$$\mathrm{tg}\,(\sqrt{\lambda^2-1}\,\ln R) = -\sqrt{\lambda^2-1} \tag{3.9}$$

Минимальный положительный корень $\lambda_{\min}$ уравнения (3.9) удовлетворяет неравенству $\lambda_{\min}^2 > (\pi^2 + \ln^2 R)/\ln^2 R$. Поэтому $J_1^2 \ge (\pi^2 + \ln^2 R)\,J_0^2/\ln^2 R$. Доказательства завершены.

Выпишем теперь следующие мажорантные оценки

$$I_l^2/R^2 \le J_l^2 \le I_l^2 \quad (l = 0, 1, 2), \quad K_1^2 \ge J_1^2/q, \quad K_0^2 \le J_0^2/s \tag{3.10}$$

$$s = \min_{1 \le r \le R} U^\circ(r)$$

Воспользуемся всеми квадратичными неравенствами (3.6), (3.10) применительно к (3.5) и сформулируем результат в виде следствия теоремы.

Следствие. Пусть α (n, Re, $\varkappa$, Ω, R) — произвольное собственное число обобщенной задачи Орра — Зоммерфельда. Тогда, если

$$\frac{R^2 q\,\mathrm{Re}}{2} \le \frac{4\pi^2 n^2 \varkappa}{q\,(\pi^2 + n^2 \ln^2 R)} + \frac{\pi^2}{\pi^2 + \ln^2 R}\,\frac{\pi^2 + \ln^2 R\,[1 - 4n^2 (1 + \varkappa/s)]}{\pi^2 + n^2 \ln^2 R} + \frac{\pi^2 + n^2 \ln^2 R}{\ln^2 R} \tag{3.11}$$

то $\alpha_* < 0$.

Для получения общей нижней оценки критического числа Рейнольдса Re* необходимо найти минимальное значение по $n \in Z$ правой части (3.11). Исследуем аналитически некоторые частные случаи задачи, которые дают характерные качественные и количественные результаты.

4. Осесимметричные возмущения. При $n = 0$ (осесимметричные возмущения) из (3.11) следует достаточное условие устойчивости

$$\mathrm{Re} \le \frac{2\,(\pi^2 + \ln^2 R)(R^2 - 1)}{R^2 \ln^2 R\,[2R^2\,|\Omega| + \varkappa\,(2R^2 \ln^2 R - R^2 + 1)]} \tag{4.1}$$

Для изучения влияния пластической составляющей на линейно вязкое течение надо от $\varkappa$ перейти к другому безразмерному числу τ, не содержащему параметр вязкости. Подставляя $\varkappa = \tau\,\mathrm{Re}$ в (4.1), после решения квадратного неравенства получим

$$\mathrm{Re} \le \frac{f_2(R)|\Omega|}{f_3(R)\,\tau}\left\{\left(1 + \frac{f_1(R)\,\tau}{f_2^2(R)\,\Omega^2}\right)^{1/2} - 1\right\} \tag{4.2}$$

$$f_1(R) = 2\,(\pi^2 + \ln^2 R)(R^2 - 1)(2R^2 \ln R - R^2 + 1),\quad f_2(R) = R^3 \ln R$$

$$f_3(R) = R\,(2R^2 \ln R - R^2 + 1) \ln R$$

Оценка (4.2) позволяет получить асимптотический предел при малых τ либо при больших относительных скоростях вращения ($\Omega^2 \gg \tau$). Удерживая первые три члена разложения Тейлора, будем иметь

$$\mathrm{Re} \le \frac{(\pi^2 + \ln^2 R)(R^2 - 1)}{R^4|\Omega| \ln^2 R} - \frac{(\pi^2 + \ln^2 R)^2(R^2 - 1)^2(2R^2 \ln R - R^2 + 1)\,\tau}{2R^{10}\,|\Omega|^3 \ln^4 R} -$$

$$- O\left(\frac{\tau^2}{|\Omega|^5}\right) \tag{4.3}$$

Как видно из (4.3), при $\tau \to 0$ существует равномерная сходимость по τ к вязкому пределу. Заметим, что, устремляя τ/Ω^2 к нулю, по-прежнему, остаемся в области (1) (фиг. 1), жесткой зоны при этом не возникает.

В случае узкого зазора между цилиндрами ($R - 1 \ll (R + 1)/2$) достаточное условие устойчивости имеет простой вид

$$\mathrm{Re} \le 2\pi^2/[\,|\Omega|\,(R - 1)] \tag{4.4}$$

Предыдущие исследования проводились в предположении о том, что исходная система и траектории предельных переходов лежат в области (1) (фиг. 1). Если же параметры системы принадлежат области (2), и тем самым зона течения сужается от 1 до $R^{\vee}$, то достаточно везде заменить R на $R^{\vee}$ согласно формуле (1.6). При этом предполагается, что границы жесткой зоны в возмущенном и основном вращениях совпадают, и условие прилипания переносится с внешнего цилиндра на поверхность $r = R^{\vee}$.

Рассмотрим здесь также предельный переход $\tau \to \infty$ при других фиксированных параметрах, траектория которого лежит в области (2). Из (1.6) следует $R^{\vee}_{\infty} = R\,[2 \ln R/(R^2 - 1)]^{1/2}$. Выпишем первые два члена соответствующего асимптотического разложения. Из (4.2) получим, что, если

$$\mathrm{Re}|_{\tau\to\infty} \le \frac{(f_1(R^{\vee}_{\infty}))^{1/2}}{f_3(R^{\vee}_{\infty})\sqrt{\tau}} - \frac{f_2(R^{\vee}_{\infty})\,|\Omega|}{f_3(R^{\vee}_{\infty})\,\tau} + O(\tau^{-3/2})$$

то движение устойчиво.

5. Коротковолновые возмущения. При $n \gg 1$ (коротковолновые возмущения) из общей нижней оценки (3.11) следует асимптотическая оценка

$$\tfrac{1}{2}R^2 q\,\mathrm{Re} \le n^2 + C$$

где C — не зависящая от n функция $\varkappa$, Ω, R. Следовательно, гармоники возмущения с большими номерами всегда устойчивы, и критические числа Рейнольдса, соответствующие им, стремятся в бесконечность. Это подтверждается и общими соображениями об устойчивости мелкой ряби во многих других гидродинамических и геофизических приложениях.

6. Вязкий предел. Покажем, что вязкий предел в данной задаче существует не только в случае осесимметричных возмущений, но и для любого n. При $\varkappa = 0$ достаточное условие устойчивости (3.11) имеет вид

$$\frac{R^2 q_0}{2}\mathrm{Re} \leq \frac{\pi^2}{R^2 \ln^2 R} + n^2 + \frac{\pi^2}{\pi^2 + \ln^2 R}\,\frac{\pi^2 + (1 - 4n^2)\ln^2 R}{\pi^2 + n^2 \ln^2 R} \tag{6.1}$$

$$q_0 = 2R^2|\Omega|/(R^2 - 1)$$

Формальный минимум правой части (6.1) достигается в точке

$$n^2 = \frac{\pi}{\ln^2 R}\left\{ \left(\frac{5\pi^2 + \ln^2 R}{\pi^2 + \ln^2 R}\right)^{1/2} \ln R - \pi \right\} \tag{6.2}$$

Можно доказать, что правая часть (6.2) при любом R строго меньше единицы, а при $R < 4{,}6016$ и меньше нуля. Таким образом, минимум в (6.1) достигается при $n = 0$ и, естественно, совпадает с (4.1). Предельные переходы при $\tau \to 0$ и при $n = 0$ из самого общего случая вязкопластического течения оказываются перестановочными.

Итак, из всех гармоник $n \in N$ в вязком пределе наиболее опасны осесимметричные, что подтверждается классическими результатами [10, 11, 16].

Заметим, что для узкого зазора между коаксиальными цилиндрами остается справедливым условие устойчивости (4.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Нестационарные движения вязкопластических сред. М.: Наука, 1997. 376 с.
2. *Магомедов О. Б., Победря Б. Е.* Некоторые задачи вязкоупругопластического течения//Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ. 1975. Вып. 4. С. 152—169.
3. *Ильюшин А. А.* Деформация вязкопластических тел//Уч. зап. МГУ. Механика. 1940. № 39. С. 3—81.
4. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость плоского идеально жесткопластического течения Куэтта//ПММ. 1993. Т. 58. С. 164—168.
5. *Козырев О. Р., Степанянц Ю. А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости//Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. 1991. Т. 25. С. 3—89.
6. *Брутян М. А., Крапивский П. Л.* Гидродинамика неньютоновских жидкостей//Итоги науки и техники. Сер. Комплексные и специальные разделы механики. 1991. Т. 4. С. 3—98.
7. *Zielinska B. J. A., Demay Y.* Couette — Taylor instability in viscoelastic fluids//Phys. Rev. Ser. A. 1988. V. 38. No. 2. P. 897—903.
8. *Larson R. G., Shagfen E. S. G., Muller S. J.* A purely elastic instability in Taylor — Couette flow//J. Fluid Mech. 1990. V. 218. P. 573—600.
9. *Joseph D. D.* Eigenvalue bounds for the Orr — Sommerfeld equation. Part 2//J. Fluid Mech. 1969. V. 36. No. 4. P. 721—734.
10. *Drasin P. G., Reid W. H.* Hydrodynamic Stability. Cambridge Univ. Press, 1981. 525 p.
11. *Raffai R., Laure P.* The influence of an axial mean flow on the Couette — Taylor Problem//European J. Mech. B/Fluids. 1993. V. 12. No. 3. P. 277—288.
12. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Вариационные методы теории течений жестко-вязко-пластических сред. М.: Наука, 1971. 114 с.
13. *Betchov R., Criminale W. O.* Stability of Parallel Flows. London — N. Y.: Acad. Press, 1967. 330 p.
14. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость двумерных и трехмерных вязкопластических течений и обобщенная теорема Сквайра//Изв. АН. МТТ. 1993. № 2. С. 117—123.
15. *Rektorys K.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Dordrecht: Reidel Publ. Comp., 1980. 571 p.
16. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.

Москва

Поступила в редакцию 11.XI. 1992