МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1994

УДК 539.3

 В. Л. МОНДРУС

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИФРАКЦИИ ПРОДОЛЬНЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

К задачам дифракции сейсмических волн неоднократно обращались специалисты в области геофизики, геологоразведки, сейсмостойкого строительства. Обычно эти проблемы решались в детерминированной постановке [1, 2, 3, 4].

Вероятностный подход к вопросу дифракции сейсмических волн позволяет выйти на качественно новые результаты, позволяющие значительно расширить изучение вопроса о влиянии дифракции на процесс распространения волнового фронта сейсмической волны.

1. Рассмотрим волновое уравнение [5, 6, 7, 4]:

$$\Delta W(\mathrm{x}, t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 W(\mathrm{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

где $W(\mathrm{x}, t)$ — смещение, x — вектор координат, v — скорость распространения исследуемого волнового фронта, Δ — оператор Лапласа.

Представив решение (1.1) в виде

$$W(\mathrm{x}, t) = U(\mathrm{x}) \exp(-i\omega t) \tag{1.2}$$

переходим к уравнению Гельмгольца [7, 4, 8]:

$$\Delta U(\mathrm{x}) + \frac{\omega^2}{v^2} U(\mathrm{x}) = 0 \tag{1.3}$$

Представим величину $k^2 = \omega^2/v^2$ в виде суммы математического ожидания k_0^2 и флуктуационной составляющей, зависящей от координат [7, 9]:

$$k^2 = \omega^2/v^2 = k_0^2 + c(\mathrm{x}) \tag{1.4}$$

Для анализа (1.3) с учетом (1.4) применяется метод моментных функций в корреляционном приближении. Рассматривается усеченная система моментных уравнений, соответствующая гипотезе Квазигауссовости [5, 7]. Разрешающая система для одномерной задачи имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} d^2U_0(x)/dx^2 + k_0^2U_0(x) + K_{uc}(x, x) = 0 \\ d^2K_{uc}(x, x')/dx^2 + k_0^2K_{uc}(x, x') = -u_0(x) K_c(x, x') \end{gathered} \tag{1.5}$$

где $U_0(x)$ — математическое ожидание амплитуды волны $U(x)$, $K_{uc}(x, x') = \langle\mu(x)\, c(x')\rangle$ — взаимная корреляционная функция флуктуаций амплитуды волны $\mu(x)$ и коэффициента неоднородностей $c(x')$; $K_c(x, x')$ — корреляционная функция неоднородностей.

Решение системы уравнений (1.5) строится по методу разделения переменных при заданной корреляционной функции неоднородностей $K_c(x, x')$.

Если, например, неоднородности среды распространения волнового фронта экспоненциально-коррелированы, то $K_c(x, x')$ можно представить в виде [5, 6]:

$$K_c(x, x') = \sigma_c^2 \exp(-\alpha |x' - x|) \tag{1.6}$$

где σ_c^2 — дисперсия неоднородностей; α — коэффициент широкополосности, характеризующий корреляционную связь между ординатами процесса.

Исследуя задачу дифракции сейсмической волны на значительных, по сравнению с ее длиной, расстояниях от источника возбуждения (эпицентра), можно полагать, что процесс однороден по координатам [7].

Тогда решение (1.5) будет выглядеть следующим образом:

$$U_0(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x) \tag{1.7}$$

где λ_1 и λ_2 корни характеристического уравнения

$$(\lambda^2 + k_0^2)\,[(\lambda + \alpha)^2 + k_0^2] - \sigma_c^2 = 0 \tag{1.8}$$

соответствующие принципу излучения. Их можно аналитически определить по формулам [7]:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha/2 \pm \gamma \pm i\delta \tag{1.9}$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \left(1/2\left[\sqrt{(k_0^2 + \alpha^2/4)^2 - \sigma_c^2} - (k_0^2 - \alpha^2/4)\right]\right)^{1/2} \\ \delta &= \left(1/2\left[\sqrt{(k_0^2 + \alpha^2/4)^2 - \sigma_c^2} + (k_0^2 - \alpha^2/4)\right]\right)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Константы C_1 и C_2 легко определить из заданных граничных условий.

При детерминированных граничных условиях

$$U_0(x)|_{x=0} = L, \quad K_{uc}(x, x')|_{x=x'=0} = 0$$

после простых математических преобразований будем иметь

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\frac{(\lambda_1 + \alpha)^2 + k_0^2}{(\lambda_2 + \alpha)^2 - (\lambda_1 + \alpha)^2}\,L \\ C_2 &= \frac{(\lambda_2 + \alpha)^2 + k_0^2}{(\lambda_2 + \alpha)^2 - (\lambda_1 + \alpha)^2}\,L \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

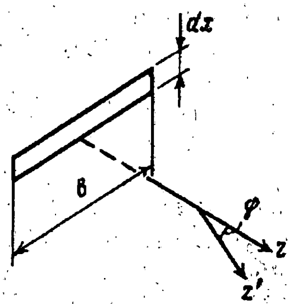
2. Рассмотрим дифракцию продольной сейсмической волны (волны Р-типа) на препятствии типа щели (фигура) в одномерной постановке, опираясь на полученные выше результаты.

Так как задача дифракции исследуется с целью определить характеристики волнового фронта непосредственно для района, подлежащего тщательному анализу (например, район предполагаемой застройки), то следует иметь в виду значительное (по сравнению с длиной волны) расстояние от источника возбуждения (эпицентра). В этом случае коэффициент наклона $k(\varphi)$, где φ — угол дифракции, можно положить приблизительно равным $1 - k(\varphi) \approx 1$ [1].

С учетом изложенного будем иметь [1]

$$dU_\varphi = \frac{C_1 dx}{b}\exp(-i\omega t + \lambda_1 x \sin\varphi) + \frac{C_2 dx}{b}\exp(-i\omega t + \lambda_2 x \sin\varphi) \tag{2.1}$$

где dU_φ — волна, посылаемая в направлении z' (фигура) участком dx шириной b в виде суперпозиции двух волн с амплитудами $C_1 dx/b$ и $C_2 dx/b$.



На основании (2.1) находим

$$U_\varphi = \frac{C_1}{b}[\exp(-i\omega t)]\int_0^b [\exp(\lambda_1 x \sin\varphi)]dx + \frac{C_2}{b}[\exp(-i\omega t)]\int_0^b [\exp(\lambda_2 x \sin\varphi)]dx \tag{2.2}$$

Вводя обозначения $id = \lambda_1 b \sin\varphi$, $ih = \lambda_2 b \sin\varphi$ находим

$$U_\varphi = C_1 \frac{\sin(1/2 d)}{1/2 d} \exp[i(1/2 d - \omega t)] + C_2 \frac{\sin(1/2 h)}{1/2 h} \exp[i(1/2 h - \omega t)] \tag{2.3}$$

Полученный результат представляет собой суперпозицию двух волн, распространяющихся под углом φ к оси z (фигура), соответствующих двум корням характеристического уравнения (1.8).

Результат в виде выражения (2.3) хорошо согласуется с классической задачей Фраунгофера для дифракции волнового фронта [1, 3]. Если в (2.3) положить равными нулю флуктуации амплитуды волны $\mu(x)$ и волнового числа $c(x)$ — приходим к классическому выражению для дифракции Фраунгофера на щели.

3. Решение, полученное для щели, можно развить и на препятствие в виде прямоугольника, с помощью которого достаточно адекватно аппроксимируется целый ряд характерных препятствий [1, 2, 3, 4].

Для прямоугольника размерами $a \times b$ по аналогии с (2.2) запишем

$$\begin{aligned} U_{\varphi,\psi} = {} & \frac{C_1}{ab}[\exp(-i\omega t)]\int_0^a [\exp(\lambda_{1y} y \sin\psi)]\,dy \times \\ & \times \int_0^b [\exp(\lambda_{1x} x \sin\varphi)]\,dx + \frac{C_2}{ab}[\exp(-i\omega t)] \times \\ & \times \int_0^a [\exp(\lambda_{2y} y \sin\psi)]\,dy \int_0^b [\exp(\lambda_{2x} x \sin\varphi)]\,dx \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\lambda_{1x}, \lambda_{1y}$ — корни характеристического уравнения (1.8), записанного для решения задач по осям x и y; φ и ψ — соответствующие z и y углы дифракции.

Полагая, что среда распространения локально-изотропна, можем записать

$$\lambda_{1x} = \lambda_{1y} = \lambda_1, \quad \lambda_{2x} = \lambda_{2y} = \lambda_2 \tag{3.2}$$

Опираясь на (3.2) и вводя обозначения $\lambda_1 b \sin\varphi = id$, $\lambda_1 a \sin\psi = im$, $\lambda_2 b \sin\varphi = ih$, $\lambda_2 a \sin\psi = in$, находим на основании (3.1):

$$\begin{aligned} U_{\varphi,\psi} = {} & C_1 \frac{\sin(1/2 m)}{1/2 m}\frac{\sin(1/2 d)}{1/2 d} \exp i\left(\frac{m+d}{2} - \omega t\right) + \\ & + C_2 \frac{\sin(1/2 n)}{1/2 n}\frac{\sin(1/2 h)}{1/2 h} \exp i\left(\frac{n+h}{2} - \omega t\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Выражение (3.3) представляет собой суперпозицию двух волн, соответствующих двум корням характеристического уравнения (1.8), дифрагирующих под углами φ и ψ.

Определение, например, взаимной корреляционной функции $K_{Uc}(x, x')$ флуктуаций амплитуды дифрагирующей волны и волнового числа не представляет особого труда и осуществляется по аналогии с нахождением взаимной корреляционной функции $K_{uc}(x, x')$ путем решения второго уравнения системы (1.5) с учетом корней характеристического уравнения (1.8), причем при этом следует положить вместо $u_0(x)$ — $U_\varphi(x)$.

Таким образом, в вероятностной постановке удается прийти к результатам, полностью совпадающим с классическими, если полагать флуктуации волнового числа $c(x)$ и амплитуды волны $\mu(x)$ равными нулю.

Полученное решение, по всей видимости, должно вызвать интерес у специалистов в области геофизики, сейсмостойкого строительства, теории волновых процессов в упругих средах, так как оно выводит исследование задач дифракции, в частности продольных сейсмических волн (волн Р-типа), на новый уровень.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики: перевод с англ./Под ред. Г. П. Мотулевич. М.: Наука, 1973. 856 с.
2. *Рябинкин Л. А.* Теория упругих волн. М.: Недра, 1987. 184 с.
3. *Копничев Ю. Ф.* Короткопериодные сейсмические волновые поля. М.: Наука, 1985. 123 с.
4. *Саваренский Е. Ф.* Сейсмические волны. М.: Недра. 1972. 292 с.
5. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
6. *Болотин В. В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1982. 352 с.
7. *Макаров Б. П.* Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов. М.: Машиностроение, 1983. 264 с.
8. *Соболев Д. Н.* К расчету конструкций, лежащих на статистически неоднородном основании// Строит. механика и расчет сооружений. 1965. № 1. С. 1—4.
9. *Макаров Б. П., Кочетков Б. Е.* Расчет фундаментов сооружений на случайно-неоднородном основании при ползучести. М.: Стройиздат. 1987. 256 с.

Красногорск

Поступила в редакцию
20.XI.1993