МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1994

УДК 351.8

 Д. В. БАЛАНДИН

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ МНОГОМАССОВОЙ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ

Изучение предельных возможностей виброизоляции является одним из основных вопросов теории защиты объектов от вибраций и ударов. Традиционной является следующая постановка проблемы: имеется математическая модель виброизолированной системы, требуется построить оптимальное управление («идеальный» виброизолятор), минимизирующее принятый показатель качества виброизоляции. В [1—3], посвященных этому вопросу, обычно предполагалось, что система полностью определена, т. е. известно внешнее воздействие в виде заданной функции времени, и точно известны все параметры системы. Между тем в реальных задачах проектирования часто возникает ситуация, когда внешнее воздействие и некоторые параметры системы точно не известны, а заданы лишь множества, их содержащие. Указанная ситуация приводит к необходимости постановки и исследования задач о предельных возможностях виброизоляции в условиях неопределенности. В данной работе исследуется одна из подобных задач применительно к виброизоляции многомассовой упругой конструкции при действии возмущений, интеграл от квадрата которых ограничен.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему материальных точек, связанных упругодиссипативными линейными связями между собой и некоторым твердым телом (основанием), движущимся прямолинейно по заданному закону. Предположим также, что одна из точек этой системы связана посредством виброизолятора с основанием. Уравнения движения системы могут быть представлены в виде

$$Mx^{\cdot\cdot} + Bx^{\cdot} + Cx = qu + pv \tag{1.1}$$

где $x$ — $n$-мерный вектор-столбец, определяющий обобщенные координаты системы точек относительно основания; $M$, $B$, $C$ — $(n \times n)$-положительно-определенные симметрические матрицы, характеризующие соответственно инерционные, диссипативные и упругие свойства системы; $q$, $p$ — $n$-мерные вектор-столбцы, характеризующие геометрию взаимного расположения системы материальных точек, основания и виброизолятора; $u$, $v$ — скалярные функции, характеризующие усилие, развиваемое виброизолятором, и ускорение основания.

Предположим, что функции $u(t)$, $v(t)$ принадлежат классу кусочно-непрерывных абсолютно интегрируемых на $(-\infty, \infty)$ функций. Без ограничения общности положим, что движение основания начинается в момент $t = 0$, а при $t < 0$ справедливо тождество $v(t) \equiv 0$. Кроме того,

$$\int_0^\infty v^2(t)\,dt \le w_0^2 \tag{1.2}$$

Будем считать, что идеальный виброизолятор обладает возможностью упреждения внешнего возмущения, т. е. управление $u(t)$ может включаться в любой момент $t_0 \le 0$, при этом $u(t) \equiv 0$ для $t < t_0$. Функции, удовлетворяющие перечисленным выше условиям, будем относить к классам $\theta$ и $W$ соответственно: $v(\cdot) \in \theta$, $u(\cdot) \in W$. Исходное состояние системы (1.1) определим следующим образом: $x(t) = x^{\cdot}(t) \equiv 0$ при $t \le t_0$.

Введем функционал, характеризующий качество виброизоляции

$$J\,[u\,(\cdot),\,v\,(\cdot)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x^{\cdot T}Mx^{\cdot} + x^{T}Cx]\,dt \tag{1.3}$$

где вектор-столбец $x = x\,[t,\,u\,(\cdot),\,v\,(\cdot)]$ – решение задачи Коши для системы (1.1) с начальными условиями $x\,(t_0) = x^{\cdot}\,(t_0) = 0$ и заданными функциями $u\,(t)$, $v\,(t)$; $x^T$ – вектор-строка (здесь и в дальнейшем верхним индексом $T$ будем обозначать операцию транспонирования). Подынтегральное выражение в (1.3) определяет (с точностью до постоянного множителя, равного 1/2) сумму кинетической и потенциальной энергии системы при ее движении относительно основания.

Сформулируем задачу о предельных возможностях виброизоляции: найти

$$J^0 = \sup_{v(\cdot)\in\theta}\ \inf_{u(\cdot)\in W} J\,[u\,(\cdot),\,v\,(\cdot)] \tag{1.4}$$

Смысл этой задачи состоит в том, чтобы для каждого воздействия из класса $\theta$ найти идеальный виброизолятор, а затем найти наибольшее значение показателя качества на всем множестве воздействий $v\,(t)$.

**2. Исследование задачи.** Для исследования задачи (1.4) воспользуемся изображениями по Фурье. Умножим обе части системы (1.1) на множитель $\exp\,(-i\omega t)$ ($i$ – мнимая единица) и проинтегрируем получившееся соотношение по $t$ на бесконечном интервале $(-\infty,\ \infty)$. Заметим, что такая операция законна, поскольку в отсутствии внешнего воздействия и управления исходная система обладает асимптотической устойчивостью [4], а следовательно, если $u\,(t)$ и $v\,(t)$ абсолютно интегрируемы, то и решение системы (1.1) $x\,[t,\,u\,(\cdot),\,v\,(\cdot)]$ также абсолютно интегрируемая функция. Будем иметь

$$(-\omega^2 M + i\omega B + C)\,X = qU + pV \tag{2.1}$$

где вектор-столбец $X$ — изображение по Фурье вектор-функции $x\,[t,\,u\,(\cdot),\,v\,(\cdot)]$, $U$ и $V$ – изображение по Фурье функций $u\,(t)$ и $v\,(t)$.

Введем в рассмотрение комплексную матрицу $R = R\,(\omega) = -\omega^2 M + i\omega B + C$, а также обратную ей $A = A\,(\omega) = R^{-1}$, которая всегда существует, поскольку $R$ — невырожденная матрица. Заметим, что $A$ есть симметрическая матрица. Тогда вектор-столбец $X$ может быть выражен из соотношения (2.1):

$$X = UAq + VAp \tag{2.2}$$

Вычислим далее

$$G\,(\omega) = X^T L X^* = (X^*)^T L X \tag{2.3}$$

Здесь и далее звездочка обозначает комплексно сопряженную величину, а матрица $L$ определяется выражением $L = \omega^2 M + C$. Преобразовывая равенства (2.3) с учетом (2.2), получим

$$G\,(\omega) = q^T\Gamma q UU^* + p^T\Gamma q VU^* + q^T\Gamma p UV^* + p^T\Gamma p VV^* \tag{2.4}$$

Здесь матрица $\Gamma$ с учетом соотношений (2.3) определяется выражением

$$\Gamma = \Gamma\,(\omega) = A^T L A^* = (A^*)^T L A \tag{2.5}$$

Отметим некоторые свойства матрицы $\Gamma$, следующие из соотношений (2.5): $\Gamma$ есть симметрическая матрица с действительными элементами, т. е. справедливы равенства

$$\Gamma^T = \Gamma^* = \Gamma \tag{2.6}$$

Из последнего равенства также следует $\Gamma(\omega) = \Gamma(-\omega)$. Согласно известному равенству Парсеваля [5] имеем

$$J[u(\cdot), v(\cdot)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} G(\omega)\, d\omega \tag{2.7}$$

Рассмотрим сначала задачу определения

$$J_I[v(\cdot)] = \inf_{u(\cdot)\in W} J[u(\cdot), v(\cdot)]$$

Выделим два различных случая: векторы $q$ и $p$ — линейно зависимы, векторы $q$ и $p$ — линейно независимы. Исследуем каждый из указанных случаев в отдельности, полагая, что $q \neq 0$, $p \neq 0$. Если $q$ и $p$ линейно зависимы, то существует такое $\alpha \neq 0$, что $p = \alpha q$. Положим далее $U = -\alpha V$, тогда из выражения (2.4) следует $G(\omega) \equiv 0$ и, следовательно

$$J_I[v(\cdot)] = 0, \quad \forall v(\cdot) \in \theta \tag{2.8}$$

При этом искомое управление $u(t) = -\alpha v(t)$. Этот случай в дальнейшем будем называть полной компенсацией.

Более интересен второй случай, когда векторы $q$ и $p$ линейно независимы, т. е. $qu(t) + pv(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $u(t) = v(t) = 0$. Определим частные производные $G$ по $U$ и $U^*$:

$$\partial G/\partial U = q^T\Gamma q U^* + q^T\Gamma p V^*, \quad \partial G/\partial U^* = q^T\Gamma q U + p^T\Gamma q V \tag{2.9}$$

Заметим, что в силу (2.6) имеет место равенство $q^T\Gamma p = p^T\Gamma q$. Прежде чем приравнивать найденные производные нулю, покажем, что

$$q^T\Gamma q > 0 \tag{2.10}$$

Поскольку $L$ есть положительно определенная матрица, то $G(\omega) \geq 0$. Равенство $G(\omega) = 0$ возможно согласно (2.2) (с учетом того, что матрица $A$ невырожденная) лишь в случае, когда $U = V = 0$. Следовательно, эрмитова форма, заданная выражением (2.4), положительно определенная для всех $\omega \in (-\infty, \infty)$. Введем матрицу, определяющую эту эрмитову форму

$$K = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{Vmatrix}, \quad a_1 = q^T\Gamma q, \quad a_2 = p^T\Gamma q = q^T\Gamma p, \quad a_3 = p^T\Gamma p$$

Для того чтобы матрица $K$ была положительно определенной, необходимо и достаточно выполнение неравенств [5]: $a_1 > 0$, $a_1 a_3 - a_2^2 > 0$. Тем самым доказано (2.10) и, кроме того, из последнего неравенства следует

$$p^T\Gamma p > 0, \quad (q^T\Gamma q)(p^T\Gamma p) - (p^T\Gamma q)(q^T\Gamma p) > 0 \tag{2.11}$$

Приравнивая теперь нулю производные (2.9), получим

$$U^* = Q(\omega) V^*, \quad U = Q(\omega) V$$

$$Q(\omega) = -q^T\Gamma p/(q^T\Gamma q) = -p^T\Gamma q/(q^T\Gamma q) \tag{2.12}$$

Заметим, что любое из соотношений (2.12) может быть получено взятием операции комплексного сопряженного от соседнего. Для уяснения характера экстремума найдем вторые производные $G$ по $U$ и $U^*$:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial U^2} = \frac{\partial^2 G}{(\partial U^*)^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial U\, \partial U^*} = \frac{\partial^2 G}{\partial U^* \partial U} = q^T\Gamma q$$

В силу неравенства (2.10) полученный экстремум есть минимум. Подставляя далее соотношения (2.12) в выражение (2.4), будем иметь $G(\omega) = G_0(\omega)\, VV^*$, где

$$G_0(\omega) = p^T\Gamma p - (q^T\Gamma p)(p^T\Gamma q)/(q^T\Gamma q) \tag{2.13}$$

Заметим также, что согласно (2.6) функция $G_0(\omega)$ является четной, а в силу второго неравенства (2.11) $G_0(\omega) > 0$. Итак, с учетом (2.7) справедливо неравенство

$$J_I[v(\cdot)] \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)\, VV^*\, d\omega$$

Покажем теперь, что комплексная функция $U(\omega)$, определяемая согласно (2.12), является Фурье-образом некоторой функции $u(t)$. Достаточно показать, что функция $Q(\omega)$ ограничена на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$. Заметим, что матрица $\Gamma$ может быть представлена в виде $\Gamma = \Gamma_1(\omega)/P_1(\omega)$, где $P_1(\omega) = |\det R|^2$, а элементы матрицы $\Gamma_1$ представляют собой полиномы с действительными коэффициентами, порядок которых не превышает $4n - 2$. Таким образом, функция $Q(\omega)$ есть отношение двух полиномов: $Q(\omega) = -(q^T\Gamma_1 p)/(q^T\Gamma_1 q)$. Используя свойство положительной определенности матрицы $M$, можно показать, что порядок полинома $P_1(\omega)$ равен $4n$, а порядок полиномов, задаваемых квадратичными формами $q^T\Gamma_1 q$ и $p^T\Gamma_1 p$, равен $4n$ — 2. Таким образом, предел функции $Q(\omega)$ при $\omega \to \infty$ есть конечная величина. Следовательно, функция $Q(\omega)$ ограничена на бесконечном интервале и $U(\omega)$, определяемая согласно (2.12), является Фурье-образом некоторой функции $u(t)$, принадлежащей $W$ и выражаемой в виде

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega)\, V(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Из указанных свойств матрицы $\Gamma$ и функции $Q(\omega)$ следует, что функция $G_0(\omega)$, определяемая выражением (2.13), а также функции, определяемые формами $p^T\Gamma p$, $q^T\Gamma q$, $q^T\Gamma p$, являются ограниченными и интегрируемыми на всем бесконечном интервале и, значит, справедливы равенства

$$\lim_{\omega\to\infty} q^T\Gamma(\omega)\, q = \lim_{\omega\to\infty} p^T\Gamma(\omega)\, p = \lim_{\omega\to\infty} q^T\Gamma(\omega)\, p = \lim_{\omega\to\infty} G_0(\omega) = 0$$

Таким образом, искомое значение $J_I[v(\cdot)]$ в случае, когда векторы $q$ и $p$ линейно независимы, определяется выражением

$$J_I[v(\cdot)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)\, VV^{**}\, d\omega \tag{2.14}$$

В отличие от рассмотренного выше случая полной компенсации в данном случае $J_I[v(\cdot)] > 0$ при $v(t) \not\equiv 0$, т. е. управление $u(t)$ не позволяет полностью скомпенсировать внешнее возмущение.

Рассмотрим далее задачу определения

$$J^0 = \sup_{v(\cdot)\in\theta} J_I[v(\cdot)]$$

Если векторы $q$ и $p$ линейно зависимы, то согласно (2.8) решение этой задачи тривиально $J^0 = 0$. Пусть векторы $q$ и $p$ линейно независимы. Используя неравенство (1.2) и равенство Парсеваля, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} VV^* \, d\omega \le w_0^2 \tag{2.15}$$

Рассмотрим внешнее воздействие вида ($\omega_0$ – постоянная величина):

$$v^0(t) = \begin{cases} \dfrac{w_0}{\sqrt{\sigma}} \sin \omega_0 t, & 0 \le t \le T_0 \\ 0, & t < 0, t > T_0 \end{cases}$$

$$\sigma = \int_0^{T_0} (\sin \omega_0 t)^2 \, dt$$

Находя $V_0$ — изображение по Фурье для указанного воздействия $v^0(t)$ и устремляя затем $T_0$ к бесконечности, получим [6]:

$$\lim_{T_0 \to \infty} V_0 V_0^* = \pi w_0^2 \left[ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right]$$

Здесь $\delta(\omega)$ – дельта-функция Дирака. Обозначим $\omega_+$ значение $\omega$, при котором функция $G_0(\omega)$ достигает максимума

$$G_0(\omega_+) = \max_{\omega \in (-\infty, \infty)} G_0(\omega)$$

Тогда, с учетом соотношения (2.14) и неравенства (2.15) получим искомую величину $J^0 = w_0^2 G_0(\omega_+)$. Итак, воздействием $v(t)$, доставляющим максимум функционалу $J_I[v(\cdot)]$, является в пределе гармоническое воздействие с бесконечно малой амплитудой.

**3. Связь с задачей оптимизации гарантированного качества.** Оптимальное управление, полученное в ходе решения задачи о предельных возможностях, не реализуемо на практике. Однако, значение предельных возможностей виброизоляции позволяет оценить насколько удачно то или иное техническое решение. При этом в случае полной определенности виброизолированной системы вполне вероятна ситуация, когда для одних видов воздействия качество защиты, близкое к предельному, дает одна конструкция виброизолятора, а для других — другая. Преодолеть указанное противоречие позволяет постановка задачи оптимальной виброизоляции по критериям гарантированного качества. В этом случае заранее обозначен класс воздействий, для защиты от которых предназначен виброизолятор. Расчет виброизолятора производится по принципу гарантированного результата и состоит в минимизации показателя качества для самой неблагоприятной ситуации. Отметим, что ряд подобных задач применительно к противоударной амортизации рассмотрен в [7, 8].

Попытаемся выяснить, в какой связи находятся задачи оптимизации гарантированного качества и расмотренная выше задача о предельных возможностях виброизоляции многомассовой упругой конструкции при действии возмущений, интеграл от квадрата которых ограничен. Определим множество $W_1$ допустимых характеристик виброизолятора. Будем предполагать, что виброизолятор включается одновременно с началом действия внешнего возмущения в момент времени $t_0 = 0$, и в каждый последующий момент $t' > 0$ виброизолятор, располагая информацией о возмущении $v(t)$ и состоянии системы $x(t)$ лишь на отрезке $[0, t']$, вырабатывает управление $u(t')$. Дополнительно потребуем, что любое управление полученное указанным образом есть кусочно-непрерывная абсолютно интегрируемая на $[0, \infty)$ функция. Тогда постановка задачи оптимизации гарантированного качества виброизоляции для класса воздействий $\theta$ имеет вид: найти виброизолятор с характеристикой $u^0(\cdot)$ из множества $W_1$ такой, что

$$\sup_{v(\cdot)\in\theta} J[u^0(\cdot), v(\cdot)] = \inf_{u(\cdot)\in W_1} \sup_{v(\cdot)\in\theta} J[u(\cdot), v(\cdot)] \tag{3.1}$$

где функционал $J[u(\cdot), v(\cdot)]$ определен в соответствии с выражением (1.3). Поскольку $W_1 \subset W$, то справедливо неравенство

$$\sup_{v(\cdot)\in\theta} \inf_{u(\cdot)\in W} J[u(\cdot), v(\cdot)] \le \sup_{v(\cdot)\in\theta} \inf_{u(\cdot)\in W_1} J[u(\cdot), v(\cdot)] \tag{3.2}$$

Далее, воспользовавшись известным в теории антагонистических игр [9] наравенством, связывающим максимин и минимакс, получим

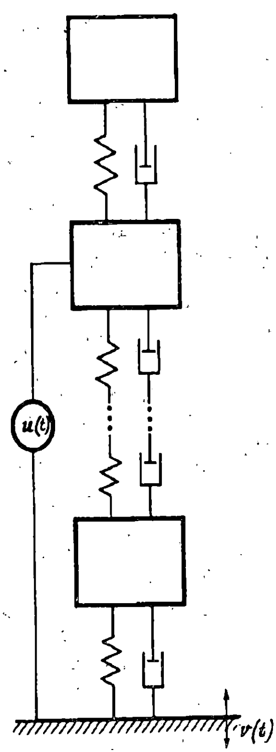
$$\sup_{v(\cdot)\in\theta} \inf_{u(\cdot)\in W_1} J[u(\cdot), v(\cdot)] \le \inf_{u(\cdot)\in W_1} \sup_{v(\cdot)\in\theta} J[u(\cdot), v(\cdot)]$$

Из последнего неравенства, а также неравенства (3.2) окончательно будем иметь

$$J^0 = \sup_{v(\cdot)\in\theta} \inf_{u(\cdot)\in W} J[u(\cdot), v(\cdot)] \le \inf_{u(\cdot)\in W_1} \sup_{v(\cdot)\in\theta} J[u(\cdot), v(\cdot)] = J_g^0$$

Таким образом, величина гарантированного качества виброизоляции $J_g^0$ не может быть меньше величины $J^0$, определяющей решение задачи о предельных возможностях виброизоляции для класса воздействий $\theta$.

Возникает естественный вопрос: существует ли в данном случае виброизолятор, доставляющий показателю гарантированного качества минимальное значение равное предельно возможному $J^0$. В случае полной компенсации $(p = \alpha q)$ очевидно $u(t) = -\alpha v(t)$, и, следовательно, показатель гарантированного качества равен нулю. Когда полная компенсация невозможна, ответ на поставленный вопрос в общем случае неизвестен. Покажем на примере, как можно построить управление, доставляющее $J_g^0$ значение, равное предельно возможной величине $J^0$, либо достаточно близкое к ней.




**4. Пример.** Рассмотрим одномерную цепочку материальных точек массы $m$ каждая, связанных последовательно между собой и основанием линейными упругодиссипативными связями (фигура). Уравнения движения такой системы представим в виде (1.1). Пусть симметрические $(n \times n)$-матрицы $M$, $B$, $C$ и векторы $p$ и $q$ таковы: $M = mE$ ($E$ – единичная $(n \times n)$-матрица), $B = (b/c)\,C$:

$$C = c\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \; -1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad p = m\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad q = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Индекс компоненты вектора $q$, отличной от нуля, соответствует номеру материальной точки (нумерация начинается от ближайшей к основанию), с которой связан виброизолятор (фигура), Поставим задачу (1.4) с функционалом (1.3) применительно к данной механической системе. Искомое значение предельного качества $J^0$ можно представить в виде $J^0 = m^{5/2}c^{-3/2}w_0^2 J_B(n, k, \nu)$ где $n$ — общее число материальных точек, $k$ — номер компоненты вектора $q$, отличной от нуля, $\nu = b/(mc)^{1/2}$, $J_B$ – решение задачи (1.4), приведенной к безразмерной форме. Полагая $n = 10$, $\nu = 3$, приведем значения $J_B$ в зависимости от параметра $k$ (см. далее).

Рассмотрим теперь виброизолятор из класса $W_1$, реализованный по принципу «обратной связи по возмущению» в виде

$$u(t) = -\beta v(t) \tag{4.1}$$

Задача (3.1) в данном случае сводится к минимизации гарантированного качества по параметру $\beta$. Оптимальные значения функционала $J_B^g$ и параметра $\beta$ в зависимости от параметра $k$ приведены ниже

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_B$ | 991 | 466 | 249 | 137 | 77 | 50 | 43 | 51 | 73 | 102 |
| $J_B^g$ | 991 | 466 | 249 | 137 | 78 | 51 | 44 | 51 | 75 | 105 |
| $\beta$ | 32,5 | 19,6 | 14,2 | 11,4 | 9,50 | 8,23 | 7,50 | 7,10 | 6,55 | 6,35 |

Сравнение величин $J_B^g$ и $J_B$ показывает, что предложенный виброизолятор обеспечивает гарантированное качество защиты объекта, отличающееся от предельно возможного не более, чем на 3%.

Покажем также, что построенное управление обладает свойствами робастности. Для уяснения этого свойства предположим, что параметры системы известны не точно, а с некоторой погрешностью (на практике это обстоятельство всегда имеет место). Пусть параметр $\nu$ точно не известен и может принимать любые значения в диапазоне от $\nu_-$ до $\nu_+$. При этом оптимальное управление $u^0(t)$ вида (4.1) определено в расчете на $\nu = \nu_0 \in [\nu_-, \nu_+]$. Оценим чувствительность показателя гарантированного качества виброизоляции с управлением $u^0(t)$ при изменении параметра $\nu$. Полагая $n = 10$, $k = 7$, $\nu_0 = 3$, $\nu_- = 2{,}7$, $\nu_+ = 3{,}3$, численно находим: отклонение показателя гарантированного качества от номинального составляет не более 3%, в то время как «разброс» параметра $\nu$ от номинального $\nu_0$ – 10%. Заметим, что для всех $\nu$ из указанного интервала отличие данного показателя от соответствующего предельно возможного значения также не превышает 3%. Приведенный результат указывет на малую чувствительность функционала в области оптимума по отношению к малым вариациям параметров системы, что обычно и связывают с понятием робастного оптимального управления.

Рассмотренную математическую модель можно интерпретировать, в частности, как горизонтальные колебания высотного здания при сейсмических воздействиях. Таким образом, наиболее эффективная сейсмоизоляция, как следует из таблицы, будет в том случае, когда виброизолятор расположен между фундаментом и седьмым этажом десятиэтажного здания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93-013-16282).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурецкий В. В.* Предельные возможности защиты оборудования от воздействия ударов//Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 76—81.
2. *Гурецкий В. В.* О предельных возможностях амортизации при вибрационных нагрузках//Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 1. С. 51—54.
3. *Гурецкий В. В., Мазин Л. С.* О предельных возможностях активной виброзащиты//Прикл. механика. 1976. Т. 12. № 7. С. 109—113.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
6. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1966. 992 с.
7. *Болотник Н. Н.* Задачи оптимальной амортизации для классов внешних воздействий//Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 4. С. 34—41.
8. *Баландин Д. В.* Оптимизация противоударных амортизаторов для класса внешних воздействий//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 53—60.
9. *Федоров В. В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 280 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
12.XI.1992