

УДК 539.374

© 1994 г. С. Е. АЛЕКСАНДРОВ

### ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА УСИЛИЯ ПРИ ОСАДКЕ ЦИЛИНДРА ЖЕСТКИМИ ПЛИТАМИ

Математическое моделирование технологических процессов в рамках теории пластичности в настоящее время основывается в большинстве случаев на жесткопластической модели [1]. Для такой модели одним из основных методов исследования технологических процессов является метод верхней оценки [1, 2]. Его применение позволяет рассмотреть большой круг задач [3]. Способы реализации этого метода продолжают совершенствоваться до настоящего времени [4, 5]. Однако в случае применения метода верхней оценки при законе предельного трения (при таком законе внешнего трения  $\tau_f = k$ ;  $\tau_f$  — удельные силы трения,  $k$  — предел текучести при чистом сдвиге) и течении общего вида (не плоском) необходимо учитывать асимптотическое поведение проекций скоростей вблизи поверхности трения [6]. С помощью других кинематических возможностей полей скоростей невозможно приблизиться к точному решению. Отметим, что закон предельного трения часто имеет место в обработке металлов давлением [7]. Во всех известных автору работах не учитывалось асимптотическое поведение проекций скоростей вблизи поверхности предельного трения. В частности, задача об осадке цилиндра жесткими плитами рассмотрена различными методами в [8—13]. Такой интерес к этой проблеме вызван с одной стороны относительной простотой постановки (простая геометрическая форма), с другой стороны, практической важностью результата, связанной с использованием осадки цилиндра в качестве теста по определению свойств материала [14, 15].

В публикуемой работе для этой задачи используется кинематически возможное поле скоростей с учетом асимптотического поведения проекций скоростей. Отметим, что аналогичное асимптотическое представление необходимо использовать и при построении разрывных полей скоростей вблизи поверхности разрыва [16].

Геометрическая схема процесса показана на фиг. 1. Вследствие симметрии достаточно рассмотреть половину сечения цилиндра  $0 \leq z \leq h$ . Кинематически возможное поле скоростей должно удовлетворять краевым условиям  $v = v_0 h$  при  $z = 0$ ,  $v = 0$ , при  $z = h$ ,  $u = 0$  при  $r = 0$ , где  $v$  — проекция скорости на ось  $z$ ,  $u$  — проекция скорости на ось  $r$ . Положим, что на торцах цилиндра действует сила трения  $\tau_f = k$ . Тогда простейшее асимптотическое разложение проекции скорости имеет вид [6]:

$$\dot{u} = z^{1/2} w(r, z) + u_0 r, \quad u_0 = \text{const} \neq 0 \quad (1)$$

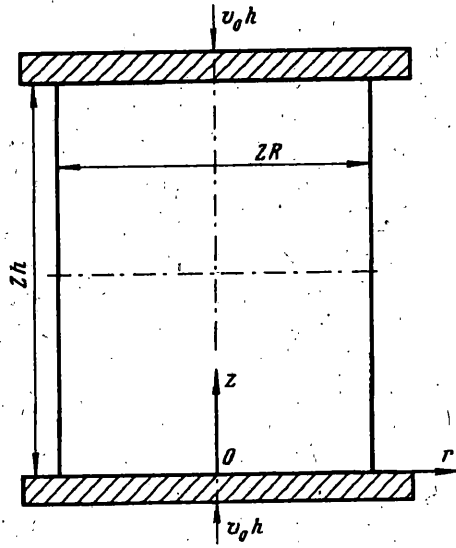
Краевое условие для функции  $w$  будет  $w = 0$  при  $r = 0$ .

Подставим представление (1) в условие несжимаемости при произвольной функции  $v$ .

$$z^{1/2} \partial w / \partial r + z^{1/2} w / r + \partial v / \partial z + 2u_0 = 0 \quad (2)$$

Предположим, что функция  $v$  не зависит от  $r$ , а  $w$  — от  $z$ . Тогда переменные в (2) разделяются  $w/r + dw/dr = -z^{-1/2} (dv/dz + 2u_0) = c = \text{const}$ . Решение этих уравнений имеет вид

$$w = c_1 r^{-1} + cr/2, \quad v = -2/3 cz^{3/2} + c_2 - 2u_0 z \quad (3)$$



Фиг. 1

Вследствие ограниченности скорости  $c_1 = 0$ , а из краевых условий для функции  $v$  получаем  $c_2 = v_0 h$ ,  $c = 3/2 (v_0 - 2u_0) h^{-1/2}$ . Краевое условие для функции  $w$  удовлетворяется. С учетом (1) и (3) проекции скоростей имеют вид

$$u = 3/4 r (v_0 - 2u_0) (z/h)^{1/2} + u_0 r \quad (4)$$

$$v = \{v_0 - [(v_0 - 2u_0) (z/h)^{1/2} + 2u_0] (z/h)\} h$$

Отсюда отличные от нуля скорости деформации будут

$$\varepsilon_r = \partial u / \partial r = 3/4 (v_0 - 2u_0) (z/h)^{1/2} + u_0, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_r$$

$$\varepsilon_z = -3/2 (v_0 - 2u_0) (z/h)^{1/2} - 2u_0, \quad 2\varepsilon_{rz} = 3/8 r (v_0 - 2u_0) (z/h)^{-1/2} / h$$

Выражение для интенсивности скоростей деформации сдвига принимает вид

$$H = \sqrt{2/3} [2(\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + 3/2 (2\varepsilon_{rz})^2]^{1/2} \quad (5)$$

$$= 9/8 \{36 [(v_0 - 2u_0) (z/h)^{1/2} + 4/3 u_0]^2 + (r/h)^2 (v_0 - 2u_0)^2 (z/h)^{-1}\}^{1/2}$$

Верхняя оценка предельной нагрузки  $p_*$  определяется из равенства мощностей внешних  $N^0$  и внутренних  $N^i$  сил

$$N^0 = 2\pi v_0 h \int_0^R p r dr - 2\pi k \int_0^R u_1 r dr \quad (6)$$

Здесь  $p$  — давление под штампом,  $u_1$  — радиальная скорость в плоскости  $z = 0$  (из (4) следует  $u_1 = u_0 r$ ).

Усилие штампа  $P_* = 2\pi \int_0^R p r dr$ , поэтому из (6) получаем

$$N^0 = v_0 P_* h - 2/3 \pi k u_0 R^3 \quad (7)$$

Мощность внутренних сил равна  $N^i = 2\pi k \int_0^h \int_0^R H r dr dz$ . Подставляя сюда выражение (4) и интегрируя по  $r$ , имеем

$$N^i = a \int_0^h \left(\frac{z}{h}\right) \left\{ 48 \left[ (v_0 - 2u_0) \left(\frac{z}{h}\right)^{1/2} + \frac{4}{3} u_0 \right]^2 + \frac{R}{h} (v_0 - 2u_0)^2 \left(\frac{z}{h}\right)^{-1} \right\} dz \quad (8)$$

$$-192 \sqrt{3} a \int_0^h \left(\frac{z}{h}\right) \left[ (v_0 - 2u_0) \left(\frac{z}{h}\right)^2 + \frac{4}{3} u_0 \right] dz,$$

$$a = 1/4 \sqrt{\frac{2}{3}} \pi h^2 (v_0 - 2u_0)^{-2} k$$

Значение первого интеграла в этом выражении может быть определено только численно, обозначим его  $hJ$ .

Второй интеграл  $hJ_1$  выражается через элементарные функции, но ввиду громоздкости это выражение здесь не приводится. Отметим, что интеграл  $hJ$  является несобственным, но преобразованием  $z = x^2$  легко показать, что он сходится.

С учетом (7) и (8) условие равенства мощностей принимает вид

$$h v_0 P_* - 2\sqrt{3} \pi k u_0 R^3 = a (J - 192 \sqrt{3} J_1)$$

Отсюда верхняя оценка усилия штампа  $P_* = [2\sqrt{3} \pi k R^3 (u_0/v_0) + a (J/v_0 - 192 \sqrt{3} J_1/v_0)]/h$ . Общие свойства уравнений теории пластичности позволяют одну скорость задавать произвольно. Положим  $v_0 = 1$ , тогда

$$P_* = 2\sqrt{3} \pi k R^2 u_0 (R/h) + a (J - 192 \sqrt{3} J_1) \quad (9)$$

Величина  $u_0$  в выражении для  $P_*$  остается пока произвольной. Определим ее из условия минимума  $P_*$ . Соответствующее уравнение имеет вид

$$2\sqrt{3} (R/h) \pi k R^2 + (\partial a / \partial u_0) (J - 192 \sqrt{3} J_1) + a [(\partial J / \partial u_0) - 192 \sqrt{3} (\partial J_1 / \partial u_0)] = 0 \quad (10)$$

Производные  $\partial a / \partial u_0$ ,  $\partial J / \partial u_0$ ,  $\partial J_1 / \partial u_0$  могут быть определены из (8).

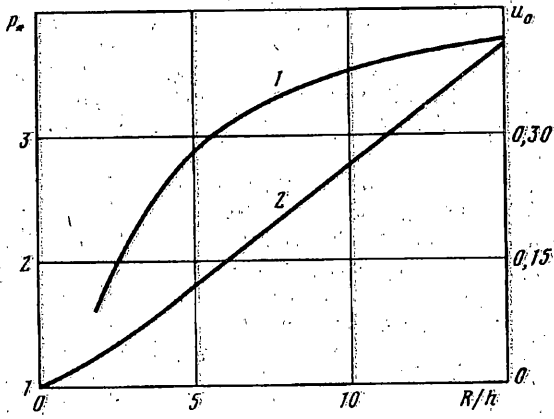
Результат численного решения уравнения (10) представлен на фиг. 2 в виде зависимости  $u_0$  от  $R/h$  (кривая 1). Подстановка этих значений  $u_0$  в (9) дает оценку величины  $P_*$  (кривая 2 на фиг. 2). В предельном случае при  $R \rightarrow 0$  уравнение (9) преобразуется к виду

$$P_* = a \lim_{R \rightarrow 0} [(J - 192 \sqrt{3} J_1) / R^2] / (\pi k \sqrt{3}) = 1$$

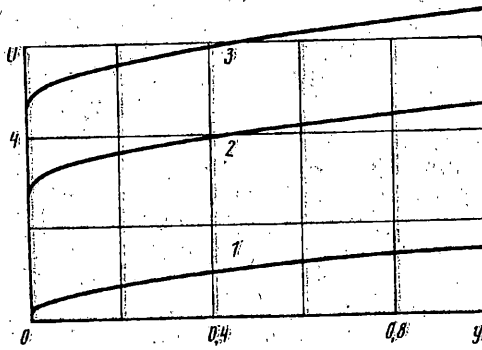
Этот результат является точным значением предельной нагрузки [8]. Величина  $u_0$  при  $R \rightarrow 0$  может быть произвольной.

Распределение по высоте ( $y = z/h$ ) безразмерной радиальной скорости  $U = u/(v_0 h)$  на внешнем радиусе цилиндра, которая характеризует процесс бочкообразования, показано на фиг. 3 (кривая 1 —  $R/h = 2$ , кривая 2 —  $R/h = 8$ , кривая 3 —  $R/h = 12$ ). Для сравнения на фиг. 4 это же распределение при  $R/h = 8$  приведено для поля скоростей, полученного в публикуемой работе (кривая 1) и в [8] (кривая 2). Из этой фигуры видно, что несмотря на близость кривых 1 и 2 качественное их поведение вблизи точек  $y = 0$  и  $y = 1$  различно. Вблизи контактной поверхности ( $y = 0$ ) кривая 1 более правильно описывает действительное поле скоростей, так как производная  $dU/dy \rightarrow \infty$  в этой точке [6]. Вблизи плоскости симметрии ( $y = 1$ ) больше соответствует действительности кривая 2, так как в этой точке из симметрии должно быть  $dU/dy = 0$ .

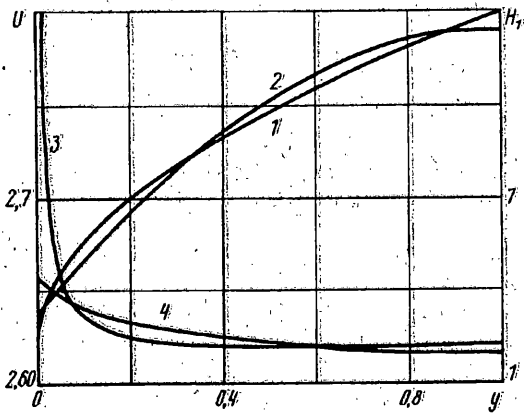
Поле скоростей, соответствующее кривой 1, в точке  $y = 1$  приводит к разрыву скорости деформации  $\epsilon_{rz}$ . Значения некоторых скоростей деформаций для этих двух решений значительно отличаются не только качественно, но и количественно. Распределение безразмерной интенсивности скоростей деформаций сдвига  $H_1 = Hh/v_0$  при  $r = R$  и  $R/h = 8$  представлено на фиг. 4 (кривая 3 — расчет по формуле (5), кривая 4 — расчет по результатам [8]). Из этой фигуры видно, что вблизи контактной поверхности ( $y = 0$ ) для публикуемого решения  $H_1 \rightarrow \infty$ , как это и должно быть из общих соображений [6], а для решения [8] величина



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$H_1$  — конечная. На остальной части очага деформаций величины  $H_1$  для этих двух решений практически совпадают. Отметим, что величина  $H_1$  определяет упрочнение материала, если в качестве меры упрочнения принимается параметр Оджвиста [9]. В этом смысле сравниваемые решения достаточно сильно различаются: полученное решение предсказывает значительно более сильное упрочнение поверхностного слоя.

Определенные значения предельной нагрузки (фиг. 2) практически совпадают с соответствующими значениями, вычисленными по полю скоростей [8] (в пределах рассмотренных значений отношения  $R/h$  разность между этими оценками меньше 1%). Это объясняется тем, что рассматриваемое поле скоростей хорошо аппроксимирует действительное только вблизи контактной поверхности, а вблизи плоскости симметрии  $z = h$  ( $y = 1$ ) лучше поле скоростей [8].

Результаты публикуемой работы указывают на необходимость дифференцированного выбора аппроксимаций поля скоростей при применении метода верхней оценки и при наличии поверхности предельного трения. В частности, для рассмотренной задачи об осадке цилиндра для получения более хорошей оценки величины предельной нагрузки необходимо вблизи поверхностей трения принимать поле скоростей в виде (4), а вблизи плоскости симметрии в виде, предложенном в [8]. То же относится к конечноэлементной аппроксимации: для элементов, находящихся вблизи поверхности предельного трения необходимо использовать представление (4). В частности, в [11, 13] приведены конечноэлементные решения задачи об осадке цилиндра. Результаты этих работ подтверждают отмеченные выше тенденции в поведении поля скоростей вблизи поверхностей скольжения даже без применения асимптотических разложений. Однако целесообразность применения сингулярных функций в вычислительном аспекте не вызывает сомнений [17, 18]. В частности, на возможность применения таких функций в теории пластичности указывалось в [19]. Но при этом не следует ожидать существенных уточнений величины предельной нагрузки, так как толщина слоя, в котором имеет смысл применять асимптотическое разложение, мала (это показывает и публикуемое решение задачи об осадке цилиндра). Основной отличительной чертой решений с учетом асимптотического поведения функций является предсказание ими локализации деформаций. Это явление оказывает решающее влияние на формирование свойств материала, так как является причиной фазовых и структурных превращений, строение очага деформации и так далее [20, 21].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cannizzaro L., Micari F., Riccobono R. Numerical Methods in Forming Problems//Meccanica. 1988. V. 23. Special issue. P. 55—59.
2. Mahrenholtz O. and Dung N. L. Mathematical Modelling of Metal Forming Processes by Numerical Methods//Advanced Technology of Plasticity 1987. Proc. Second Int. Conf. Tech. Plast. Stuttgart. 1987. V. 1. P. 3—10.
3. Avitzur B. Metal forming: The application of limit analysis. New York: Basel, 1980. 208 p.
4. Campbell J. S., Greed M. J., Delaney J. B. Upper Bound Plane Stress Limit Analysis Using an Unconstrained Minimization Method//Proc. Int. Conf. Num. Meth. Engng: Theory and Applications (NUMETA 90), 7—11 January, 1990, Univ. College of Swansea, Swansea, Wales, U. K. London and New York. V. 1. P. 474—482.
5. Lin K. H., Yang W. H. A Finite Element Method for Limit Analysis of Plane Strain Extrusion Through Square Dies//Proc. 3 rd Int. Conf. Numer. Meth. Ind. Form. Proc. (NUMIFORM-89). Fort Collins, Colorado 26—30 June 1989 A. A. Balkana. Rotterdam, Brookfield. 1989. P. 191—196.
6. Александров С. Е., Друзянов Б. А. Об условиях трения пластических тел//Изв. РАН. МТТ. 1992. № 4. С. 116—122.
7. Ерманок М. З. О выборе рационального способа горячей обработки давлением при производстве профилей и труб из легких сплавов//Цветные металлы. 1991. № 12. С. 36—37.

8. Kobayashi S. and Thomsen E. G. Upper and Lower Bound Solutions to Axisymmetric Compression and Extrusion Problems//Int. J. Mech. Sci. 1965. V. 7. No. 2. P. 127—143.
9. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
10. Ефимов В. Н., Соколов Л. Н., Баран В. И. Решение задачи об осадке цилиндрической заготовки//Изв. ВУЗов. Черная металлургия. 1988. № 3. С. 62—66.
11. Frater J. L. and Penza B. R. Predicting Fracture in Cold Upset Forging by Finite Element Methods//J. Mater. Shaping Technol. 1989. V. 7. No. 1. P. 57—62.
12. Бровман М. Я. Кинематически допустимые поля скоростей при осесимметричной деформации//Изв. ВУЗов. Черная металлургия. 1990. № 7. С. 44—46.
13. Dabke P. D., Haque I., Srikrishna M. and Jackson J. E. A Knowledge-Based System for Generation and Control at Finite-Element Meshes in Forging Simulation//J. Mater. Engng and Perform. 1992. V. 1. No. 3. P. 415—428.
14. Dung N. L. Fracture Initiation in Upsetting Test//Proc. 2nd Int. Conf. Num. Meth. Ind. Form. Proc (NUMIFORM-86). Gothenburg, 25—29 August 1986. A. A. Balkema. Rotterdam, Boston: 1986. P. 261—269.
15. Pöhlandt K., Lange K. Recommendations for an Unifield Upsetting Test for Determining Flow Curves//CIRP Ann. 1989. V. 38. No. 2. P. 681—682.
16. Александров С. Е. О разрывных полях скоростей при произвольной деформации идеального жесткопластического тела//Докл. РАН. 1992. Т. 324. № 4. С. 769—772.
17. Swedlow J. L. Singularity computations//Int. J. Num. Meth. Engng. 1979. V. 12. P. 1779—1798.
18. Ohtmer O. Applying Analytical Functions to Define Special Boundary Elements a Elasto—Plastic Problem with Singularities Idealized by Finite Elements//Proc. 3rd. Int. Conf. Eng. Software III. London, 11—13 Apr., 1983. Berlin e. u., 1983. P. 237—253.
19. Серегин Г. А. К вопросу о вариационных постановках некоторых задач теории течения жесткопластических сред//ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 992—996.
20. Губкин С. И. Пластическая деформация металлов. М.: Металлургияиздат. 1960. Т. 1—3. 1050 с.
21. Пресняков А. А. Очаг деформации при обработке давлением. Алма-Ата: Наука Каз.ССР, 1988. 132 с.

Москва:

Поступила в редакцию  
29.VII.1992