МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1994

УДК 539.374

© 1994 г. О. А. ВОЛОХОВСКАЯ, В. В. ПОДАЛКОВ

К РАСЧЕТУ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В СТОХАСТИЧЕСКИХ КОМПОЗИЦИОННЫХ СРЕДАХ

Предложен метод расчета упругопластических деформаций в стохастических композиционных средах, компоненты которых подчиняются изотропному закону упрочнения с соответствующим ассоциированным законом течения. Макроскопическое реологическое уравнение композита получено в предположении, что поверхности нагружения составляющих зависят от средних напряжений в этих компонентах. Проведено сопоставление расчетных и экспериментальных кривых деформирования для медно-вольфрамовой композиции при растяжении. Поведение предложенной модели при непропорциональном нагружении проверялось путем вычисления продольного модуля догрузки под некоторым углом к оси предварительного растяжения в пластической области. Модели стохастических упругопластических сред на основе иных подходов рассматривались в [1—3].

1. Рассмотрим микронеоднородную среду, состоящую из равномерно перемешанных идеально сцепленных между собой однородных и изотропных составляющих. Пусть $q = 1, \ldots, m$ — упругие компоненты, а $q = m+1, \ldots, n$ — упругопластические. В каждой точке композиционного материала выполнен локальный закон Гука

$$s_{ij}^{(q)} = 2\mu_q (e_{ij}^{(q)} - \varepsilon_{ij}^{(q)}), \quad \sigma_{jj}^{(q)} = 3K_q E_{jj}^{(q)} \tag{1.1}$$

где $S_{ij}^{(q)}, e_{ij}^{(q)}$ — девиаторы локальных напряжений $\sigma_{ij}^{(q)}$ и полных деформаций $E_{ij}^{(q)}$, $\varepsilon_{ij}^{(q)}$ — пластические деформации $(\varepsilon_{jj}^{(q)} = 0)$, причем $\varepsilon_{ij}^{(q)} = 0$ при $q = 1, \ldots, m$.

Будем полагать, что в упругопластической области элементы композиции подчиняются изотропному закону упрочнения. Тогда уравнение поверхности нагружения для q-го $(q = m+1, \ldots, n)$ компонента можно задать в виде [4]:

$$f_q(s_{ij}^{(q)}) = \varphi_q(\gamma_q) \tag{1.2}$$

Здесь φ_f — возрастающая функция меры изотропного упрочнения γ_q, f_q — функция инвариантов девиатора локальных напряжений; γ_q может быть определено, например, соотношениями

$$\gamma_{q1} = \int s_{ij}^{(q)} d\varepsilon_{ij}^{(q)} \tag{1.3}$$

$$\gamma_{q2} = \int \sqrt{2 d\varepsilon_{ij}^{(q)} d\varepsilon_{ij}^{(q)}} \tag{1.4}$$

где в (1.3) γ_q соответствует работе пластической деформации, а в (1.4) — параметру Одквиста.

Ассоциированный с (1.2) закон течения будет иметь вид

$$d\varepsilon_{ij}^{(q)} = g_q \frac{\partial f_q}{\partial s_{ij}^{(q)}} d'f_q, \quad d'f_q > 0$$

$$d\varepsilon_{ij}^{(q)} = 0, \quad d'f_q \le 0 \left(d'f_q = \frac{\partial f_q}{\partial s_{ij}^{(q)}} ds_{ij}^{(q)}\right) \tag{1.5}$$

где $g_q(\gamma_q)$ — функция упрочнения, зависящая от истории деформирования q-го компонента. Очевидно, что $g_q > 0$.

При выборе меры упрочнения в соответствии (1.3), (1.4) найдем:

$$g_{q1} = (\varphi_q' s_{ij}^{(q)} \partial f_q / \partial s_{ij}^{(q)})^{-1} \tag{1.6}$$

$$g_{q2} = (\varphi_q' \partial f_q / \partial s_{ij}^{(q)}\, \partial f_q / \partial s_{ij}^{(q)})^{-1} \tag{1.7}$$

Из (1.5) определим зависимость между приращениями пластических деформаций и девиатора напряжений в q-м упругопластическом компоненте среды:

$$d\varepsilon_{ij}^{(q)} = \Phi_{ijkl}^{(q)} ds_{kl}^{(q)} \quad (q = m+1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

$$\Phi_{ijkl}^{(q)}(s_{ij}^{(q)}) = \xi_q g_q\, \partial f_q / \partial s_{ij}^{(q)}\, \partial f_q / \partial s_{kl}^{(q)} \tag{1.9}$$

где $\xi_q = 1$ при $d'f_q > 0$ и $\xi_q = 0$ при $d'f_q \leq 0$.

Тензор $\Phi_{ijkl}^{(q)}$ зависит от предыстории деформирования q-й составляющей через $g_q(\gamma_q)$ и текущего значения девиатора локальных напряжений $s_{ij}^{(q)}$.

Пространственную структуру композита опишем с помощью случайных индикаторных функций координат $\varkappa_q(\mathbf{r})$ $(q = 1, \ldots, n)$, принимающих значение 1 на множестве точек q-го компонента и 0 — вне этого множества. Тогда локальный закон Гука для рассматриваемой среды запишется в виде

$$s_{ij}(\mathrm{r}) = 2\mu(\mathrm{r})(e_{ij}(\mathrm{r}) - \varepsilon_{ij}(\mathrm{r})), \quad \sigma_{jj}(\mathrm{r}) = 3K(\mathrm{r})E_{jj}(\mathrm{r}) \tag{1.10}$$

$$\mu(\mathrm{r}) = \sum_{q=1}^{n} \mu_q \varkappa_q(\mathrm{r}), \quad K(\mathrm{r}) = \sum_{q=1}^{n} K_q \varkappa_q(\mathrm{r})$$

$$\varkappa_q(\mathrm{r})\,\varepsilon_{ij}(\mathrm{r}) \equiv 0 \quad (q = 1, \ldots, m)$$

Будем предполагать, что все рассматриваемые случайные поля $s_{ij}(\mathrm{r})$, $e_{ij}(\mathrm{r})$, $\varepsilon_{ij}(\mathrm{r})$ и $\varkappa_q(\mathrm{r})$ статистически однородны и эргодичны. Тогда их математические ожидания могут быть заменены средними по объемам компонентов (V_q) и композита (V) величинами.

В каждой точке композита уравнения состояния (1.10) должны быть дополнены уравнениями равновесия $\nabla_j \sigma_{ij}(\mathrm{r}) = 0$, где ∇_j — оператор дифференцирования по j-й координате. Подставляя в них соотношения (1.10) и преобразуя полученные дифференциальные уравнения относительно перемещений u_j $(2E_{ij} = \nabla_j u_i + \nabla_i u_j)$ в интегральные с помощью функции Грина однородной бесконечной среды [5] в рамках гипотезы сингулярного приближения найдем для произвольной точки композита

$$e_{ij}(\mathrm{r}) = \langle e_{ij}\rangle + \alpha_0 [Q_{ij}(\mathrm{r}) - \langle Q_{ij}\rangle] \tag{1.11}$$

$$E_{jj}(\mathrm{r}) = \langle E_{jj}\rangle + \beta_0 P(\mathrm{r})$$

$$Q_{ij}(\mathrm{r}) = e_{ij}(\mathrm{r}) - \sum_{q=1}^{n} m_q \varkappa_q(\mathrm{r})[e_{ij}(\mathrm{r}) - \varepsilon_{ij}(\mathrm{r})]$$

$$\langle Q_{ij}\rangle = \langle s_{ij}\rangle (2\mu_0)^{-1} - \langle e_{ij}\rangle = \mathrm{E}_{ij}$$

$$P(\mathrm{r}) = E_{jj}(\mathrm{r}) - \sum_{q=1}^{n} k_q(\mathrm{r})\varkappa_q(\mathrm{r}) E_{jj}(\mathrm{r}) \tag{1.12}$$

$$\alpha_0 = \frac{2(4 - 5\nu_0)}{15(1 - \nu_0)}, \quad \beta_0 = \frac{1 + \nu_0}{3(1 - \nu_0)}, \quad \nu_0 = \frac{3K_0 - 2\mu_0}{3(\mu_0 + 3K_0)}$$

где $m_q = \mu_q \mu_0^{-1}$, $k_q = K_q K_0^{-1}$, E_{ij} — макроскопические пластические деформации;

μ_0, K_0 — эффективные упругие константы материала, введенные с помощью соотношений

$$\langle s_{ij}\rangle = 2\mu_0 (\langle e_{ij}\rangle - E_{ij}), \ \langle \sigma_{jj}\rangle = 3K_0 \langle E_{jj}\rangle \tag{1.13}$$

Из (1.12) и (1.11) для q-того компонента найдем

$$e_{ij}^{(q)} = \langle e_{ij}\rangle + \alpha_0 [\varepsilon_{ij}^{(q)} - m_q (e_{ij}^{(q)} - \varepsilon_{ij}^{(q)}) - \langle e_{ij}\rangle + \langle s_{ij}\rangle (2\mu_0)^{-1}]$$

$$E_{ij}^{(q)} = \langle E_{jj}\rangle + \beta_0 (1 - k_q) E_{jj}^{(q)} \tag{1.14}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(q)} = 0 \ (q = 1, \ldots, m)$$

Разрешая соотношения (1.14) относительно $e_{ij}^{(q)}$ и $E_{jj}^{(q)}$, из (1.1) получим

$$S_{ij}^{(q)} = 2\mu_0 m_q^{\circ} [\eta_{ij} - (1 - \alpha_0) \varepsilon_{ij}^{(q)}], \ \sigma_{jj}^{(q)} = 3K_0 k_q^{\circ} \langle E_{jj}\rangle$$

$$\varepsilon_{ij}^{(q)} = 0 \ (q = 1, \ldots, m) \tag{1.15}$$

$$\eta_{ij} = (1 - \alpha_0) \langle e_{ij}\rangle + \alpha_0 \langle s_{ij}\rangle (2\mu_0)^{-1} \tag{1.16}$$

$$m_q^{\circ} = m_q [1 + \alpha_0 (m_q - 1)]^{-1}, \ k_q^{\circ} = k_q [1 + \beta_0 (k_{q-1})]^{-1}$$

Переходя далее от девиаторов конечных величин к их приращениям и обозначая $\dot{a} = da$, из (1.15) с учетом (1.8) найдем:

$$\dot{s}_{ij}^{(q)} = 2\mu_0 \Psi_{ijkl}^{(q)} \dot{\eta}_{kl} \tag{1.17}$$

$$\Psi_{ijkl}^{(q)} = m_q^{\circ} [I_{ijkl} + 2\mu_0 (1 - \alpha_0) m_q^{\circ} \Phi_{ijkl}^{(q)}]^{-1} \tag{1.18}$$

$$I_{ijkl} = (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl})/2$$

где δ_{ij} — тензор Кронеккера, $\Phi_{ijkl}^{(q)}$ определяется соотношением (1.9). Для объемной составляющей локальных напряжений имеем соотношение упругости

$$\sigma_{ij}^{(q)} = \langle \sigma_{jj}\rangle [1 + \beta_0 (k_q - 1)]^{-1} \tag{1.19}$$

Для определения макроскопического реологического уравнения соотношение (1.17) нужно осреднить по всему объему композита с учетом того обстоятельства, что тензор $\Psi_{ijkl}^{(q)}$ зависит от локального напряженного состояния среды и всей предыстории деформирования. Для упрощения разрешимости осредненного уравнения предположим, что уравнение поверхности нагружения q-го компонента (1.2) зависит от средних значений девиатора напряжений $\langle s_{ij}\rangle_q$ в этом компоненте, где символ $\langle\,\rangle_q$ означает осреднение по объему V_q. Тогда тензорные функции $\Phi_{ijkl}^{(q)}$ и $\Psi_{ijkl}^{(q)}$ также зависят лишь от инвариантов $\langle s_{ij}\rangle_q$.

Поскольку рассматриваемая модель использует предположения теории течения, т. е. ставит своей задачей определение связи между напряжениями и деформациями при малой догрузке относительно существующего напряженного состояния, то макроскопические и средние в компонентах напряжения и деформации $\langle s_{ij}\rangle$, $\langle e_{ij}\rangle$, $\langle E_{ij}\rangle$, E_{ij}, $\langle s_{ij}\rangle_q$, $\langle e_{ij}\rangle_q$, $\langle E_{ij}\rangle_q$, $\langle \varepsilon_{ij}\rangle_q$ считаются известными, а величины $\Phi_{ijkl}^{(q)}$, $\Psi_{ijkl}^{(q)}$ имеют некоторые фиксированные значения.

Осредняя локальные напряжения композита по объему тела V, применив правило механического смешивания компонентов, получим

$$\langle \dot{s}_{ij}\rangle = \sum_{q=1}^{n} v_q \langle \dot{s}_{ij}\rangle_q, \ \langle \sigma_{jj}\rangle = \sum_{q=1}^{n} v_q \langle \sigma_{jj}\rangle_q \tag{1.20}$$

где $v_q = V_q V^{-1}$ $(q = 1, \ldots, n)$ — объемные концентрации составляющих.

Без ограничения общности можно считать, что при догрузке напряжениями $\langle \dot{\sigma}_{ij}\rangle$ первые $q = 1, \ldots, p \geq m$ составляющих деформируются упруго. Это возможно в двух случаях: деформирование при локальных напряжениях ниже предела текучести данного компонента, либо разгрузка или нейтральное нагружение первоначально пластически деформированной составляющей ($q > m$), так что

$$\frac{\partial f_q}{\partial \langle s_{ij} \rangle_q} \langle \dot{s}_{ij} \rangle_q \leq 0, \ \xi_q = 0, \ \Phi^{(q)}_{ijkl} = 0 \tag{1.21}$$

Тогда из (1.15)—(1.21) будем иметь

$$\begin{aligned} &\langle \dot{s}_{ij} \rangle = 2\mu_0 m^0_q \dot{\eta}_{ij} \quad (q = 1, \ldots, p) \\ &\langle \dot{s}_{ij} \rangle = 2\mu_0 \Psi^{(q)}_{ijkl} \dot{\eta}_{kl} \quad (q = p + 1, \ldots, n) \\ &\langle \sigma_{jj} \rangle = 3K_0 k^0_q \langle E_{jj} \rangle \quad (q = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1.22}$$

Из (1.22) и (1.20) найдем

$$\langle \dot{s}_{ij} \rangle = 2\mu_0 A_{ijkl} \dot{\eta}_{kl} \tag{1.23}$$

$$A_{ijkl} = I_{ijkl} \sum_{q=1}^{n} m^0_q v_q + \sum_{q=p+1} \Psi^{(q)}_{ijkl} v_q \tag{1.24}$$

Подставляя далее $\dot{\eta}_{ij}$ из (1.16) в (1.23) и разрешая последнее соотношение относительно $\langle \dot{s}_j \rangle$, получим макроскопическое уравнение упругопластического деформирования композиционного материала:

$$\begin{aligned} &\langle \dot{s}_{ij} \rangle = 2M_{ijkl} \langle \dot{e}_{kl} \rangle \\ &M_{ijkl} = \mu_0 (1 - \alpha_0) \left[I_{ijmn} - \alpha_0 A_{ijmn} \right]^{-1} A_{mnkl} \end{aligned} \tag{1.25}$$

Для объемной составляющей напряжений найдем соотношение

$$\langle \sigma_{jj} \rangle = 3K_0 \sum_{q=1}^{n} k^0_q v_q \langle E_{jj} \rangle \tag{1.26}$$

Уравнения для эффективных упругих констант композита получим из (1.15), (1.26) и (1.13) в предположении, что пластические деформации в среде отсутствуют. После тождественных преобразований будем иметь

$$\sum_{q=1}^{n} v_q \left[1 + \alpha_0 (m_q - 1) \right]^{-1} = 1, \ \sum_{q=1}^{n} v_q \left[1 + \beta_0 (k_q - 1) \right]^{-1} = 1 \tag{1.27}$$

$$\alpha_0 = \frac{6 (K_0 + 2\mu_0)}{5 (3K_0 + 4\mu_0)}, \ \beta_0 = \frac{3K_0}{(3K_0 + 4\mu_0)}$$

Соотношения (1.27) совпадают с известными уравнениями самосогласованной схемы осреднения [5].

Макроскопические пластические деформации в материале найдем из (1.20) с учетом соотношений (1.16), (1.27), и (1.13):

$$\mathrm{E}_{ij} = \sum_{q=p+1}^{n} m^0_q v_q \langle \varepsilon_{ij} \rangle_q \tag{1.28}$$

Система уравнений (1.25)—(1.28) полностью описывает макроскопическое поведение композиционного материала в упругопластической области при заданных функциях f_q, φ_q $(q = 1, \ldots, n)$.

2. Применение предложенной модели проиллюстрируем на примере простого нагружения композиционного материала. Примем, что уравнения поверхностей нагружения компонентов зависят лишь от квадратичных инвариантов $\langle s_{ij} \rangle_q$:

$$f_q (\langle s_{ij} \rangle_q) = \langle s_{ij} \rangle_q \langle s_{ij} \rangle_q \quad (q = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Функции изотропного упрочнения составляющих зададим в виде

$$\varphi_q(\gamma_q) = a_q(\gamma_q + b_q)^{p_q}$$

$$\varphi_q(0) = \tau_q^2 \quad (q = 1, \ldots, n) \qquad (2.2)$$

где τ_q — пределы текучести фаз; a_q, b_q, p_q — константы материалов, подлежащие определению по экспериментальным кривым деформирования компонентов при какой-либо известной программе нагружения.

Выбирая в качестве меры изотропного упрочнения работу пластической деформации (1.3), из (2.1), (2.2) и (1.5) получим ассоциированный закон течения для q-й составляющей

$$d\langle\varepsilon_{ij}\rangle_q = D_q \langle s_{ij}\rangle_q (\langle s_{mn}\rangle_q \langle s_{mn}\rangle_q)^{l_q} \langle s_{kl}\rangle_q d\langle s_{kl}\rangle_q$$

$$\langle s_{kl}\rangle_q d\langle s_{kl}\rangle_q > 0 \qquad (2.3)$$

$$d\langle\varepsilon_{ij}\rangle_q = 0 \quad (\langle s_{kl}\rangle_q d\langle s_{kl}\rangle_q \leq 0)$$

$$D_q = 2/(p_q a_q^{r_q}), \quad l_q = (1 - 2p_q) r_q, \quad r_q = p_q^{-1}$$

Рассмотрим растяжение композита напряжением $\langle\sigma_{11}\rangle = \sigma$. В q-м компоненте будем иметь

$$\langle s_{11}\rangle_q = 2/3\,\sigma_q, \quad \langle s_{22}\rangle_q = \langle s_{33}\rangle_q = -1/3\,\sigma_q$$

$$\langle s_{12}\rangle_q = \langle s_{13}\rangle_q = \langle s_{23}\rangle_q = 0 \qquad (2.4)$$

Из (2.3) и (2.4) получим

$$d\varepsilon_q = \frac{2}{p_q}\left(\frac{2}{3a_q}\right)^{r_q} (\sigma_q)^{n_q} d\sigma_q, \quad \sigma_q d\sigma_q > 0$$

$$d\varepsilon_q = 0, \quad \sigma_q d\sigma_q \leq 0 \qquad (2.5)$$

$$\sigma_q = \langle\sigma_{11}\rangle_q, \quad \varepsilon_q = \langle\varepsilon_{11}\rangle_q, \quad n_q = 2(1 - p_q) r_q$$

Соотношения (2.5) при монотонном нагружении допускают интегрирование и позволяют определить коэффициенты упрочнения составляющих по экспериментальным кривым растяжения соответствующих материалов, для q-того элемента

$$\varepsilon_q^0 = A_q(\sigma_{q*}^{z_q} - 1), \quad \sigma_{q*} = \sigma_q^0 \sigma_{0q}^{-1}, \quad \sigma_{q*} \geq 1 \qquad (2.6)$$

$$A_q = \frac{2}{2 - p_q}\left(\frac{2}{3a_q}\right)^{r_q} (\sigma_{0q})^{z_q}, \quad z_q = \frac{2 - p_q}{p_q}$$

где σ_q^0, ε_q^0 — напряжения и пластические деформации в образце из q-го материала при растяжении, σ_{0q} — предел текучести.

Из соотношений (1.15) и (2.5) найдем зависимость между приращениями напряжений и пластических деформаций в q-м компоненте композита

$$d\sigma_q = 3\mu_0 m_q^0 \left[d\eta - \xi_q(1 - \alpha_0)\frac{2}{p_q}\left(\frac{2}{3a_q}\right)^{r_q} (\sigma_q)^{n_q} d\sigma\right], \quad \eta = \eta_{11} \qquad (2.7)$$

$$\xi_q = 1, \quad \sigma_q d\sigma_q > 0 \vee \sigma_q \geq \sigma_{0q}$$

$$\xi_q = 0, \quad \sigma_q d\sigma_q \leq 0 \wedge \sigma_q < \sigma_{0q}$$

Проводя интегрирование в (2.7) в пределах от σ_{0q} до σ_q, получим (H_0 — модуль Юнга):

$$\sigma_q + \xi_q B_q (\sigma_q^{z_q} + \sigma_{0q}^{z_q}) = m_q^0 \theta \qquad (2.8)$$

$$\theta = \sigma + 3\mu_0 (1 - \alpha_0) \mathrm{E} = (1 - \alpha_0) H_0 E + \alpha_0 \sigma \qquad (2.9)$$

$$B_q = 0 \; (q = 1, \ldots, m)$$

$$B_q = 3\mu_0 (1 - \alpha_0) A_q (\sigma_{0q})^{-z_q} \; (q = m + 1, \ldots, n)$$

$$E = \langle E_{11} \rangle, \; \mathrm{E} = \mathrm{E}_{11}$$

При интегрировании в (2.8) учтено, что $\sigma_{0q} = m_q^0 \theta_{0q}$, где θ_{0q} — значение параметра θ, при котором начинаются пластические деформации в q-м компоненте среды. Величины θ_{0q} $(q = 1, \ldots, n)$, расположенные в порядке их возрастания, определяют очередность вступления компонентов в состояние текучести.

Соотношения (2.8) позволяют построить кривую упругопластического деформирования среды при растяжении (или любым простым нагружении) по следующей схеме. При заданных объемных концентрациях составляющих $v_1, \ldots, v_n$ для каждого значения θ из (2.8) определяются напряжения в компонентах σ_q, затем по правилу смесей (1.20) — макроскопические напряжения σ, и из соотношения (2.9) — макроскопические деформации E и E.

Расчет диаграмм деформирования был проведен для двухкомпонентного композиционного материала, полученного путем пропитки каркаса из спеченного вольфрамового порошка расплавом меди. На фиг. 1 приведены аппроксимации экспериментальных кривых растяжения элементов композиции по данным из [7—9] зависимостями (2.6). По оси абсцисс откладывалась пластическая деформация в процентах, по оси ординат — безразмерное растягивающее напряжение $\sigma_{q*} = \sigma\sigma_{0q}^{-1}$, где $q = 1$ соответствует вольфраму (кривая *1*), а $q = 2$ — меди (кривая *2*).

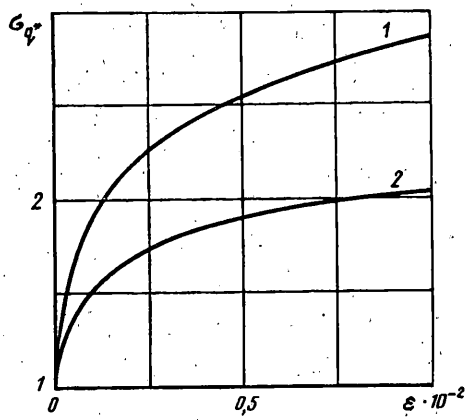
Для расчетов были использованы следующие значения упругих констант и параметров упрочнения: $H_1 = 413$ ГПа, $\mu_1 = 159$ ГПа, $\sigma_{01} = 0{,}36$ ГПа, $A_1 = 2{,}080 \times 10^{-4}$, $z_1 = 5{,}9$ (вольфрам); $H_2 = 123$ ГПа, $\mu_2 = 18{,}05$ ГПа, $\sigma_{02} = 0{,}038$ ГПа, $A_2 = 2{,}02 \times \times 10^{-5}$, $z_2 = 8{,}5$ (медь); где H_1, H_2 — модули Юнга компонентов.

На фиг. 2 представлена зависимость модуля Юнга композита, рассчитанная по уравнениям (1.27), от объемной концентрации вольфрама (кривая *2*). Кривые *1*, *3* соответствуют границе вилки Кашина — Штрикмана: *1* — однородная деформация, *3* — однородное напряженное состояние. На этой же фигуре приведены экспериментальные значения модуля упругости для сред разной структуры по данным из [8]: темные точки соответствуют медной матрице, армированной одноориентированными вольфрамовыми волокнами, кресты — медной матрице с диспергированным вольфрамом, светлые точки — сплошному вольфрамовому каркасу с диспергированной медью.

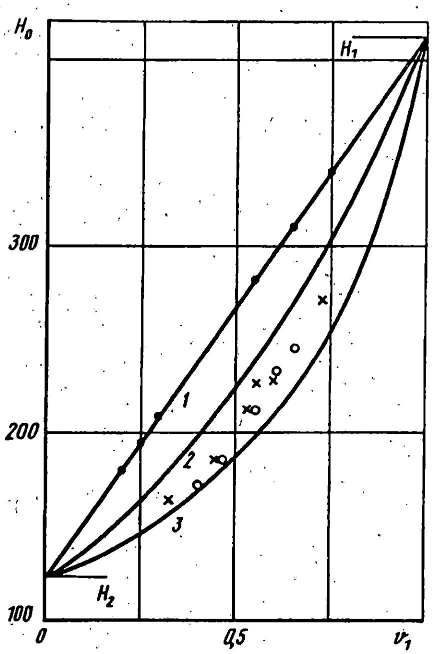
Расчетные диаграммы упругопластического деформирования порошковой композиции вольфрам-медь при различном объемном содержании вольфрама изображены на фиг. 3 сплошными линиями, штриховые кривые соответствуют экспериментальным данным работы [8].

Выбирались следующие значения объемной концентрации вольфрама: *1* — $v_1 = 0{,}662$, *2* — $v_1 = 0{,}582$, *3* — $v_1 = 0{,}512$, *4* — $v_1 = 0{,}464$, *5* — $v_1 = 0{,}412$.

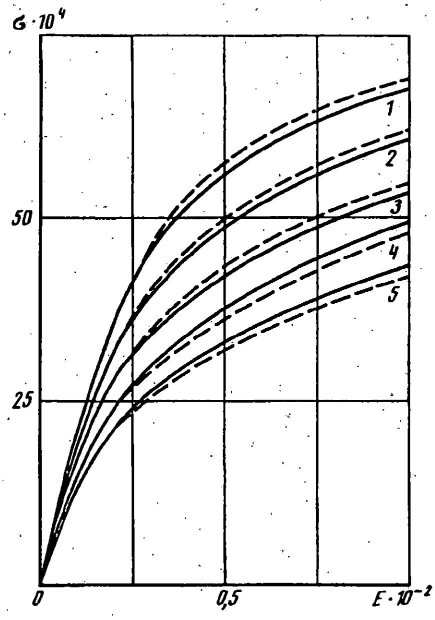
Наблюдающиеся отклонения теоретических кривых на фиг. 3 от экспериментальных объясняются отсутствием опытных данных для компонентов вольфрамово-медной композиции из [8]. Вследствие превалирующего влияния вольфрамового каркаса при пластическом деформировании композита, диаграмма его упрочнения по данным из [7, 9] уточнялась по экспериментальной зависимости 1 на фиг. 3 для композита с наибольшей объемной концентрацией вольфрама, что давало заниженные значения для параметров упрочнения вольфрама (кривая *1*, фиг. 1). Для меди же использовались опытные результаты [7, 9], дающие, по-видимому, завышенные значения параметров упрочнения этой фазы (кривая *2*, фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

При общем достаточно хорошем совпадении теоретических и экспериментальных зависимостей для композита, это приводило к заниженным значениям расчетных напряжений при $v_1 > 0{,}5$ (кривые *1*, *2*, *3* на фиг. 3) и завышенным — при $v_1 < 0{,}5$ (кривые *4*, *5* на фиг. 3).

3. Рассмотрим догрузку напряжениями $\dot{\sigma}_\alpha$ под углом α к оси первоначального растяжения в пластической области. В проекциях на прежние оси компоненты девиатора напряжений догрузки будут иметь значения:

$$\langle \dot{s}_{11} \rangle = a_1 \dot{\sigma}_\alpha,\ \langle \dot{s}_{22} \rangle = a_2 \dot{\sigma}_\alpha,\ \langle \dot{s}_{33} \rangle = a_3 \dot{\sigma}_\alpha$$

$$\langle \dot{s}_{12} \rangle = a_{12} \dot{\sigma}_\alpha,\ \langle \dot{s}_{23} \rangle = \langle \dot{s}_{13} \rangle = 0 \tag{3.1}$$

$$a_1 = \frac{2 - \chi^2}{3(1 + \chi^2)},\ a_2 = \frac{2\chi^2 - 1}{3(1 + \chi^2)},\ a_{12} = \frac{\chi}{1 + \chi},\ a_3 = -\frac{1}{3} \tag{3.2}$$

$\chi = \operatorname{tg} \alpha$

Определим компоненты девиаторов догрузки в составляющих композита $\langle s_{kl} \rangle_q$ ($q = 1, \ldots, n$). Выбирая уравнения поверхностей нагружения в виде (2.1), а функции упрочнения в форме (2.2), из (1.9) найдем тензор $\Phi^{(q)}_{ijkl}$ в момент догрузки

$$\Phi^{(q)}_{ijkl} = F_q \langle s_{ij} \rangle_q \langle s_{kl} \rangle_q \tag{3.3}$$

$$F_q = \frac{2}{p_q a_q^{r_q}} (\langle s_{mn} \rangle_q \langle s_{mn} \rangle_q)^{l_q}$$

При растяжении напряжениями $\langle \sigma_{11} \rangle$ компоненты девиаторов локальных напряжений определялись соотношениями (2.4), поэтому для F_q получим

$$F_q = \frac{9}{2p_q} \left(\frac{2}{3a_q} \right)^{r_q} (\sigma_q)^{2l_q} \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) определим ненулевые компоненты $\Phi^{(q)}_{ijkl}$:

$$\Phi^{(q)}_{1111} = c_q, \quad \Phi^{(q)}_{1122} = \Phi^{(q)}_{1133} = -\tfrac{1}{2} c_q, \quad \Phi^{(q)}_{2222} = \Phi^{(q)}_{2233} = \Phi^{(q)}_{3333} = \tfrac{1}{4} c_q \tag{3.5}$$

$$c_q = \frac{2}{p_q} \left(\frac{2}{3a_q} \right)^{r_q} (\sigma_q)^{z_q - 1} = \frac{z_q A_q}{\sigma_{0q}} (\sigma_{q*})^{z_q - 1} \tag{3.6}$$

где c_q^{-1} — касательный пластический модуль диаграммы растяжения q-го компонента, A_q и z_q соответствует (2.6).

Пластические деформации в составляющих композита при догрузке найдем из (1.8):

$$\langle \dot{\varepsilon}_{11} \rangle_q = \tfrac{3}{2} c_q \langle \dot{s}_{11} \rangle_q, \quad \langle \dot{\varepsilon}_{22} \rangle_q = \langle \dot{\varepsilon}_{33} \rangle_q = -\tfrac{3}{4} c_q \langle \dot{s}_{11} \rangle_q$$

$$\langle \dot{\varepsilon}_{12} \rangle_q = \langle \dot{\varepsilon}_{13} \rangle_q = \langle \dot{\varepsilon}_{33} \rangle_q \tag{3.7}$$

Подставляя выражения (3.7) в первое из соотношений (1.15), разрешим полученную систему уравнений относительно $\langle \dot{s}_{ij} \rangle_q$. Тогда найдем

$$\langle \dot{s}_{11} \rangle_q = d_q \dot{\theta}_{11}, \quad \langle \dot{s}_{22} \rangle = \tfrac{1}{2} (m_q^0 - d_q)\, \dot{\theta}_{11} + m_q^0 \dot{\theta}_{22} \tag{3.8}$$

$$\langle \dot{s}_{33} \rangle_q = -\tfrac{1}{2} (m_q^0 + d_q)\, \dot{\theta}_{11} - m_q^0 \dot{\theta}_{22}, \quad \langle \dot{s}_{12} \rangle_q = m_q^0 \dot{\theta}_{12}$$

$$\dot{\theta}_{ij} = 2\mu_0 (1 - \alpha_0) \langle \dot{e}_{ij} \rangle + \alpha_0 \langle \dot{s}_{ij} \rangle \tag{3.9}$$

$$d_q = m_q^0 \, [1 + 3\mu_0 (1 - \alpha_0)\, c_q m_q^0]^{-1}$$

Для составляющих девиатора напряжений в композите из (1.20) с учетом (3.8) получим

$$\langle \dot{s}_{11} \rangle = \langle d \rangle\, \dot{\theta}_{11}, \quad \langle \dot{s}_{22} \rangle = \tfrac{1}{2} (1 - \langle d \rangle)\, \dot{\theta}_{11} + \dot{\theta}_{22}$$

$$\langle \dot{s}_{33} \rangle = -\tfrac{1}{2} (1 + \langle d \rangle)\, \dot{\theta}_{11} - \dot{\theta}_{22}, \quad \langle \dot{s}_{12} \rangle = \dot{\theta}_{12} \tag{3.10}$$

$$\langle d \rangle = \sum_{q=1}^{n} v_q d_q$$

причем для упругих составляющих ($q = 1, \ldots, p$) $d_q = m_q^0$, так как $c_q = 0$.

Разрешим уравнения (3.10) относительно девиаторов полных макроскопических деформаций материала. С учетом первого из соотношений (3.9) и равенств (3.1), найдем их компоненты в плоскости нагружения:

N	$\langle\sigma\rangle/\sigma_{01}$	σ_{2*}	σ_{1*}	$\langle d\rangle$
1	< 0,14	< 1,0	(0,19)	> 0,87
2	0,14	1,0	0,19	0,87
3	0,157	1,1	0,214	0,796
4	0,196	1,3	0,281	0,668
5	0,512	1,61	0,999	0,585
6	0,512	1,61	1,0	0,556
7	0,726	1,751	1,5	0,318
8	0,937	1,825	2,0	0,218
9	1,368	2,130	3,0	0,046
10	1,802	2,490	4,0	0,012

$$\langle \dot e_{11}\rangle = \frac{1-\alpha_0\langle d\rangle}{2\mu_0(1-\alpha_0)\langle d\rangle}\,a_1\dot\sigma_\alpha,\quad \langle \dot e_{12}\rangle = \frac{a_{12}}{2\mu_0}\,\dot\sigma_\alpha$$

$$\langle \dot e_{22}\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\left[a_2 - \frac{(1-\langle d\rangle)\,a_1}{2(1-\alpha_0)\langle d\rangle}\right]\dot\sigma_\alpha \tag{3.11}$$

Полные деформации определятся по формулам

$$\langle \dot E_{ij}\rangle = \langle \dot e_{ij}\rangle + 1/9\,\langle\dot\sigma_{jj}\rangle\,\delta_{ij}/K_0,\quad \langle\dot\sigma_{jj}\rangle = \dot\sigma_\alpha \tag{3.12}$$

Вычислим продольный модуль композита в направлении догрузки из соотношения

$$\dot\sigma_\alpha = H_\alpha \dot E_\alpha \tag{3.13}$$

где $\dot E_\alpha$ — приращение полной макроскопической деформации в направлении догрузки. Для $\dot E_\alpha$ будем иметь

$$\dot E_\alpha = l_{\alpha k} l_{\alpha j}\langle \dot E_{kj}\rangle = \langle \dot e_\alpha\rangle + 1/9\,\langle\dot\sigma_{jj}\rangle\,\delta_{ij}/K_0 \tag{3.14}$$

$$\langle \dot e_\alpha\rangle = \langle \dot e_{11}\rangle\cos^2\alpha + \langle \dot e_{22}\rangle\sin^2\alpha + \langle \dot e_{12}\rangle\sin 2\alpha$$

где $l_{\alpha k}$ — косинус угла между направлением догрузки и k-й осью тензора первоначального нагружения.

Из соотношений (3.11)—(3.14) найдем

$$H_\alpha = 2\mu_0\left[\frac{(t-2)^2 + 3\langle d\rangle\, t\,(4+t)}{6(1-\alpha_0)\langle d\rangle(1+t)^2} - \zeta_0\right]^{-1} \tag{3.15}$$

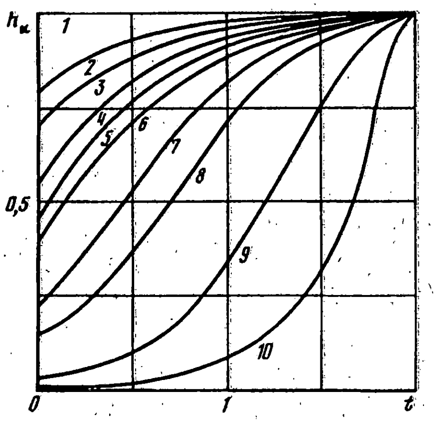
$$\zeta_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{2\alpha_0}{1-\alpha_0} - \frac{1-2\nu_0}{1+\nu_0}\right),\quad t = \mathrm{tg}^2\,\alpha$$

Условие активного нагружения в рассматриваемом случае принимает вид

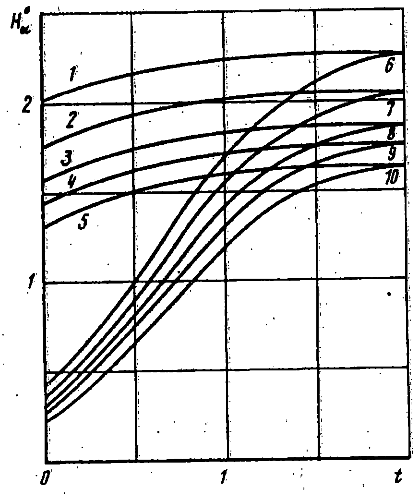
$$a_1\sigma_q\dot\sigma_\alpha > 0 \tag{3.16}$$

где $\sigma_q = \langle\sigma_{11}\rangle_q$ — среднее напряжение в q-м компоненте композита к моменту догрузки. При предварительном растяжении $\sigma_q > 0$, и из соотношений (3.16) и (3.2) находим области активной догрузки: $|\mathrm{tg}\,\alpha| < \sqrt{2}$, при $\dot\sigma_\alpha > 0$ (растяжение), $|\mathrm{tg}\,\alpha| > \sqrt{2}$, при $\dot\sigma_\alpha < 0$ (сжатие). Вне указанных границ догрузка осуществляется упругим образом.

На фиг. 4 представлены зависимости безразмерного модуля догрузки



Фиг. 4



Фиг. 5

$h_\alpha = H_\alpha H_0^{-1}$ (H_0 — модуль Юнга композита) от параметра $t = \mathrm{tg}^2\,\alpha$ при различной глубине предварительного пластического деформирования (таблица) для композиции вольфрам — медь с объемной концентрацией вольфрама $v_1 = 0{,}412$. В таблице N — номера кривых, кривая *1* соответствует стадии деформирования материала при двух упругих компонентах, кривые *2—5* — стадии с пластической медью и упругим вольфрамом, кривые *6—10* — стадии пластического деформирования обоих компонентов композиции.

Зависимость модуля догрузки $H^0_\alpha = H_\alpha H_{02}^{-1}$ (H_{02} — модуль Юнга меди) от параметра t при различной объемной концентрации вольфрама изображена на фиг. 5: 1,6 — $v_1 = 0{,}662$; 2,7 — $v_1 = 0{,}582$; 3,8 — $v_1 = 0{,}512$; 4,9 — $v_1 = 0{,}464$; 5, 10 — $v_1 = 0{,}412$. Кривые *1—5* соответствуют напряженно-деформированному состоянию композита при $\sigma_{2*} = 1$, кривые *6—10* — $\sigma_{1*} = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сараев Л. А.* Упругопластические свойства многокомпонентных композиционных материалов//ПМТФ. 1988. № 4. С. 124 — 130.
2. *Дудукаленко В. В., Смыслов Ю. А.* К расчету предела пластичности пористых материалов//Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 5. С. 32—36.
3. *Волоховская О. А., Подалков В. В.* О пластическом деформировании изотропно упрочняющегося поликристаллического материала//ПМТФ. 1991. № 5. С. 148—153.
4. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
5. *Эшелби Д.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во Иностр. лит., 1963. 247 с.
6. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
7. Свойства элементов: Справочник. Ч. I. Физические свойства/Под редакцией Г. В. Самсонова. М.: Металлургия, 1976. 599 с.
8. *Крок Р.* Неорганические порошковые композиции//Современные композиционные материалы/Под ред. Л. Браутмана и Р. Крока. М.: Мир. 1970. С. 555—583.
9. *Хонникомб Р.* Пластическая деформация металлов. М.: Мир, 1972, 408 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.II.1992