

УДК 539.9

© 1994 г. А. М. ПЕТРОВ, В. П. СИЗОВ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
 В МНОГОСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ  
 ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ**

Решается задача об определении напряженно-деформированного состояния в многослойной трубе с трансверсально-изотропными слоями обобщенным методом скаляризации динамических упругих полей, приведенным в [1]. Данный метод заключается в описании полей перемещений и напряжений в трансверсально-изотропном материале с помощью трех скалярных потенциальных функций, соответствующих квазипродольным, квазипоперечным и поперечным волнам. Уравнения движения при этом распадаются на три независимых волновых уравнения Гельмгольца.

Возможность представления упругих полей через решения волновых уравнений позволяет решать задачи о локальном воздействии на конструкцию произвольными динамическими нагрузками аналитическим путем. Использование численного счета здесь необходимо лишь на заключительном этапе по сравнению с известными конечно-разностными подходами к решению аналогичных задач [2].

1. Рассмотрим многослойную трубу с трансверсально-изотропными слоями, оси материальной симметрии которых ориентированы вдоль оси  $z$  цилиндрической системы координат  $r, \theta, z$ . Пронумеруем слои, начиная с внутреннего, числами  $1, 2, \dots, N$ . Границы слоев при этом определяются радиусами  $r_0, r_1, r_2, \dots, r_N$  (фиг. 1).

На боковую поверхность трубы ( $r = r_N$ ) действует внешняя нагрузка  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\theta, z, t)$ , зависящая от времени  $t$  и координат  $\theta$  и  $z$ . Внутренняя поверхность ( $r = r_0$ ) свободна от нагружения. Взаимные перемещения точек соседних слоев на границах сопряжения отсутствуют. Тогда указанные условия запишутся в виде

$$\sigma_{rr} = p_r(\theta, z, t), \quad \sigma_{r\theta} = p_\theta(\theta, z, t), \quad \sigma_{rz} = p_z(\theta, z, t) \quad \text{при } r = r_N \quad (1.1)$$

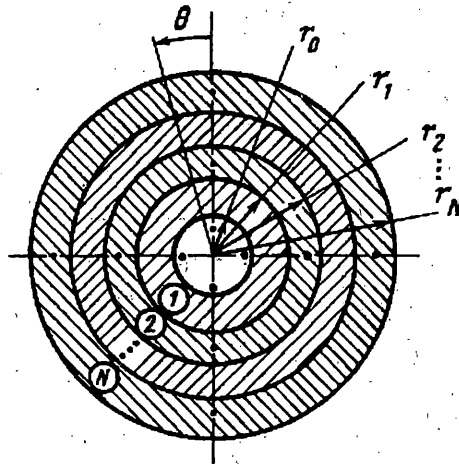
$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0 \quad \text{при } r = r_0 \quad (1.2)$$

$$u_i^{(n)} = u_i^{(n+1)}, \quad \sigma_n^{(n)} = \sigma_n^{(n+1)} \quad \text{при } r = r_n \quad (1.3)$$

В последних равенствах индекс  $n = 1, 2, \dots, N - 1$  относится к номеру слоя, а индекс  $i$  принимает значения  $r, \theta, z$ .

Поля перемещений и напряжений в каждом слое описываются с помощью решения соответствующих уравнений движения и должны удовлетворять граничным условиям (1.1), (1.2) и (1.3). Труба предполагается достаточно длинной, поэтому условия на торцах сводятся к требованию удовлетворения решения принципу Зоммерфельда. Для определения указанных полей применим спектральный метод, следуя которому, с помощью двойного преобразования Фурье по координатам  $z$  и  $t$  рассмотрение задачи переводится из реального пространства  $r, \theta, z, t$  в пространство образов  $r, \theta, \zeta, \omega$ , где параметр  $\zeta$  соответствует координате  $z$ , а круговая частота  $\omega$  соответствует времени  $t$ . Вектор  $\mathbf{P}(\theta, z, t)$  в (1.1) при этом заменяется спектральной плотностью нагрузки

$$\mathbf{P}(\theta, \zeta, \omega) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p}(\theta, z, t) e^{-i\zeta z} e^{i\omega t} dz dt \quad (1.4)$$



Фиг. 1

Здесь нужно заметить, что преобразование (1.4) определяет в дальнейшем общий вид решения задачи, которое содержит под знаком интеграла экспоненциальный множитель  $e^{i\zeta r} e^{-i\omega t}$ . Физически это эквивалентно выделению из решений плоских волн с волновым числом  $\zeta$ , распространяющихся вдоль оси  $z$ . Очевидно, что для удовлетворения принципу излучения, амплитуды этих волн не должны возрастать. Данное условие выполняется автоматически, если область значений  $\zeta$  ограничена действительной числовой осью.

2. Как показано в [1], с помощью трех потенциальных функций  $\varphi$ ,  $w$ ,  $v$ , описывающих соответственно квазипродольные, квазипоперечные и чисто поперечные волны, уравнения движения для слоя могут быть сведены к трем волновым уравнениям

$$\Delta \varphi + g_{(l)}^2 \varphi = 0, \quad \Delta w + g_{(l)} w = 0$$

$$\Delta v + \kappa^2 v = 0 \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \zeta^2 \right) \quad (2.1)$$

Величины  $g_{(l)}$ ,  $g_{(l)}$ ,  $\kappa$  являются волновыми числами для указанных типов волн и определяются равенствами

$$g^2 = A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2} \quad (2.2)$$

$$\kappa^2 = 2(\omega^2 \rho - c_{44} \zeta^2) / (c_{11} - c_{12}) + \zeta^2$$

$$A_1 = \{ (c_{11} + c_{44}) \omega^2 \rho - [c_{11}(c_{33} - 2c_{44}) - c_{13}(c_{13} + 2c_{44})] \zeta^2 \} / (2c_{11}c_{44}) \quad (2.3)$$

$$A_2 = \{ [c_{13}(c_{13} + c_{44}) + c_{44}(c_{11} + c_{13}) + c_{33}(c_{44} - c_{11})] \zeta^4 - (c_{33} - c_{11}) \zeta^2 \omega^2 \rho + \omega^4 \rho^2 \} / (c_{11}c_{44})$$

Здесь  $c_{ij}$  — общепринятые обозначения [3] упругих модулей материала слоя;  $\rho$  — плотность; знак (+) в равенстве (2.2) относится к квазипродольным, а знак (-) к квазипоперечным волнам.

Симметричное относительно луча  $\theta = 0$  общее решение волновых уравнений (2.1) имеет вид

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} [\varphi_m^+ H_m^{(1)}(\beta_{(l)} r) + \varphi_m^- H_m^{(2)}(\beta_{(l)} r)] \cos m\theta \quad (2.4)$$

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} [w_m^+ H_m^{(1)}(\beta_{(l)} r) + w_m^- H_m^{(2)}(\beta_{(l)} r)] \cos m\theta, \quad (2.4)$$

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} [v_m^+ H_m^{(1)}(\kappa_l r) + v_m^- H_m^{(2)}(\kappa_l r)] \sin m\theta$$

где  $H_m^{(1)}$  и  $H_m^{(2)}$  — функции Ганкеля порядка  $m$  1-го и 2-го рода, волновые числа  $\beta_{(l)}$ ,  $\beta_{(l)}$  и  $\kappa_l$  определяются равенствами  $g_{(l)}^2 = \beta_{(l)}^2 + \zeta^2$ ,  $g_{(l)}^2 = \beta_{(l)}^2 + \zeta^2$ ,  $\kappa^2 = \kappa_l^2 + \zeta^2$ ;  $\varphi^+$ ,  $w^+$ ,  $v^+$ ,  $\varphi^-$ ,  $w^-$ ,  $v^-$  — подлежащие определению амплитуды волн соответствующих типов, бегущих к оси  $z$  трубы (-) и в обратном (+) направлении.

Запишем формулы для полей перемещений и напряжений в слое через потенциальные функции  $\varphi$ ,  $w$ ,  $v$  (аналогичные формулы в более общем по сравнению с цилиндрической системой координат случае представлены в [1]):

$$\begin{aligned} u_r &= D_1^{(l)} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + i\zeta D_1^{(l)} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ u_\theta &= D_1^{(l)} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + i\zeta D_1^{(l)} \frac{1}{g_{(l)}} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial r} \\ u_z &= i\zeta (D_1^{(l)} + D_2^{(l)}) \varphi + \left( -D_1 \frac{\zeta^2}{g_{(l)}} + g_{(l)} \right) w \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= d_1^{(l)} \varphi + d_4^{(l)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + i\zeta d_1^{(l)} w + i\zeta d_4^{(l)} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (c_{11} - c_{12}) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= d_4^{(l)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + i\zeta d_4^{(l)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\sigma_{rz} = i\zeta \left( \frac{1}{2} d_3^{(l)} + d_4^{(l)} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left( \frac{1}{2} d_3^{(l)} - \zeta^2 d_4^{(l)} \right) \frac{\partial w}{\partial r} + i\zeta c_{44} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$D_1^{(l)} = \frac{g_{(l)}^2 b_4}{b_3 - (g_{(l)}^2 - \zeta^2)(1 - b_4)}, \quad D_2^{(l)} = \frac{g_{(l)}^2 b_3 - g_{(l)}^2 + (1 - b_4) \zeta^2}{\zeta^2 b_3 - (g_{(l)}^2 - \zeta^2)(1 - b_4)}$$

$$D_1^{(l)} = -\frac{g_{(l)}^2 b_4}{b_3 - g_{(l)}^2 + (1 - b_4) \zeta^2}, \quad d_1^{(l)} = -g_{(l)}^2 a_1 - \zeta^2 a_3 (D_1^{(l)} + D_2^{(l)})$$

$$d_3^{(l)} = 2a_2 D_2^{(l)} + 2a_4 (2D_1^{(l)} + D_2^{(l)}), \quad d_4^{(l)} = 2a_2 D_1^{(l)}, \quad d_1^{(l)} =$$

$$= a_1 g_{(l)} (1 - D_1^{(l)}) + a_3 (g_{(l)} - \zeta^2 D_1^{(l)} / g_{(l)})$$

$$d_3^{(l)} = 2a_2 g_{(l)} + 2a_4 (g_{(l)} - 2D_1^{(l)} \zeta^2 / g_{(l)}), \quad d_4^{(l)} = 2a_2 D_1^{(l)} / g_{(l)}$$

$$a_1 = c_{12}, \quad a_2 = (c_{11} - c_{12})/2, \quad a_3 = c_{13} - c_{12}, \quad a_4 = c_{44} - (c_{11} - c_{12})/2$$

$$b_3 = (\omega^2 \rho - \zeta^2 c_{44}) / c_{11}, \quad b_4 = (c_{13} + c_{44}) / c_{11}$$

Остальные компоненты тензора напряжений, ввиду их второстепенной роли в описываемом алгоритме, здесь не приводятся.

Равенства (2.5), (2.6), определяющие перемещения и напряжения в слое, удобно представить в матричной форме. Для этого введем вектор-столбец  $\mathbf{V} = (u_r, u_\theta, u_z, \sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rz})^T$ , элементами которого являются компоненты перемещений и напряжений, входящие в граничные условия (1.1), (1.2) и (1.3),

а также вектор-столбец искомых амплитуд  $\psi_m = (\varphi_m^+, w_m^+, v_m^+, \varphi_m^-, w_m^-, v_m^-)^T$ . Тогда, с учетом представления (2.4), равенства (2.5), (2.6) запишутся в виде

$$B = \sum_{m=0}^{\infty} F_m B_m = \sum_{m=0}^{\infty} F_m C_m \Psi_m \quad (2.7)$$

$$F_m = \begin{vmatrix} \cos m\theta & & & & & \\ & \cos m\theta & & & & \\ & & \sin m\theta & & & \\ & & & \cos m\theta & & \\ & 0 & & & \cos m\theta & \\ & & & & & \sin m\theta \end{vmatrix}$$

$$c_{m11} = D_1^{(0)} \left[ \frac{m}{r} H_m^{(0)}(\beta_{(0)} r) - \beta_{(0)} H_{m+1}^{(0)}(\beta_{(0)} r) \right],$$

$$c_{m12} = i\zeta \frac{D_1^{(0)}}{g_{(0)}} \left[ \frac{m}{r} H_m^{(0)}(\beta_{(0)} r) - \beta_{(0)} H_{m+1}^{(0)}(\beta_{(0)} r) \right]$$

$$c_{m13} = \frac{m}{r} H_m^{(0)}(\alpha_1 r), \quad c_{m21} = -\frac{m}{r} D_1^{(0)} H_m^{(0)}(\beta_{(0)} r), \quad c_{m22} = i\zeta \frac{D_1^{(0)}}{g_{(0)}} \frac{m}{r} H_m^{(0)}(\beta_{(0)} r)$$

$$c_{m23} = -\frac{m}{r} H_m^{(0)}(\alpha_1 r) + \alpha_1 H_{m+1}^{(0)}(\alpha_1 r), \quad c_{m31} = i\zeta (D_1^{(0)} + D_2^{(0)}) H_m^{(0)}(\beta_{(0)} r)$$

$$c_{m32} = \left( -D_1^{(0)} \frac{\zeta^2}{g_{(0)}} + g_{(0)} \right) H_m^{(0)}(\beta_{(0)} r), \quad c_{m33} = 0$$

$$c_{m41} = \left[ d_1^{(0)} + d_4^{(0)} \left( \frac{m(m-1)}{r^2} - \beta_{(0)}^2 \right) \right] H_m^{(0)}(\beta_{(0)} r) + d_4^{(0)} \frac{\beta_{(0)}}{r} H_{m+1}^{(0)}(\beta_{(0)} r)$$

$$c_{m42} = i\zeta \left\{ \left[ d_1^{(0)} + d_4^{(0)} \left( \frac{m(m-1)}{r^2} - \beta_{(0)}^2 \right) \right] H_m^{(0)}(\beta_{(0)} r) + d_4^{(0)} \frac{\beta_{(0)}}{r} H_{m+1}^{(0)}(\beta_{(0)} r) \right\}$$

$$c_{m43} = (c_{11} - c_{12}) \left[ \frac{m(m-1)}{r^2} H_m^{(0)}(\alpha_1 r) - \frac{m}{r} \alpha_1 H_{m+1}^{(0)}(\alpha_1 r) \right]$$

$$c_{m51} = -d_4^{(0)} \left[ \frac{m(m-1)}{r^2} H_m^{(0)}(\beta_{(0)} r) - \frac{m}{r} \beta_{(0)} H_{m+1}^{(0)}(\beta_{(0)} r) \right]$$

$$c_{m52} = -i\zeta d_4^{(0)} \left[ \frac{m(m-1)}{r^2} H_m^{(0)}(\beta_{(0)} r) - \frac{m}{r} \beta_{(0)} H_{m+1}^{(0)}(\beta_{(0)} r) \right]$$

$$c_{m53} = \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \left[ \left( \frac{2m(1-m)}{r^2} + \alpha_1^2 \right) H_m^{(0)}(\alpha_1 r) - 2 \frac{\alpha_1}{r} H_{m+1}^{(0)}(\alpha_1 r) \right]$$

$$c_{m61} = i\zeta \left( \frac{1}{2} d_3^{(0)} + d_4^{(0)} \right) \left[ \frac{m}{r} H_m^{(0)}(\beta_{(0)} r) - \beta_{(0)} H_{m+1}^{(0)}(\beta_{(0)} r) \right]$$

$$c_{m62} = \left( \frac{1}{2} d_3^{(0)} - \zeta^2 d_4^{(0)} \right) \left[ \frac{m}{r} H_m^{(0)}(\beta_{(0)} r) - \beta_{(0)} H_{m+1}^{(0)}(\beta_{(0)} r) \right], \quad c_{m63} = c_{44} \frac{i\zeta m}{r} H_m^{(0)}(\alpha_1 r)$$

где  $F_m$  — диагональная матрица,  $c_{mij}$  ( $i = 1 \div 6, j = 1 \div 3$ ) — элементы матрицы  $c_m$  ( $6 \times 6$ ). Элементы 4-го, 5-го и 6-го столбцов матрицы  $c_m$  получаются из соответствующих элементов 1-го, 2-го и 3-го столбцов заменой  $H^{(1)}$  на  $H^{(2)}$ .

3. Матричное равенство (2.7) справедливо для каждого  $n$ -го слоя трубы, однако при этом нужно учитывать, что параметры и константы, входящие в

элементы матрицы  $c_m$ , будут различными для разных слоев, поэтому более корректная запись равенства (2.7) имеет вид

$$B_n = \sum_{m=0}^{\infty} F_m B_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty} F_m c_{mn} \Psi_{mn} \quad (3.1)$$

Граничные условия (1.3) эквивалентны выполнению условия  $B_n^B = B_{nH}^H$  и дают связь между амплитудами  $\Psi_{mn}$  потенциальных функций смежных слоев

$$c_{mn}^B \Psi_{mn} = c_{m,n+1}^H \Psi_{m,n+1} \quad (3.2)$$

Индекс (B) означает, что соответствующая величина вычисляется на внешней границе слоя, а (H) — на внутренней.

Опираясь на равенство (3.2) легко показать, что напряженно-деформированное состояние в любом слое определяется значениями потенциалов  $\Psi_{mN}$  во внешнем слое

$$B_{mn} = c_{mn}^B c_{mn}^{B-1} c_{m,n+1}^H c_{m,n+1}^{B-1} c_{m,n+2}^H \dots c_{m,N-1}^{B-1} c_{mN}^H \Psi_{mN} \quad (3.3)$$

где индекс (-1) означает обращение соответствующей матрицы.

Использование граничных условий (1.1) и (1.2) позволяет получить матричное уравнение для определения неизвестных амплитуд  $\Psi_{mN}$ :

$$K_m \Psi_{mN} = (P_{rm}, P_{\theta m}, P_{zm}, 0, 0, 0)^T \quad (3.4)$$

$$K_m = \begin{pmatrix} 4\text{-я строка матрицы } C_{mN}^B \\ 5\text{-я строка матрицы } C_{mN}^B \\ 6\text{-я строка матрицы } C_{mN}^B \\ 4\text{-я строка матрицы } R_m \\ 5\text{-я строка матрицы } R_m \\ 6\text{-я строка матрицы } R_m \end{pmatrix}, \quad R_m = C_{m1}^H c_{m1}^{B-1} c_{m2}^H c_{m2}^{B-1} \dots c_{m,N-1}^{B-1} c_{mN}^H$$

где  $P_{rm}$ ,  $P_{\theta m}$ ,  $P_{zm}$  являются элементами разложения спектральной плотности нагрузки (1.4) в ряд Фурье по координате  $\theta$ :

$$P_r(\theta, \zeta, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} P_{rm}(\zeta, \omega) \cos m\theta \quad (3.5)$$

$$P_{\theta}(\theta, \zeta, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} P_{\theta m}(\zeta, \omega) \sin m\theta, \quad P_z(\theta, \zeta, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} P_{zm}(\zeta, \omega) \cos m\theta$$

Из уравнения (3.4) находим амплитуды  $\Psi_{mN}$ :

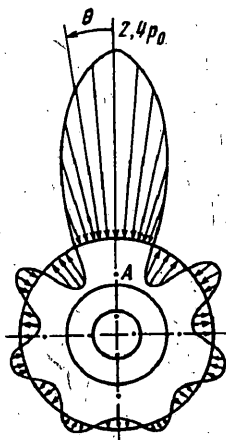
$$\Psi_{mN} = K_m^{-1} (P_{rm}, P_{\theta m}, P_{zm}, 0, 0, 0)^T \quad (3.6)$$

Далее, ограничиваясь конечным числом слагаемых ( $0 < m < M$ ), с помощью равенств (3.1) и (3.3) определяем трансформанты полей перемещений и напряжений в интересующем слое. Переход в реальное пространство  $r, \theta, z, t$  осуществляется обратным преобразованием Фурье

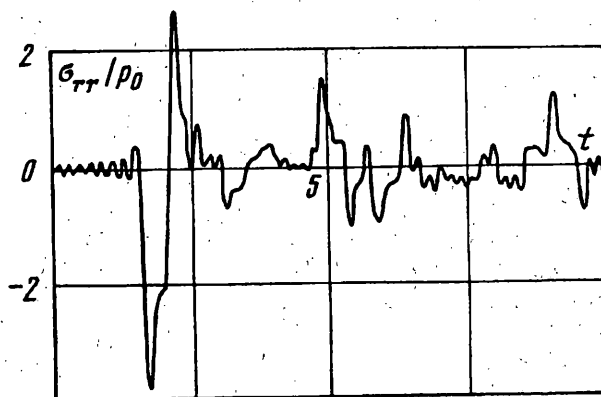
$$B_n(r, \theta, z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(r, \theta, \zeta, \omega) e^{i\zeta z} e^{-i\omega t} d\zeta d\omega \quad (3.7)$$

Подынтегральная функция  $B_n(r, \theta, \zeta, \omega)$  имеет особенности на резонансных частотах, препятствующие вычислению интеграла (3.7) численными методами. Эти особенности могут быть устранены, если задача решается с учетом поглощения волновой энергии материалами слоев. Наиболее простой способ введения потерь состоит в добавлении к волновым числам  $g_{(l)}$ ,  $g_{(t)}$ ,  $\kappa$  мнимых слагаемых

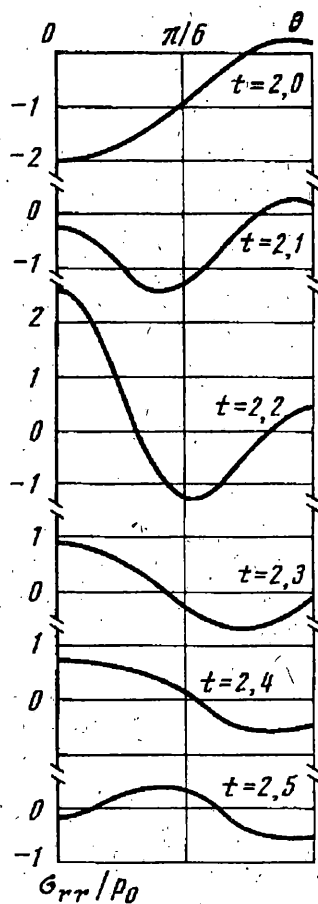
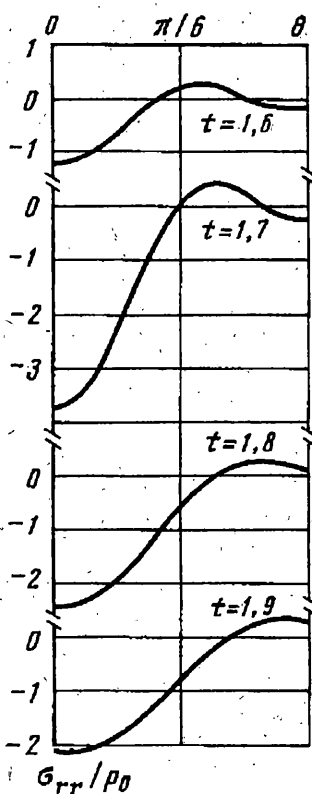
$$g_{(l)} = g'_{(l)} + i g''_{(l)}, \quad g_{(t)} = g'_{(t)} + i g''_{(t)}, \quad \kappa = \kappa' + i \kappa'' \quad (3.8)$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Величины  $g_{(0)}''$ ,  $g_{(0)}'$ ,  $\kappa''$  являются коэффициентами поглощения для соответствующих типов волн, а  $g_{(0)}'$ ,  $g_{(0)}$ ,  $\kappa'$  по-прежнему определяются формулами (2.2) и (2.3).

4. Ниже приведены результаты численного определения нормальных напряжений  $\sigma_r$  на границе раздела слоев в двухслойной трубе при воздействии на

внешнюю поверхность импульсом давления прямоугольной во времени формы и длительностью 0,5 мкс.

Внутренний слой трубы — алюминиевый, обладает следующими характеристиками  $\rho_1 = 2700 \text{ кг/м}^3$ ;  $c_{11}^{(1)} = c_{33}^{(1)} = 107 \text{ ГПа}$ ;  $c_{12}^{(1)} = c_{13}^{(1)} = 55,3 \text{ ГПа}$ ;  $c_{44}^{(1)} = 25,9 \text{ ГПа}$ ;  $g_{(1)}'' = 2 \text{ м}^{-1}$ ;  $\kappa_1'' = 1 \text{ м}^{-1}$ . Внешний слой выполнен из углерода:  $\rho_2 = 1400 \text{ кг/м}^3$ ;  $c_{11}^{(2)} = c_{33}^{(2)} = 19,2 \text{ ГПа}$ ;  $c_{12}^{(2)} = c_{13}^{(2)} = 8,0 \text{ ГПа}$ ;  $c_{44}^{(2)} = 5,6 \text{ ГПа}$ ;  $g_{(2)}'' = 5 \text{ м}^{-1}$ ,  $\kappa_2'' = 2 \text{ м}$ . Радиусы границ слоев:  $r_0 = 3 \text{ мм}$ ;  $r_1 = 6 \text{ мм}$ ;  $r_2 = 12 \text{ мм}$ .

Распределение давления вдоль координаты  $z$  предполагалось неизменным ( $\zeta = 0$ ), а изменение давления по координате  $\theta$  определялось усеченным рядом:

$$p_r(\theta) = -\frac{1}{2\pi} p_0 \left( 1 + 2 \sum_{m=1}^M \cos m\theta \right) \quad (4.1)$$

при  $M \rightarrow \infty$  данный ряд моделирует локальное воздействие в точке  $\theta = 0$ , причем  $p_r^{(0)} \rightarrow -p_0 \delta(\theta)$ , где  $\delta(\theta)$  — дельта-функция Дирака.

Интегрирование по формуле (3.7) производилось с использованием метода быстрого преобразования Фурье [4]. При вычислении подынтегрального выражения в  $2^{11} = 2048$  точках, время счета составило 55 минут (на ЭВМ ЕС—1035).

На фиг. 2 и 3 представлено распределение внешнего давления вдоль поверхности трубы согласно формуле (4.1) при  $M = 7$  и соответствующее изменение во времени (мкс) напряжений  $\sigma_{rr}$  в точке  $A$  на границе раздела слоев. Следует отметить, что при уменьшении относительной толщины слоев данный график приходит в полное соответствие с результатами [5], в которой определялись напряжения на границе раздела слоев в двухслойной плите.

На фиг. 4 показано распределение напряжений  $\sigma_{rr}$  вдоль границы раздела слоев в различные моменты времени  $t$  [мкс]. Представленная последовательность позволяет проследить прохождение через поверхность  $r = r_1$  как прямого, так и первого отраженного от внутренней границы трубы импульсов.

Приведенные расчеты показывают, что данный метод позволяет произвести анализ напряженно-деформированного состояния в трубе с приемлемым временем счета и хорошей точностью, которая может быть повышена увеличением числа точек разбиения участка интегрирования в выражении (3.7) вместе с расширением самих границ этого участка. Кроме того, точность воспроизведения волнового процесса сохраняется на значительном временном интервале, тогда как при решении численными методами она постепенно падает с ростом времени  $t$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сизов В. П. О скаляризации динамических упругих полей в трансверсально-изотропных средах // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 55—58.
2. Зукас Дж. А., Николас Т., Свифт Х. Ф., Курран Д. Р. Динамика удара. М.: Мир, 1985. 296 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. С. 101.
4. Бурдик В. С. Анализ гидроакустических систем. Л.: Судостроение, 1988. 392 с.
5. Сизов В. П. Расчет динамической концентрации напряжения в слоистой конструкции при импульсных нагрузках // Изв. ВУЗ. Машиностроение. 1985. Вып. 2. С. 22—25.

Ростов на Дону

Поступила в редакцию  
26.VIII.1991