

УДК 539.3

© 1994 г. Д. В. ГРИЛИЦКИЙ, А. А. ЕВТУШЕНКО, В. И. ПАУК

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА  
НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ  
С УЧЕТОМ ТЕПЛООБРАЗОВАНИЯ ОТ ТРЕНИЯ

Рассматривается плоская контактная задача с учетом теплообразования от трения для упругого полупространства, по поверхности которого скользит цилиндрический деформируемый штамп (фиг. 1). Известные решения [1—3] сходной контактной задачи описывают, в основном, установившийся режим фрикционного разогрева. На самом же деле изменение контактного давления и размеров площадки контакта есть существенно нестационарный процесс. В [4, 5] получены решения нестационарных контактных задач с учетом фрикционного теплообразования в случае, когда термоупругие перемещения приближались квадратической функцией. Более точное решение задачи дано в [6], где разработан алгоритм, основанный на использовании функций Грина, полученных в [7]. Решение найдено в предположении, что одно из тел не проводит тепла.

В публикуемой статье предполагается, что материалы обоих контактирующих тел теплопроводящие и тепловой контакт между ними неидеальный.

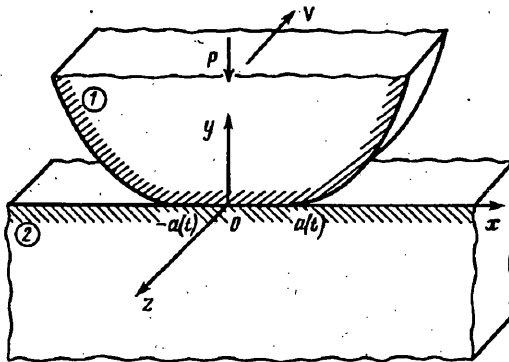
1. Пусть упругие полупространство и параболический штамп прижимаются силой  $P$ , приложенной симметрично. Кроме того, штамп движется с постоянной скоростью  $V$  вдоль своих образующих. Вне области контакта на поверхностях тел внешние усилия отсутствуют. Силами трения  $\tau_{xy}(x, t)$  в зоне контакта пренебрегаем.

В результате движения штампа на неизвестной заранее площадке контакта  $(-a(t), a(t))$  возникают силы трения  $\tau_{xy}(x, t)$ , связанные с контактным давлением  $p(x, t)$  законом Амонтона

$$\tau_{xy}(x, t) = fp(x, t), \quad |x| \leq a(t), \quad y = 0, \quad t > 0,$$

где  $f$  — коэффициент трения.

Напряжения  $p(x, t)$  и  $\tau_{xy}(x, t)$  вызывают соответственно плоское и антиплоское состояния контактирующих тел.



Фиг. 1

В силу малости области контакта по сравнению с радиусом кривизны основания штампа, предположим, что его с достаточной степенью точности можно заменить полупространством.

В результате работы сил трения  $\tau_{xy}(x, t)$  происходит разогрев контактирующих тел, т. е. образуются тепловые потоки  $q_1(x, t)$  и  $q_2(x, t)$ , направленные соответственно в глубь штампа и полупространства. Возникающие в телах нестационарные тепловые поля  $T_1(x, y, t)$  и  $T_2(x, y, t)$  приводят к перераспределению контактного давления и к изменению длины области контакта.

В математическом плане поставленная задача сводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} = \frac{1}{k_i} \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (1.1)$$

и системы уравнений термоупругости

$$\mu_i \Delta u_i + (\lambda_i + \mu_i) \partial \theta_i / \partial x = \gamma_i \partial T_i / \partial x \quad (1.2)$$

$$\mu_i \Delta v_i + (\lambda_i + \mu_i) \partial \theta_i / \partial y = \gamma_i \partial T_i / \partial y \quad (i = 1, 2)$$

при нулевых начальных и следующих граничных условиях:  
механические

$$\sigma_{y1}(x, t) = \sigma_{y2}(x, t) = -p(x, t), \quad |x| \leq a(t), \quad y = 0, \quad t > 0 \quad (1.3)$$

$$\sigma_{xy}(x, t) = \sigma_{xy2}(x, t) = 0, \quad |x| < \infty, \quad y = 0, \quad t > 0 \quad (1.4)$$

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) = \Delta(t) - g(x), \quad |x| \leq a(t), \quad y = 0, \quad t > 0 \quad (1.5)$$

тепловые

$$K_i \partial T_i / \partial y = (-1)^i q_i(x), \quad |x| \leq a(t), \quad y = 0, \quad t > 0 \quad (1.6)$$

$$\partial T_i / \partial y = 0 \quad |x| > a(t), \quad y = 0, \quad t > 0 \quad (1.7)$$

$$q_1(x, t) + q_2(x, t) = f \cdot V \cdot p(x, t), \quad |x| \leq a(t), \quad y = 0, \quad t > 0 \quad (1.8)$$

$$h_0 (q_1(x, t) - q_2(x, t)) = T_1(x, t) - T_2(x, t), \quad |x| \leq a(t), \quad y = 0, \quad t > 0 \quad (1.9)$$

$$\theta_i = \partial u_i / \partial x + \partial v_i / \partial y, \quad \gamma_i = (3\lambda_i + 2\mu_i) \alpha_i$$

Здесь  $\lambda_i, \mu_i, \alpha_i, K_i, k_i$  ( $i = 1, 2$ ) — соответственно постоянные Ляме, коэффициенты температурного линейного расширения, теплопроводности и температуропроводности материалов контактирующих тел.  $\Delta(t)$  — сближение контактирующих тел,  $g(x) = x^2/2r$  — функция, описывающая основание штампа ( $r$  — радиус кривизны основания).

Соотношения (1.8), (1.9) есть условия неидеального теплового контакта тел с учетом теплообразования [8], в которых  $h_0$  — контактное термосопротивление.

При сделанных предположениях требуется определить длину области контакта, распределение контактного давления  $p(x, t)$ , температур  $T_i(x, y, t)$  и тепловых потоков  $q_i(x, t)$  для моментов времени  $t > 0$ .

2. Нормальное перемещение границы штампа ( $i = 1$ ) и полупространства ( $i = 2$ ) представим в виде суммы

$$v_i(x, t) = v_i^f(x, t) + v_i^t(x, t) \quad (i = 1, 2), \quad |x| \leq a(t), \quad y = 0, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

где  $v_i^f(x, t)$  — упругие перемещения, вызванные действием контактного давления  $p(x, t)$ ,  $v_i^t(x, t)$  — температурные перемещения, вызванные действием тепловых потоков  $q_i(x, t)$ .

Задачу теории упругости для контактирующих тел будем рассматривать в квазистатической постановке. Используя результаты [9] при выполнении условий

(1.3), (1.4), вертикальные упругие перемещения границ штампа и полупространства представим в виде

$$v_i(x, t) = (-1)^{i+1} \frac{1 - \nu_i}{\pi \mu_i} \int_{-a(t)}^{a(t)} p(\xi, t) \ln |\xi - x| d\xi, \quad |x| < \infty, \quad t > 0 \quad (2.2)$$

где  $\nu_i$  ( $i = 1, 2$ ) — коэффициенты Пуассона материалов соприкасаемых тел.

Решение граничной задачи теплопроводности (1.1), (1.6), (1.7) имеет вид [6]:

$$T_i(x, t) = \frac{1}{2\pi K_i} \int_0^t \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} q_i(\xi, \tau) \frac{e^{-R_i^2}}{t - \tau} d\xi d\tau, \quad |x| < \infty, \quad t > 0 \quad (2.3)$$

$$R_i = 1/2 (x - \xi) / [k_i (t - \tau)]^{1/2} \quad (i = 1, 2)$$

Нестационарные температурные перемещения поверхностей штампа и полупространства, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (1.2), представим в виде [7]:

$$v_i'(x, t) = (-1)^i \frac{\delta_i k_i}{\pi} \int_0^t \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} q_i(\xi, \tau) \frac{F_i(R_i)}{\sqrt{k_i(t - \tau)}} d\xi d\tau, \quad |x| < \infty, \quad t > 0$$

$$\delta_i = \frac{\alpha_i(1 + \nu_i)}{K_i}, \quad F_i(R_i) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-R_i^2}}{R_i} \int_0^{R_i} e^{-s^2} ds \quad (2.4)$$

Удовлетворив при помощи соотношений (2.1), (2.2), (2.4) граничному условию (1.5), а также, подставив в условия неидеального теплового контакта (1.8), (1.9) выражения для температур (2.3), получим систему интегральных уравнений задачи

$$\left( \frac{1 - \nu_1}{\mu_1} + \frac{1 - \nu_2}{\mu_2} \right) \frac{1}{\pi} \int_{-a(t)}^{a(t)} p(\xi, t) \ln |\xi - x| d\xi - \frac{\delta_1 k_1}{\pi} \int_0^t \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} q_1(\xi, \tau) \frac{F_1(R_1)}{\sqrt{k_1(t - \tau)}} d\xi d\tau -$$

$$- \frac{\delta_2 k_2}{\pi} \int_0^t \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} q_2(\xi, \tau) \frac{F_2(R_2)}{\sqrt{k_2(t - \tau)}} d\xi d\tau = \Delta(t) - \frac{x^2}{2r}$$

$$q_1(x, t) + q_2(x, t) = fVp(x, t), \quad |x| \leq a(t), \quad y = 0, \quad t > 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{2\pi K_1} \int_0^t \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} q_1(\xi, \tau) \frac{e^{-R_1^2}}{t - \tau} d\xi d\tau - \frac{1}{2\pi K_2} \int_0^t \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} q_2(\xi, \tau) \frac{e^{-R_2^2}}{t - \tau} d\xi d\tau =$$

$$= h_0 [q_1(x, t) - q_2(x, t)]$$

К системе интегральных уравнений необходимо добавить условие равновесия

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} p(x, t) dx = P \quad (2.6)$$

и физические неравенства

$$p(x, t) \geq 0, \quad |x| \leq a(t), \quad t > 0$$

$$v_1(x, t) - v_2(x, t) \geq \Delta(t) - g(x), \quad |x| > a(t), \quad y = 0, \quad t > 0 \quad (2.7)$$

Система интегральных уравнений (2.5), (2.6) и неравенства (2.7) дают замкнутую систему для определения величин  $a(t)$ ,  $\Delta(t)$  и функций  $p(x, t)$ ,  $q_1(x, t)$  и  $q_2(x, t)$ .

Обозначим

$$x = A_0 x^*, \quad \xi = A_0 \xi^*, \quad t = \frac{A_0^2}{k_1} t^*, \quad \tau = \frac{A_0^2}{k_1} \tau^*, \quad a(t) = A_0 a^*(t^*)$$

$$T_i(x, t) = \frac{fVP}{K_1} T_i^*(x^*, t^*), \quad q_i(x, t) = \frac{fVP}{A_0} q_i^*(x^*, t^*) \quad (i = 1, 2)$$

$$p(x, t) = \frac{P}{A_0} p^*(x^*, t^*), \quad A_0 = \frac{3\pi(1-\nu_1)K_1}{4\alpha_1 fV\mu}, \quad \mu = \frac{2(1-\nu_1)\mu_1\mu_2}{(1-\nu_1)\mu_2 + (1-\nu_2)\mu_1}$$

где  $A_0$  — полудлина области контакта в случае, когда граничная поверхность полупространства теплоизолирована, а температурное поле штампа — установившееся [6].

В новых обозначениях система интегральных уравнений принимает вид (звездочки опускаем):

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} [q_1(\xi, t) + q_2(\xi, t)] \ln |\xi - x| d\xi - \frac{3}{8}\pi \int_0^{a(t)} \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} q_1(\xi, \tau) \frac{F_1(\hat{R}_1)}{\sqrt{t-\tau}} d\xi d\tau - \frac{3}{8}\frac{A_2}{A_3}\pi \int_0^{a(t)} \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} q_2(\xi, \tau) \frac{F_1(\hat{R}_2)}{\sqrt{A_2(t-\tau)}} d\xi d\tau = \hat{\Delta}(t) - \frac{x^2}{A_4^2} \quad (2.8)$$

$$A_1 [q_1(x, t) - q_2(x, t)] - \int_0^{a(t)} \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} q_1(\xi, \tau) \frac{e^{-\hat{R}_1^2}}{t-\tau} d\xi d\tau + A_1 \int_0^{a(t)} \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} q_2(\xi, \tau) \frac{e^{-\hat{R}_2^2}}{t-\tau} d\xi d\tau = 0$$

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} [q_1(\xi, t) + q_2(\xi, t)] d\xi = 1 \quad (2.9)$$

$$\hat{\Delta}(t) = \frac{2r\Delta(t)}{A^2(0)}, \quad \hat{R}_1 = \frac{x-\xi}{2\sqrt{t-\tau}}, \quad \hat{R}_2 = \frac{x-\xi}{2\sqrt{A_2(t-\tau)}}$$

$$A_1 = \frac{K_1}{K_2}, \quad A_2 = \frac{k_1}{k_2}, \quad A_3 = \frac{\delta_1}{\delta_2}, \quad A_4 = \frac{A(0)}{A_0}, \quad A_5 = \frac{2\pi K_1 h_0}{A_0}$$

где  $A^2(0) = 4P^2(1-\nu_1^2)r/\pi\mu$  — полудлина области контакта при  $t=0$  [9].

3. Для численного решения системы интегральных уравнений (2.8), (2.9) используем метод граничных элементов на основе кусочно-постоянных финитных функций. Аппроксимирующие свойства таких функций исследованы в [10]. Временной интервал  $(0, t)$  разделим на  $l$  частей длиной  $\delta t = t/l$  точками  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{l-1} < \tau_l = t$ . Контактную площадку  $(-a(t), a(t))$  разобьем на  $n$  частей шириной  $\delta x$  точками  $-a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-1} < \xi_n = a$ . Предположим, что на каждой временно-пространственной элементарной области  $[\tau_{j-1}, \tau_j] \times [\xi_{k-1}, \xi_k]$  тепловые потоки суть величины постоянные, для обозначения которых введем символы  $q_{ij}^{(m)}$  ( $m = 1, 2$ ).

Исходя из этих допущений, для каждого момента времени  $t = \tau_l$  получаем дискретизированный аналог системы интегральных уравнений в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^n [q_i^{(1)} + q_i^{(2)}] b_{ik} - \frac{3}{8}\pi \sum_{i=1}^n q_i^{(1)} c_{ik}^{(1)} - \frac{3}{8}\pi \sum_{i=1}^n q_i^{(2)} c_{ik}^{(2)} - \hat{\Delta}_k &= \\ &= \frac{x_k^2}{A_4^2} + \frac{3}{8}\pi \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{i=1}^n q_{ij}^{(1)} c_{ijk}^{(1)} + \frac{3}{8}\pi \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{i=1}^n q_{ij}^{(2)} c_{ijk}^{(2)} \\ A_5 [q_i^{(1)} - q_i^{(2)}] - \sum_{i=1}^n q_i^{(1)} d_{ik}^{(1)} + A_1 \sum_{i=1}^n q_i^{(2)} d_{ik}^{(2)} &= \\ &= \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{i=1}^n q_{ij}^{(1)} d_{ijk}^{(1)} - A_1 \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{i=1}^n q_{ij}^{(2)} d_{ijk}^{(2)} \quad (k = \overline{1, n}) \end{aligned} \right. \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^n [q_{ii}^{(1)} + q_{ii}^{(2)}] \delta x = 1, \quad b_{ik} = \hat{x}_2 \ln |\hat{x}_2| - \hat{x}_1 \ln |\hat{x}_1| - \delta x \quad (3.2)$$

$$c_{ijkl}^{(1)} = \begin{cases} -\hat{t}_1 [F_4(X_{12}) - F_4(X_{11})] + \hat{t}_2 [F_4(X_{22}) - F_4(X_{21})] & (j \neq l) \\ \hat{t}_2 [F_4(X_{22}) - F_4(X_{21})] & (j = l) \end{cases}$$

$$c_{ijkl}^{(2)} = \begin{cases} -\hat{t}_1 [F_4(X_{12}^2) - F_4(X_{11}^2)] + \hat{t}_2 [F_4(X_{22}^2) - F_4(X_{21}^2)] & (j \neq l) \\ \hat{t}_2 [F_4(X_{22}^2) - F_4(X_{21}^2)] & (j = l) \end{cases}$$

$$d_{ijkl}^{(1)} = \begin{cases} 2\sqrt{\hat{t}_1} [F_6(X_{11}) - F_4(X_{12})] - 2\sqrt{\hat{t}_2} [F_6(X_{21}) - F_6(X_{22})] & (j \neq l) \\ -2\sqrt{\hat{t}_1} [F_6(X_{21}) - F_6(X_{22})] & (j = l) \end{cases}$$

$$d_{ijkl}^{(2)} = \begin{cases} 2\sqrt{A_2 \hat{t}_1} [F_6(X_{11}^2) - F_4(X_{12}^2)] - 2\sqrt{A_2 \hat{t}_2} [F_6(X_{21}^2) - F_6(X_{22}^2)] & (j \neq l) \\ -2\sqrt{A_2 \hat{t}_1} [F_6(X_{21}^2) - F_6(X_{22}^2)] & (j = l) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$X_{rp}^1 = 1/2\hat{x}_p/\sqrt{\hat{t}_r}, \quad X_{rp}^2 = 1/2\hat{x}_p/\sqrt{A_2 \hat{t}_r} \quad (r, p = 1, 2)$$

$$\hat{x}_1 = (k - i - 1/2) \delta x, \quad \hat{x}_2 = (k - i + 1/2) \delta x, \quad \hat{t}_1 = (l - j - 1/2) \delta t$$

$$\hat{t}_2 = (l - j + 1/2) \delta t, \quad x_i = \xi_i - 1/2\delta x \quad (i = \overline{1, n}), \quad \hat{\Delta}_l = \hat{\Delta}(t_i)$$

Функции  $F_4(X)$  и  $F_6(X)$  приведены в [7]. Система линейных алгебраических уравнений (3.1), (3.2) есть замкнутой системой  $2n + 1$  уравнений для определения  $2n + 1$  неизвестных  $q_{ii}^{(1)}, q_{ii}^{(2)}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и  $\hat{\Delta}$ . После ее решения контактное давление определяем по формуле  $p(x_i, t_i) = q_{ii}^{(1)} + q_{ii}^{(2)}$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Неизвестные границы области контакта находятся итерационным путем из условий (2.7).

Температуры поверхностей контактирующих тел определяются по формулам

$$T_r(x_k, t_i) = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n q_{ij}^{(r)} d_{jki}^{(r)} \quad (r = 1, 2; k = \overline{1, n})$$

4. Численный анализ задачи проведен для трех случаев:

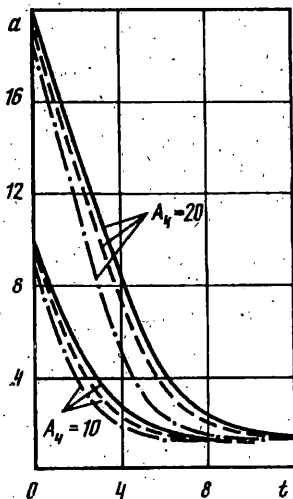
а) материал одного из соприкасаемых тел не является теплопроводным. В этом случае  $q_1(x, t) = p(x, t)$ ,  $q_2(x, t) = 0$  (либо  $q_1(x, t) = 0$ ,  $q_2(x, t) = p(x, t)$ ), а система интегральных уравнений вырождается в одно интегральное уравнение на  $p(x, t)$ .

б) материалы тел имеют одинаковые теплофизические характеристики  $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ .

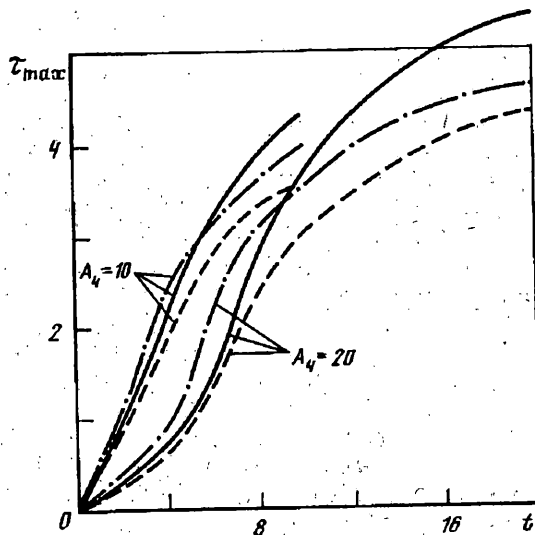
в) материалы тел имеют разные теплофизические характеристики  $A_1 = A_3 = 1$ ,  $A_2 = 1,5$ .

На фиг. 2 приведена зависимость величины площадки контакта  $a(t)$  от времени для двух значений параметра  $A_4$ . Здесь и в дальнейшем сплошными линиями показан случай (а), штриховыми — случай (б), штрихпунктирными — случай (в). Эти графики дают представление о выходе длины области контакта на стационарное значение. Видно, что существует временная область, на которой  $a(t)$  изменяется линейно. Это подтверждает результат работы [6], в которой для случая (а) получена зависимость  $a(t) = A_4 - 3\pi t/8$ .

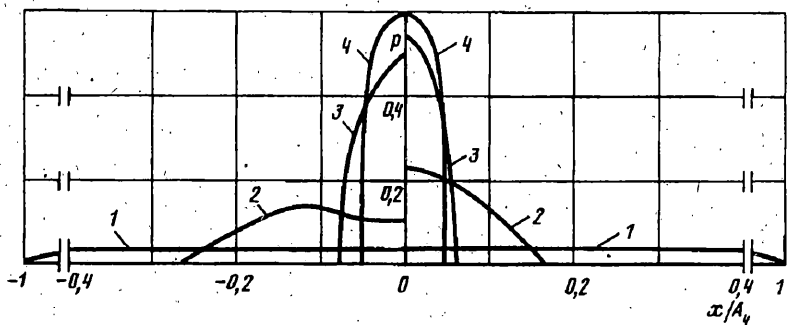
Изменение максимального значения температуры в области контакта  $T_{\max}$  во времени для рассматриваемых трех случаев и для тех же двух значений параметра  $A_4$  показано на фиг. 3. В связи с принятым допущением от теплоизолированности тел вне области контакта, выход температуры на стационарный режим не



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

наблюдается. Следует отметить, что в случае (с) в области контакта имеет место скачок температуры между телами, который при  $A_4 = 1$  становится 7—8% от значения температуры поверхности полупространства.

На фиг. 4 приведено изменение эпюр контактного давления под штампом во времени для значения  $A_4 = 20$  для случая (б) (левая половина рисунка) и для случая (в) (правая половина). Кривые 1—4 соответствуют  $t = 0, 5, 10, 20$ .

В заключение отметим, что применение к решению системы интегральных уравнений (2.5), (2.6) метода граничных элементов на основе функций влияния (3.3) имеет некоторые особенности. Такой подход дает хорошие результаты на ранней стадии взаимодействия. Поскольку на каждом временном шаге следует заново определять функции влияния, соответствующие всем предыдущим интервалам времени, эффективность использованной методики с течением времени заметно снижается. Кроме того, при больших ( $\geq 40$ ) значениях параметра  $A_4$  требуется значительное число точек разбиения области ( $-a(t), a(t)$ ), поскольку в этом случае контакт становится прерывистым и наблюдаются флуктуации давления. Выход может быть найден, по-видимому, в переходе к формулам аппроксимаций более высокого порядка точности, чем кусочно постоянная.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М. Контактная задача с учетом износа, вызванного локальным оплавлением//Физ.-хим. механика материалов. 1986. Т. 22. № 1. С. 116—124.
2. Грилицкий Д. В., Паук В. И. Контактная задача для толстого шероховатого слоя с учетом износа и теплообразования//Физ.-хим. механика материалов. 1989. Т. 25. № 3. С. 78—82.
3. Грилицкий Д. В., Паук В. И. Контактная термоупругопластическая задача для слоя с учетом теплообразования от трения//Трение и износ. 1991. Т. 12. № 2. С. 246—251.
4. Barber J. R. Some thermoelastic contact problems involving frictional heating//Quart. J. Mech. Appl. Math. 1976. V. 29. No 1. P. 1—13.
5. Barber J. R. The transient thermoelastic contact of a sphere sliding on a plane//Wear. 1980. V. 59. No 1. P. 1—9.
6. Azarkhin A., Barber J. R. Transient contact of two sliding half-planes with wear//Trans. ASME. J. Tribology. 1987. V. 109. No 3. P. 598—603.
7. Barber J. R., Martin-Moran C. J. Green's functions for transient thermoelastic contact problems for the half-plane//Wear. V. 79. № 1. 1982. P. 11—19.
8. Грилицкий Д. В., Баран В. П. О постановке контактных задач термоупругости с учетом теплообразования при неидеальном тепловом контакте тел//Вестник Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. 1987. Вып. 27. С. 10—13.
9. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
10. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.

Львов

Поступила в редакцию  
15.VII.1992