МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1994

УДК 539.3

 А. Н. АМРАХОВ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Изучается процесс распространения нестационарных продольных волн в упругом полупространстве. Полупространство нагружено нормальными напряжениями, действующими на поверхности полусферической выемки имеющейся на его границе.

1. В сферической системе координат r_1, φ, θ полупространство занимает область $a \leq r_1 < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. В безразмерных координатах $r = r_1/a$, $t = c_1 t_1/a$ задача сводится к интегрированию системы уравнений

$$\frac{\partial^2\omega_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\omega_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega_\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial\omega_\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\omega_\varphi}{r^2} = \varkappa^2\frac{\partial^2\omega_\varphi}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varepsilon}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta} = \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}$$

$$c_1^2 = (\lambda + 2M)/\rho, \quad c_2^2 = \mu/\rho, \quad \varkappa = c_1/c_2$$

$$\omega_\varphi = \frac{1}{2ra}\left[\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta)\right], \quad \varepsilon = \frac{1}{ar^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r) + \frac{1}{ar\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta)$$

со следующими граничными условиями

$$\sigma_{\theta r} = u_\theta = 0 \quad \text{при } \theta = \pi/2 \tag{1.2}$$

$$u_\theta = 0, \quad \sigma_{rr} = f_0(\theta)\,\psi_0(t) \quad \text{при } r = 1 \tag{1.3}$$

$$u_\theta = u_r = 0 \quad \text{при } r \to \infty \tag{1.4}$$

В начальный момент времени $t = 0$ принимаются нулевые начальные условия.

При условии (1.2) волна расширения отражается от границы $\theta = \pi/2$ только волной расширения, что существенно упрощает решение задачи [1].

Введем новую независимую переменную $x = \cos\theta$ и применим преобразование Лапласа по t к уравнениям (1.1)—(1.3). Разделяя переменные, находим решение системы (1.1) в изображениях:

$$\overline{\omega}_\varphi = \frac{A}{\sqrt{\varkappa pr}}K_{\alpha+1/2}(\varkappa pr)\,P_\alpha^1(x), \quad \overline{\varepsilon} = \frac{B}{\sqrt{pr}}K_{\alpha+1/2}(pr)\,P_\alpha(x) \tag{1.5}$$

Здесь $K_{\alpha+1/2}(z)$ — функция Макдональда, $P_\alpha(x)$, $P_\alpha^1(x)$ — функции Лежандра, A, B — постоянные интегрирования, p — параметр преобразования Лапласа, α — параметр разделения переменных.

Вычисляя компоненты перемещения и напряжения и подставляя в граничном условии (1.2), получим

$$P_\alpha^1(0) = 0 \quad \text{или } \sin\tfrac{1}{2}\pi\alpha = 0 \tag{1.6}$$

Отсюда

$$\alpha = 2k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.7}$$

Выражения компонентов перемещений и напряжений удовлетворяющих условию (1.2) получается в виде бесконечного ряда по функциям Лежандра первого рода.

Используя свойство ортогональности функций $P_{2k}(x)$ $(k = 0, 1, 2)$ на отрезке [0, 1] разложим $f(x)$ в граничном условии (1.3) в ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} P_{2k}(x) \tag{1.8}$$

$$f_{2k} = (4k+1) \int_0^1 f(x)\, P_{2k}(x)\, dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.9}$$

Далее используя свойства функции Лежандра первого рода и учитывая (1.6), получим

$$\int_0^1 P_{2k}(x)\, dx = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.10}$$

Определив постоянные интегрирования из граничного условия (1.3), можно окончательно найти изображения для компонент перемещения и напряжения

$$\frac{\mu}{a}\bar{u}_r = \frac{\Psi(p)}{r\sqrt{r}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{2k}}{\Delta_k(p)} \{ [2kK_{2k+1/2}(\varkappa p) + \varkappa p K_{2k-1/2}(\varkappa p)]\, [(2k+1) K_{2k+1/2}(pr) +$$

$$+ prK_{2k-1/2}(pr)] - 2k(2k+1) K_{2k+1/2}(p) K_{2k+1/2}(\varkappa pr)\} P_{2k}(x) \quad \frac{\mu}{a}\bar{u}_\theta =$$

$$= \frac{\Psi(p)}{r\sqrt{r}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{2k}}{\Delta_k} \{ [2kK_{2k+1/2}(\varkappa pr) + \varkappa pr K_{2k+1/2}(\varkappa pr)]\, K_{2k+1/2}(p) -$$

$$- [2kK_{2k+1/2}(\varkappa p) + \varkappa p K_{2k-1/2}(\varkappa p)]\, K_{2k+1/2}(pr)\} P^1_{2k}(x) \tag{1.11}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\Psi(p)}{r^2\sqrt{r}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{2k}}{\Delta_{2k}} \{ 4k(2k+1) K_{2k+1/2}(\varkappa pr) + \varkappa pr K_{2k-1/2}(\varkappa pr)] \times$$

$$\times K_{2k+1/2}(p) - [2kK_{2k+1/2}(\varkappa p) + \varkappa p K_{2k-1/2}(\varkappa p)]\, [(4(2k+1)(k+1) +$$

$$+ \varkappa^2 p^2 r^2) K_{2k+1/2}(pr) + 4prK_{2k-1/2}(pr)]\} P_{2k}(x)$$

$$\Delta_k(p) = 8k(2k+1) K_{2k+1/2}(p) K_{2k+1/2}(\varkappa p) - [(4(2k+1) + \varkappa^2 p^2) K_{2k+1/2}(p) +$$

$$+ 4pK_{2k-1/2}(p)]\, [2kK_{2k+1/2}(\varkappa p) + \varkappa p K_{2k-1/2}(\varkappa p)] \tag{1.12}$$

где $\Psi(p)$ — изображение функции $\psi(t)$

Используя выражения функции Бесселя полуцелого индекса через элементарные функции эти выражения можно привести к виду

$$\frac{\mu}{a}\bar{u}_r = \frac{f_0 \Psi(p)}{\varkappa^2 r^2} \frac{rp+1}{(p + 2/\varkappa^2)^2 + 4(1 - 1/\varkappa^2)/\varkappa^2} e^{\lambda} - \frac{\Psi(p)}{r^2} e^{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{2k}}{r^{2k}} \frac{U_{1k}(p)}{J_k(p)} P_{2k}(x) +$$

$$+ \frac{\Psi(p)}{r^2} e^{\varkappa\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{2k}}{r^{2k}} \frac{U_{2k}(p)}{J_k(p)} P_{2k}(x), \quad \lambda = -(r-1)p \tag{1.13}$$

$$\frac{\mu}{a}\bar{u}_\theta = \frac{\Psi(p)}{r^2} e^{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{2k}}{r^{2k}} \frac{V_{1k}(p)}{J_k(p)} P^1_{2k}(x) - \frac{\Psi(p)}{r^2} e^{\varkappa\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{2k}}{r^{2k}} \frac{V_{2k}(p)}{J_k(p)} P^1_{2k}(x) \tag{1.14}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{f_0}{r}\Psi(p)\frac{p^2 + 4p/(\varkappa^2 r) + 4/(\varkappa^2 r^2)}{(p + 2/\varkappa^2)^2 + (4/\varkappa^2)(1 - 1/\varkappa^2)} e^{\lambda} + \frac{\Psi(p)}{r^3} e^{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{2k}}{r^{2k}}\frac{A_k(p)}{J_k(p)} P_{2k}(x) -$$

$$- \frac{\Psi(p)}{r^3} e^{\varkappa\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{2k}}{r^{2k}}\frac{B_{2k}}{J_k(p)} P_{2k}(x) \qquad (1.15)$$

$$U_{1k}(p) = \left[\frac{(4k)!}{(2k-1)!} + \sum_{s=1}^{2k}\frac{(4k-s-1)!}{s!\,(2k-s)!}(2k(4k-s) + \varkappa sp)(2\varkappa p)^s\right] \times$$

$$\times \left[(2k+1)\frac{(4k)!}{(2k)!} + \sum_{s=1}^{2k}\frac{(4k-s-1)!}{s!\,(2k-s)!}((2k+1)(4k-s) + rsp)(2rp)^s\right]$$

$$U_{2k}(p) = 2k(2k+1)\sum_{s=0}^{2k}\frac{(4k-s)!}{s!\,(2k-s)!}(2p)^s\sum_{s=0}^{2k}\frac{(4k-s)!}{s!\,(2k-s)!}(2\varkappa rp)^s$$

$$V_{1k}(p) = \left[\frac{(4k)!}{(2k-1)!} + \sum_{s=1}^{2k}\frac{(4k-s-1)!}{s!\,(2k-s)!}(2k(4k-s) + \varkappa sp) \times\right.$$

$$\left.\times (2\varkappa p)^s\right]\sum_{s=0}^{2k}\frac{(4k-s)!}{s!\,(2k-s)!}(2pr)^s$$

$$V_{2k}(p) = \left[\frac{(4k)!}{(2k-1)!} + \sum_{s=1}^{2k}\frac{(4k-s-1)!}{s!\,(2k-s)!}(2k(4k-s) + \varkappa srp) \times\right.$$

$$\left.\times (2\varkappa rp)^s\right]\sum_{s=0}^{2k}\frac{(4k-s)!}{s!\,(2k-s)!}(2p)^s \qquad (1.16)$$

$$A_k(p) = \left[\frac{(4k)!}{(2k-1)!} + \sum_{s=1}^{2k}\frac{(4k-s-1)!}{(2k-s)!s!}(2(4k-s)k + \varkappa sp)(2\varkappa p)^s\right] \times$$

$$\times \left[(4(2k+1)(k+1) + \varkappa^2 rp)\frac{(4k)!}{(2k)!} + \sum_{s=1}^{2k}\frac{(4k-s-1)!}{s!\,(2k-s)!}(4(4k-s)(2k+1)(k+1) +\right.$$

$$\left. + 4srp + (4k-s)\varkappa^2 r^2 p^2)(2pr)^s\right]$$

$$B_k(p) = 4k(2k+1)\left[2(k+1)\frac{(4k)!}{(2k)!} + \sum_{s=1}^{2k}\frac{(4k-s-1)!}{s!\,(2k-s)!}\times\right.$$

$$\left.(2(k+1)(4k-s) + \varkappa rsp)(2\varkappa rp)^s\right]\sum_{s=0}^{2k}\frac{(4k-s)!}{s!\,(2k-s)!}(2p)^s$$

$$J_k(p) = 4(2k+1)\varkappa p\sum_{s=0}^{2k}\frac{(4k-s)!}{s!\,(2k-s)!}(2p)^s\sum_{s=1}^{2k}\frac{(4k-s-1)!}{(s-1)!\,(2k-s)!}(2\varkappa p)^s + \left[\frac{(4k)!}{(2k)!}\varkappa^2 p^2 +\right.$$

$$\left. + p\sum_{s=1}^{2k}\frac{(4k-s-1)!}{s!\,(2k-s)!}(4s + (4k-s)\varkappa^2 p)(2p)^s\right]\left[\frac{(4k)!}{(2k-1)!} +\right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{2k}\frac{(4k-s-1)!}{s!\,(2k-s)!}(2k(4k-s) + \varkappa sp)(2\varkappa p)^s\right]$$

2. Для определения оригиналов выражений (1.13)—(1.15) заметим, что каждое из них представляет собой дробно-рациональную функцию. Знаменатель этих функций $J_k(p)$, как видно из его выражения, является многочленом степени $4k + 3$ причем в точке $P = 0$ он имеет двухкратный корень.

Нетрудно найти оригиналы этих выражений используя, вторую теорему разложения [2].

Из выражений (1.13)—(1.15) заключаем что, волновое поле в полупространстве состоит из суперпозиций двух пакет волновых полей, распространяющихся со скоростями c_1 и c_2.

Рассмотрим частные случаи. Пусть заданная на границе нагрузка (1.3) не зависит от угла θ, т. е. $f(x) = \text{const}$. Из формул (1.9) и (1.10) следует, что в этом случае все коэффициенты f_{2k} $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ равны нулю, кроме f_0. Соответствующие изображения компонент, перемещения и напряжения получаются из (1.13)—(1.15). После обратного преобразования находим

$$\frac{\mu}{a} u_r^0 = -\frac{f_0}{\varkappa^2}\frac{1}{r}\int_0^{t-r+1} \varphi(\tau)\left[\cos\omega(t-\tau-r+1) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\omega}\left(\frac{2}{\varkappa^2}-\frac{1}{r^2}\right)\sin\omega(t-\tau-r+1)\right]\exp\left[-\frac{2}{\varkappa^2}(t-\tau-r+1)\right]d\tau \qquad (2.1)$$

$$u_\theta^0 = 0 \qquad (2.2)$$

$$\sigma_{rr}^0 = \frac{f_0}{r}\psi(t-r+1) - \frac{4f_0}{\varkappa^2 r}\left(1-\frac{1}{r}\right)\int_0^{t-r+1}\psi(\tau)\left[\cos\omega(t-\tau-r+1) + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{\omega}\left(1+\frac{1}{r}-\frac{2}{\varkappa^2}\right)\sin\omega(t-\tau-r+1)\right]\exp\left[-\frac{2}{\varkappa^2}(t-\tau-r+1)\right]d\tau$$

$$\omega = 2(\varkappa^2-1)^{1/2}/\varkappa^2 \qquad (2.3)$$

Как следует из (2.1)—(2.3) и (1.5) случай $\alpha = 0$ соответствует распространению одномерных сферических волн дилатации в полупространстве со скоростью c_1.

В другом частном случае предполагается, что на границе $r = 1$ (C — const):

$$f(x) = CP_2(x) = \tfrac{1}{2}C(3x^2-1) = \tfrac{1}{4}C(3\cos 2\theta + 1)$$

Тогда из (1.9) получим $f_{2k} = C$, если $k = 1$, $f_{2k} = 0$, если $k = 0, 2, 3, \ldots$.

Следовательно в формулах (1.13)—(1.15) все слагаемые равны нулю, кроме соответствующее $k = 1$; $J_1(p)$ — будет многочленом седьмой степени и при коэффициенте Пуассона $\nu = 0{,}3$ имеет двухкратный корень в точке $P = 0$, один действительный и две пары комплексно-сопряженных корней. Используя вторую теорему разложения можно найти выражения для перемещения и напряжения. Для простоты приводим выражение только для напряжения ($H(t)$ — функция Хевисайда):

$$\sigma_{rr} = -\frac{C}{r^5}P_2(x)\left\{\left[\frac{72}{9\varkappa^2+4}\int_0^4 \varphi(\tau)(t-\tau)\,d\tau + (-0{,}457r^3 + 1{,}968r^2 - \right.\right.$$

$$-4{,}066r + 3{,}5)\int_0^{t-\varkappa(r-1)}\varphi(\tau)\exp[-0{,}621(t-\tau-\varkappa(r-1))]\,d\tau +$$

$$+(-0{,}492r^3 + 0{,}188r^2 + 0{,}176r - 0{,}114)\int_0^{t-\varkappa(r-1)}\varphi(\tau)\cos 0{,}808(t-\tau-\varkappa(r-1))\times$$

$$\times\exp[-1{,}915(t-\tau-\varkappa(r-1))]\,d\tau + (0{,}948r^3 - 2{,}156r^2 +$$

$$+0{,}096r + 0{,}408)\int_0^{t-\varkappa(r-1)}\varphi(r)\cos 1{,}745(t-\tau-\varkappa(r-1))\exp[-0{,}648(t-\tau-$$

$$-\varkappa(r-1))]\,d\tau - (0{,}790r^3 + 1{,}18r^2 - 0{,}716r + 0{,}152)\int_0^{t-\varkappa(r-1)}\varphi(\tau)\sin 0{,}808(t-$$

$$- \tau - \varkappa(r-1)) \exp[-1{,}915(t - \tau - \varkappa(r-1))]\, d\tau + (1{,}25r^3 + 0{,}74r^2 +$$

$$+ 1{,}55r - 0{,}18) \int\limits_0^{t-\varkappa(r-1)} \varphi(\tau) \sin 1{,}745 (t - \tau - \varkappa(r-1)) \exp[-0{,}648 (t - \tau -$$

$$- \varkappa(r-1))]\, d\tau]\, H(t - \varkappa(r-1)) + \left[\frac{72}{9\varkappa^2 + 4} \int\limits_0^t \varphi(\tau)(t-\tau)\, d\tau +\right.$$

$$+ (0{,}013r^4 - 0{,}534r^3 - 0{,}808r^2 - 1{,}078r + 1{,}736) \int\limits_0^{t-r+1} \varphi(\tau) \exp[-0{,}621 (t -$$

$$- \tau - r + 1)]\, d\tau + (3{,}488r^4 - 6{,}404r^3 + 4{,}648r^2 + 0{,}232r - 1{,}724) \int\limits_0^{t-r+1} \varphi(\tau) \times$$

$$\times \cos 0{,}808 (t - \tau - r + 1) \exp[-1{,}915 (t - \tau - r + 1)]\, d\tau + (1{,}472r^4 -$$

$$- 3{,}85r^3 + 7{,}42r^2 - 8{,}668r + 3{,}798) \int\limits_0^{t-r+1} \varphi(\tau) \sin 0{,}808 (t - \tau - r + 1) \exp \times$$

$$\times [-1{,}915 (t-\tau-r+1)]\, d\tau + (-0{,}668r^4 - 1{,}726r^3 + 3{,}84r^2 - 0{,}718r - 1{,}432) \times$$

$$\times \int\limits_0^{t-r+1} \varphi(\tau) \cos 1{,}745 (t - \tau - r + 1) \exp[-0{,}648 (t - \tau - r + 1)]\, d\tau -$$

$$- (-0{,}744r^4 + 1{,}856r^3 + 0{,}522r^2 - 3{,}110r + 0{,}944) \int\limits_0^{t-r+1} \varphi(\tau) \sin 1{,}745 (t -$$

$$- \tau - r + 1) \exp[-0{,}648 (t - \tau - r + 1)]\, d\tau + r^4 \varphi(t - r + 1)]\, H(t - r + 1) \quad (2.4)$$

В предельном случае $t \to \infty$ используя свойство преобразования Лапласа, получим

$$\frac{\mu}{a} u_r = \frac{\psi(\infty)}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{2k}}{r^{2k}} \frac{(2k+1)\varkappa^2 + 2kr^2}{2(4k^2 + 3k + 2)\varkappa^2 + 8k} P_{2k}(\varkappa)$$

$$\frac{\mu}{a} u_\theta = -\frac{\varkappa^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \psi(\infty) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{2k}}{(4k^2 + 3k + 2)\varkappa^2 + 4k} \frac{1}{r^{2k}} P^1_{2k}(x) \quad (2.5)$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{\psi(\infty)}{r^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{2k}}{r^{2k}} \frac{[3kr^2 - 2(k+1)(2k+1)]\varkappa^2 - 4kr^2}{(4k^2 + 3k + 2)\varkappa^2 + 4k} P_{2k}(x)$$

3. Найдем результирующую силу нормального напряжения на каждом сечении $r = \text{const}$ полупространства. Элементарный расчет показывает, что она равняется

$$P_r = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sigma_{rr} r^2 \sin\theta\, d\theta = 2\pi r^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sigma_{rr} \sin\theta\, d\theta \quad (3.1)$$

Из формул (1.10) и (1.15) следует, что результирующую силу дает только первое слагаемое напряжения σ_{rr} соответствующее $k = 0$. Для остальных слагаемых соответствующих $k \geq 1$, результирующая сила $P_r^k = 0$.

Соответствующие волновые поля назовем несамоуравновешенными и самоуравновешенными.

Таким образом, при заданных граничных условиях волновое поле в полупространстве распространяется в виде суперпозиции несамоуравновешенного и самоуравновешенных полей. Заданная на границе нагрузка также представляется в виде суммы несамоуравновешенного и самоуравновешенных нагрузок.

Если нагрузка на границе $r = 1$ не зависит от угла θ (несамоуравновешена), то в пространстве распространяется только несамоуравновешенные одномерные сферические волны ($k=0$).

В случае если на границе полупространства задана самоуравновешенная нагрузка, соответствующая $k=k_0$, то в нем распространяется только самоуравновешенное поле отвечающее этому k_0.

Отметим аналогию некоторых результатов с результатами, полученными при распространении крутильных волн в цилиндрах и конусах [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение. 1972. 374 с.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
3. *Амрахов А. Н.* Динамическое кручение конического стержня // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 82—86.

Гянджа

Поступила в редакцию 4.11.1992