

УДК 531.8

© 1994 г. Э. Л. ПОЗНЯК

## ДИНАМИКА РОТОРА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С КОРПУСОМ В РЕЖИМЕ ПОДШИПНИКА СУХОГО ТРЕНИЯ

В ряде случаев элементы вращающегося ротора взаимодействуют с неподвижным корпусом по цилиндрическим поверхностям с мало отличающимися радиусами и при отсутствии смазки, т. е. в условиях, характерных для работы подшипников сухого трения. В зависимости от рабочих и конструктивных параметров системы, величин и коэффициента сил сухого трения, начальных условий и т. п. могут возникнуть различные режимы ротора, в том числе весьма опасные. В [1] впервые была поставлена и качественно проанализирована задача о взаимодействии жесткого тяжелого ротора с корпусом. В частности, было предсказано и экспериментально подтверждено существование режима несинхронного обката, при котором ротор прецессирует в сторону, противоположную направлению вращения ротора с частотой, в  $R/\Delta$  раз превышающей частоту вращения ротора ( $R$  — радиус соприкосновения,  $\Delta$  — радиальный зазор). Задача взаимодействия гибкого идеально уравновешенного ротора с корпусом рассмотрена в [2, 3], причем в [2] это сделано при отсутствии статической нагрузки, а в [3] — для ротора, находящегося в поле сил тяжести. В [4] рассмотрена задача для гибкого сильно разбалансированного ротора, у которого с корпусом взаимодействует диск.

В публикуемой работе рассматривается нестационарная задача взаимодействия тяжелого неуравновешенного ротора с корпусом, когда активный вращающий момент не в состоянии поддержать постоянство угловой скорости, т. е. рассматривается задача выбега. Подробно рассмотрены две интересные для практики задачи: внезапное исчезновение жесткости опор, внезапная и сильная разбалансировка ротора.

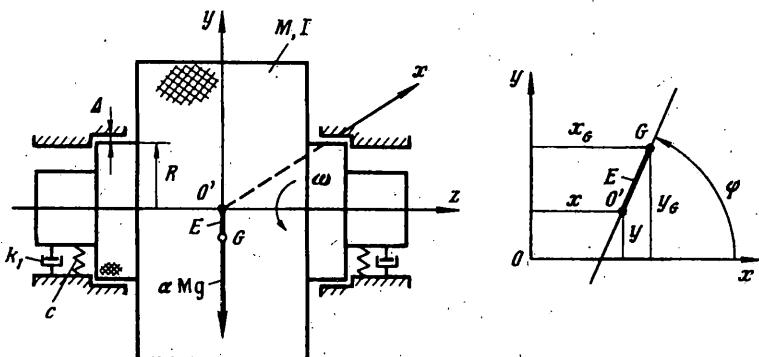
Работа является продолжением [5], посвященной анализу причин разрушения валопроводов крупных турбогенераторов.

**1. Основные уравнения и зависимости.** Рассматривается жесткий симметричный неуравновешенный ротор с массой  $M$ , неуравновешенностью  $E$  и осевым моментом инерции  $I$  (фиг. 1), находящийся под действием сил тяжести, перпендикулярных осям вращения, и крутящегося момента  $U(\phi)$ , где  $\phi$  — угол собственного вращения ротора, а  $\dot{\phi}$  — скорость этого вращения. Ротор опирается на две одинаковые изотропные опоры с общими коэффициентом жесткости  $c$  и коэффициентом линейного демпфирования  $k$ , при поперечных перемещениях. Наименьший радиальный зазор между цилиндрическими поверхностями ротора и корпуса равен  $\Delta$ , причем  $\Delta \ll R$ , где  $R$  — средний радиус. Предполагается, что осевая нагрузка отсутствует или влияние ее на динамику незначительно.

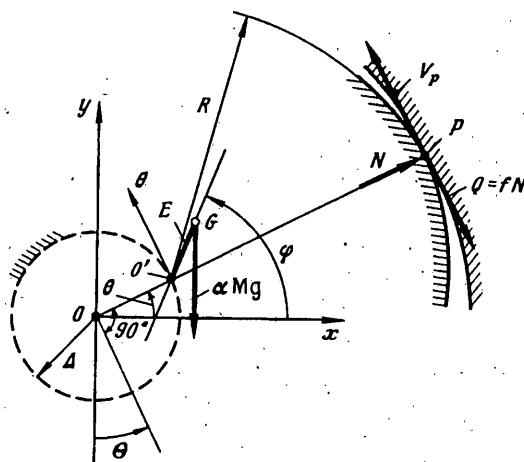
Для составления уравнений движения будем использовать метод Лагранжа. Ограничимся ниже только поступательными формами движения. Для схемы фиг. 1 кинетическая и потенциальная энергии, а также диссипативная функция имеют вид:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2, \quad \Pi = \alpha Mg + \frac{1}{2}c(x^2 + y^2) \\ D &= \frac{1}{2}k_1(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}k_4\dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\alpha$  — коэффициент интенсивности сил тяжести ( $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha = 1$  в поле сил тяжести Земли при горизонтальном расположении оси вращения);  $k_1$ ,  $k_4$  — коэффициенты



Фиг. 1



Фиг. 2

сил сопротивления соответственно при поперечных перемещениях и при вращении;  $x_G$ ,  $y_G$  и  $x$ ,  $y$  — соответственно координаты центра инерции  $G$  и точки  $O'$  оси вращения, связанные соотношениями

$$x_G = x + E \cos \varphi, \quad y_G = y + E \sin \varphi \quad (1.2)$$

Использование (1.1) и (1.2) приводит к следующим уравнениям движения:

$$M\ddot{x} + k_1\dot{x} + cx - ME(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) = 0$$

$$M\ddot{y} + k_1\dot{y} + cy - ME(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) + \alpha Mg = 0 \quad (1.3)$$

$$(I + ME^2)\ddot{\varphi} + ME(-\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi) + \alpha MgE \cos \varphi + k_4\dot{\varphi} = U(\dot{\varphi})$$

Для статически ненагруженного ротора ( $\alpha = 0$ ) в установившемся режиме работы, когда крутящий момент постоянен  $U(\dot{\varphi}) \text{ const}$  и вариация этого момента тождественно не равна нулю [6], система 1.3) имеет стационарное решение

$$\varphi = \omega t, \quad x = A \cos(\omega t - \lambda), \quad y = y_0 + A \sin(\omega t - \lambda) \quad (1.4)$$

$$A = \frac{ME\omega^2}{\sqrt{(c - M\omega^2)^2 + (k_1\omega)^2}}, \quad y_0 = -\frac{\alpha Mg}{c}, \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{k_1\omega}{c - M\omega^2}$$

где  $\omega$  — постоянная частота вращения.

Для нагруженного ротора и при умеренной его неуравновешенности это решение в части равномерности вращения будет лишь приближенным.

Пусть по каким-либо причинам или резко уменьшается жесткость опор или резко увеличиваются неуравновешенность ротора. Тогда под действием сил тяжести или центробежных сил ротор начнет перемещаться в сторону корпуса, и это движение будет описываться системой (1.3) с измененными значениями для величин жесткости и неуравновешенности. При этом решения будут справедливыми лишь при соблюдении условия

$$x^2 + y^2 < \Delta^2 \quad (1.5)$$

После соприкосновения точка ротора  $O'$  будет перемещаться по окружности радиуса  $\Delta$  (фиг. 2), при этом рассматриваемая система будет иметь уже только две степени свободы — по-прежнему угол собственного вращения  $\varphi$  и угол  $\theta$ , определяющий положение ротора в зазоре. Координаты центра инерции определяются зависимостями  $x_G = \Delta \cos \theta + E \cos \varphi$ ,  $y_G = \Delta \sin \theta + E \sin \varphi$ , а нормальная составляющая силы, с которой ротор действует на корпус, определяется по выражению

$$N = M [\Delta \dot{\theta}^2 + E\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi - \theta) + E\ddot{\varphi} \sin(\varphi - \theta)] - c\Delta - \alpha Mg \sin \theta \quad (1.6)$$

включающему в себя составляющие от сил инерции, упругости вала и сил тяжести (см. также [5]).

Процесс соприкосновения вращающегося ротора с неподвижным корпусом является сложным явлением, особенно в своей начальной стадии. Ниже задача решается при следующих допущениях и предположениях: радиальные составляющие скорости после соприкосновения отсутствуют, т. е. соприкосновение является абсолютно неупругим; касательные составляющие скоростей до и после соприкосновения отличаются и связаны соотношениями

$$\dot{\theta}^+ = b_{10} (-\dot{x}^- \sin \theta + \dot{y}^- \cos \theta) 1/\Delta + b_{20} \dot{\varphi}^-, \quad \dot{\varphi}^+ = b_\varphi \dot{\varphi}^- \quad (1.7)$$

где знаком минус обозначены скорости до соприкосновения, а знаком плюс — после соприкосновения;  $b_{10}$  и  $b_\varphi$  — некоторые коэффициенты, меньшие единицы, учитывающие потерю скорости при соприкосновении. Коэффициент  $b_{20}$  введен формально с целью возможности исследовать влияние скорости в зазоре  $\dot{\theta}$  на динамику процесса, имея в виду, что в ряде случаев величина и знак начальной скорости  $\dot{\theta}$  имеют определяющее значение (см. ниже). Полагается, что коэффициент  $b_{20}$  может иметь любые величину и знак.

Будем полагать, что в течение всего времени соприкосновения между ротором и корпусом действует сила сухого трения  $Q$ , направленная всегда противоположно скорости ротора  $V_p$  в точке контакта  $P$  (фиг. 2) и связанная с нормальной силой  $N$  согласно (1.6) соотношением Кулона

$$Q = -fN \operatorname{sign} V_p \quad (1.8)$$

где коэффициент сил сухого трения  $f$  предполагается не зависящим от силы  $N$ , абсолютной скорости  $V_p$  и теплового режима торможения, а скорость  $V_p$  определяется зависимостью  $V_p = \dot{\varphi}R + \dot{\theta}\Delta$ , причем в начале выбега  $V_p > 0$ .

В отличие от общепринятой модели сухого трения, в которой значение относительной скорости  $V_p = 0$  характеризует зону застоя с неопределенным значением силы сухого трения, в настоящем исследовании полагается  $Q = 0$  при  $V_p = 0$  ввиду того что в рассматриваемой задаче обращение в нуль скорости лишь в одной точке тела  $P$  не означает остановки тела, так как при этом не обращается в нуль ни одна из обобщенных скоростей тела ( $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\theta}$ ).

При таком взаимодействии кинетическая и потенциальная энергии записываются в виде

$$T = \frac{1}{2}M [(\dot{\Delta\theta} \sin \theta + E\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{\Delta\theta} \cos \theta + E\dot{\varphi} \cos \varphi)^2] + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

$$\Pi = \alpha Mg (\Delta \sin \theta + E \sin \varphi)$$

а уравнения движения с учетом сил вязкого сопротивления и сил сухого трения могут быть представлены так

$$M [\ddot{\Delta\theta} - E\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \theta) + E\ddot{\varphi} \cos(\varphi - \theta)] + k_2 \dot{\Delta\theta} + \alpha Mg \cos \theta + fN \operatorname{sign} V_p = 0 \quad (1.9)$$

$$(I + ME^2) \ddot{\varphi} + MEd [\ddot{\theta} \cos(\varphi - \theta) + \dot{\theta}^2 \sin(\varphi - \theta)] + \alpha MgE \cos \varphi + k_4 \dot{\varphi} + fNR \operatorname{sign} V_p = U(\dot{\varphi})$$

где  $k_2$  — коэффициент сил вязкого трения при движении ротора в зазоре. Вводимые формально для полноты задачи указанные силы сопротивления, по своему физическому смыслу близкие к силам «лобового» сопротивления, в действительности во многом определяют динамику задачи (см. ниже).

Уравнения (1.9) определяют режим движения, называемый ниже вращением со скольжением. Это движение будет существовать до тех пор пока сохраняется контакт между ротором и корпусом, т. е. до нарушения условия

$$N > 0 \quad (1.10)$$

При нарушении условия (1.10) ротор отрывается от корпуса и дальнейшее его движение происходит в соответствии с уравнениями (1.3).

Знак скорости  $V_p$  в уравнениях (1.9) ввиду наличия двух степеней свободы играет качественную роль. При  $V_p > 0$  силы сухого трения являются обычными тормозящими силами для движения в направлении  $\varphi$ , однако являются «разгоняющими» силами для движения в отрицательном направлении по углу  $\theta$ . При  $V_p < 0$  характер действия сил сухого трения изменяется на противоположный. Особое место в задаче занимает случай, когда в процессе уменьшения скорости  $\varphi$  и увеличения (по абсолютной величине) скорости  $\dot{\theta}$  скорость  $V_p$  обращается в нуль и сохраняется вблизи этого значения достаточно длительное время, что будет иметь место, например, если малы силы сопротивления вращению (коэффициент  $k_4$  в уравнениях (1.9)) или мал внешний тормозной момент. В этом случае возникает режим, близкий к режиму чистого качения, причем для последнего режима условие

$$V_p = \dot{\varphi}R + \dot{\theta}\Delta = 0 \quad (1.11)$$

постулируется.

В режиме чистого качения система имеет только одну степень свободы, так как углы  $\varphi$  и  $\theta$  связаны интегрируемой (голономной) связью (1.11), из которой находим

$$\varphi = -\Delta\theta/R + A \quad (1.12)$$

где  $A$  — постоянная интегрирования, находимая из условий для углов в момент окончания режима вращения со скольжением.

Уравнения движения для этого режима составляются с использованием метода Лагранжа с использованием условия связи (1.11) и предположения об отсутствии действия сил сухого трения при чистом качении. Уравнение движения, записанное относительно координаты  $\theta$  имеет вид

$$\begin{aligned} M\Delta\ddot{\theta} [1 + (E/R)^2 - 2(E/R) \cos(\theta + \Delta\theta/R - A) + I/MR^2] + M\Delta(E/R) (1 + \\ + \Delta/R) \dot{\theta}^2 \sin(\theta + (\Delta/R)\theta - A) + \alpha Mg (\cos \theta - (E/R) \cos \Delta\theta/R) ] + \\ + \Delta\dot{\theta} (k_3 + k_4/R^2) = -U(-\Delta\dot{\theta}/R) \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $k_3$  — коэффициент сил трения, которые вводятся формально для полноты задачи и которые по своему физическому смыслу близки к силам лобового сопротивления.

Режим качения в соответствии с уравнением (1.13) будет существовать при соблюдении естественного условия  $N > 0$ , где нормальная сила  $N$  определяется по зависимости (1.6) с понятной заменой угла  $\phi$  в соответствии с зависимостью (1.12).

Как показывают расчеты при движении согласно уравнения (1.13) точка  $O'$  ротора будет описывать круговые траектории с радиусом  $\Delta$  и частотой  $\dot{\theta} = -R\dot{\phi}/\Delta$  в направлении, противоположном скорости вращения  $\dot{\phi}$ . Такое движение ниже будем называть ротационным качением или несинхронным обкатом.

Движение в соответствии с уравнением (1.13) будет иметь место также в случае, когда в процессе торможения обращаются в нуль одновременно как скорость вращения ротора ( $\dot{\phi} = 0$ ), так и скорость  $V_p$ . После достижения указанного состояния центр ротора будет совершать затухающие колебания в нижней части круга радиуса  $\Delta$  относительно вертикали. Такое движение будем называть ниже колебательным качением и пример такого движения показан на фиг. 3 (см. ниже).

При значительных силах сопротивления вращению (большие величины коэффициента  $k_4$ ) режим качения, определяемый уравнением (1.13), может не наступить, так как скорость  $V_p$  достаточно быстро может проходить через нуль и изменять знак и вновь может наступить режим вращения со скольжением, но с другими особенностями по сравнению с режимом при  $V_p > 0$ . Следует отметить, что наступление этого режима ( $V_p < 0$ ) не может быть установлено из анализа уравнения (1.3), при выводе которого постулировалось условие (1.11), т. е. этот режим  $V_p < 0$  может быть установлен и исследован только при анализе полной системы (1.9).

Уравнения (1.3), (1.9) и (1.13) описывают простые режимы движения — свободное вращение (полет), вращение со скольжением и качение. Весь процесс выбега — от номинальной скорости до полной остановки — будет представлять собой сочетание указанных простых режимов, причем смена одного режима другим будет управляться условиями (1.5), (1.10) и знаком скорости  $V_p$ . В такой постановке задача не имеет решений в замкнутом виде и поэтому решения находились численно. При этом основной целью расчетов являлось нахождение условий выхода системы на режим несинхронного обката. Дальнейший характер движения после нарушения условия  $V_p > 0$  исследовался лишь качественно, при этом для простоты полагалось, что после нарушения условия  $V_p > 0$  наступает всегда режим качения в соответствии с уравнением (1.13).

**2. Расчеты и анализ.** Задача может иметь множество различных постановок, однако наибольший практический интерес имеют две из них:

1) внезапная потеря жесткости опорных устройств для хорошо уравновешенного ротора, вызванная, например, отказом в системе питания газостатических опор или отключением электроэнергии в электромагнитных опорах активного типа (без специальных страховочных подшипников качения). В условиях, когда опоры имеют нулевую жесткость, работают также электродвигатели с катящимся ротором [7, 8];

2) внезапная и сильная разбалансировка ротора при сохранении жесткости опорных устройств.

Две эти постановки и анализируются в дальнейшем. Учитывая, что влияние момента  $U(\dot{\phi})$ , как показали расчеты (см. также [5]), на характер исследуемых переходных процессов невелико, везде в дальнейшем полагается  $U(\dot{\phi}) \equiv 0$ , т. е. рассматриваются задачи чистого выбега.

**1. Внезапная потеря жесткости опор.** Будем полагать, что соприкосновение ротора с корпусом после потери жесткости опор происходит без радиальных отскоков<sup>1</sup>. Будем также полагать, что ротор достаточно хорошо уравновешен,

<sup>1</sup> Некоторые подходы к решению задачи с учетом радиальной составляющей скорости после отскоков изложены в [2].

т. е. во всех вышеприведенных уравнениях движения следует принять  $c \equiv 0$ ,  $E \equiv 0$ . Тогда движение ротора непосредственно после соприкосновения в режиме скольжения будет описываться уравнениями

$$M\Delta\ddot{\theta} + k_2\Delta\dot{\theta} + \alpha Mg \cos \theta + fN \operatorname{sign} V_p = 0$$

$$I\ddot{\phi} + k_4\dot{\phi} + fRN \operatorname{sign} V_p = 0, \quad N = M\Delta\dot{\theta}^2 - \alpha Mg \sin \theta \quad (2.1)$$

при начальных условиях для углов и скоростей  $\varphi = \varphi_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \omega$ ,  $\theta = \theta_0$ ,  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$  при  $t = 0$ .

Система (2.1), при естественном предположении, что скорость  $\dot{\phi}$  знака не изменяет, имеет для угла  $\theta$  стационарное решение  $\theta = \theta_* = \text{const}$ , где угол  $\theta_*$  находится из зависимости

$$\operatorname{ctg} \theta_* = f \quad (2.2)$$

и расположен в I-ой или III-ей четвертях.

Для анализа устойчивости решения  $\theta = \theta_*$  имеем следующее уравнение в вариациях для малой величины  $\xi = \theta - \theta_*$

$$M\Delta\ddot{\xi} + k_2\Delta\dot{\xi} - \xi\alpha Mg (f \cos \theta_* + \sin \theta_*) = 0 \quad (2.3)$$

из анализа которого следует, что устойчивым будет лишь решение, соответствующее расположению угла  $\theta_*$  в III-ей четверти. Кроме того, решение для  $\theta_*$  в I-ой четверти не может быть реализовано из-за невыполнения условия  $N > 0$ .

Учитывая, что в рассматриваемой задаче силы тяжести действуют вертикально вниз, будем использовать наряду с углом  $\theta$  угол  $\Theta$  (фиг. 2), отсчитываемый от вертикали и связанный с углом  $\theta$  соотношением  $\Theta = \theta + \pi/2$ , причем  $\dot{\Theta} = \dot{\theta}$ . Тогда для стационарного значения  $\Theta_*$  из (2.2) имеем

$$\operatorname{tg} \Theta_* = -f \quad (2.4)$$

причем устойчивому решению соответствует отрицательное значение угла  $\Theta_*$ .

Решение (2.4) показывает, что линия центров отклоняется в сторону, противоположную направлению вращения и угол этот равен углу трения.

Для системы (2.1) стационарные решения  $\theta = \theta_*$  являются устойчивыми при любых значениях коэффициента трения  $f$ , однако они будут устойчивыми лишь при малых возмущениях относительно стационарного положения. Если же возмущения не будут достаточно малыми или же, что главное, если начальные условия  $\theta_0$  и  $\dot{\theta}_0$  будут такими, при которых в процессе установления режима будут нарушаться условия (1.10) и (1.11), то установившийся режим может не наступить, а произойдет переход к другим режимам — к свободному вращению (полету), описываемому уравнениями

$$M\ddot{x} + k_1\dot{x} = 0, \quad M\ddot{y} + k_1\dot{y} = -\alpha Mg, \quad I\ddot{\phi} + k_4\dot{\phi} = 0 \quad (2.5)$$

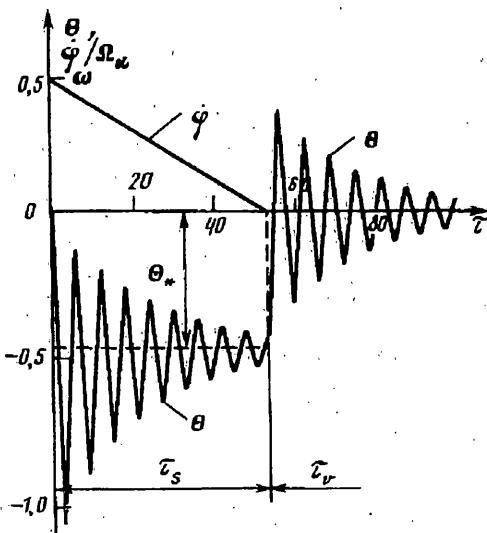
или к режиму качения, описываемому уравнением

$$M\Delta\ddot{\theta} \left( 1 + \frac{I}{MR^2} \right) + \alpha Mg \cos \theta + \Delta\dot{\theta} \left( k_3 + \frac{1}{R^2} k_4 \right) = 0 \quad (2.6)$$

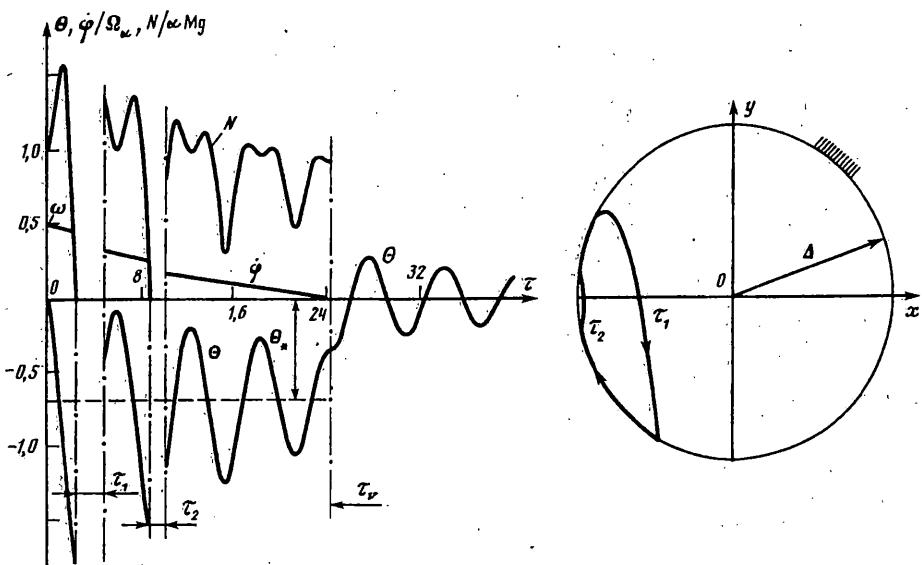
Проиллюстрируем описанные режимы примерами числовых расчетов<sup>2</sup>. В рассматриваемой постановке задача характеризуется следующими безразмерными параметрами:

$$f, \psi = \frac{\Delta}{R}, \quad \gamma = \frac{MR^2}{I}, \quad \delta_i = \frac{k_i}{M\sqrt{\alpha g/\Delta}} = \frac{k_i}{M\Omega_a} \quad (i = 1, 2, 3); \quad \delta_4 = \frac{k_4}{MR^2\Omega_a} \quad (2.7)$$

<sup>2</sup> В постановке и выполнении расчетов принимала участие Гладышева Т. Н.



Фиг. 3



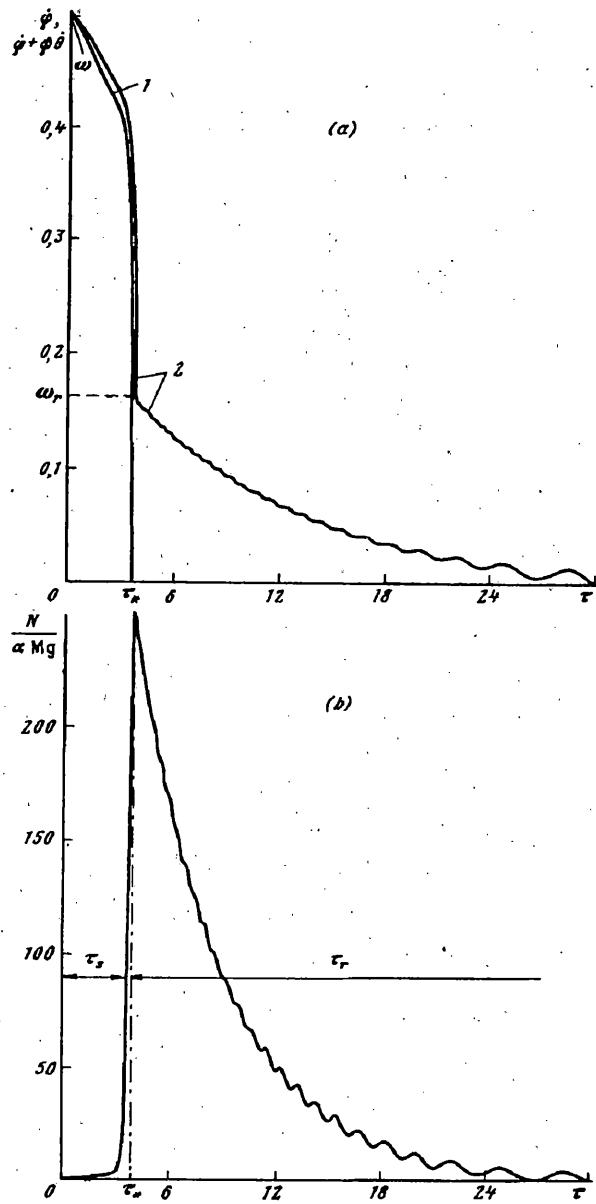
Фиг. 4

где  $\Omega_\alpha = (\sqrt{\alpha g / \Delta})^{1/2}$  — собственная частота маятниковых колебаний ротора в поле сил тяжести с интенсивностью  $\alpha$ . Численное интегрирование ведется по безразмерному времени  $\tau = \Omega_\alpha t$ .

На фиг. 3 показаны переходные процессы, которые имеют место при небольших значениях коэффициентов трения  $f = 0,5$ . Эти расчеты, а также приведенные на фиг. 4, 5, выполнены при значениях параметров:  $\psi = 0,01$ ;  $\gamma = 2$ ;  $\delta_2 = \delta_3 = 0,1$ ;  $\delta_1 = \delta_4 = 0$ ;  $b_\phi = 0,7$ ;  $b_{10} = 0,8$ ;  $b_{20} = 0$ ;  $\omega / \Omega_\alpha = 0,5$  и начальных условиях  $\Theta_0 = 0$  ( $\theta_0 = -\pi/2$ ),  $\dot{\theta} = 0$ .

Из фиг. 3 наглядно видно, что режим скольжения кончается ( $\tau_s$ ), а режим колебательного качения ( $\tau_v$ ) начинается, когда скорость  $\dot{\phi}$  обращается в нуль.

На фиг. 4 показан выбег при среднем значении коэффициента  $f = 0,68$ . Из



Фиг. 5

фиг. 4 видно, что в своей начальной стадии переходный процесс представляет собой чередование режимов скольжения и полета ( $\tau_s$  и  $\tau_f$ ) и смена режимов происходит в моменты времени, когда в нуль обращается нормальная сила, т. е. нарушается условие (1.10).

На фиг. 5, а, в показано изменение характерных параметров (кривая 1 соответствует  $\dot{\phi} + \psi\dot{\theta}$ , а 2 —  $\dot{\phi}$ ) в начальной части выбега при значительном значении коэффициента  $f = 0,78$ . Из фиг. 5 видно, что за весьма короткое время (в пределах одного оборота ротора) скорость  $\dot{\phi}$  резко уменьшается и резко растет

величина нормальной силы. Величина  $\dot{\phi} + \psi\dot{\theta}$ , характеризующая режим вращения со скольжением ( $\tau_s$ ) за счет роста  $\dot{\theta}$  при  $\tau = \tau_s$  обращается в нуль, т. е. нарушается условие  $V_p > 0$ , — режим скольжения кончается и может начаться режим ротационного качения ( $\tau_r$ ) или несинхронного обкаты. В процессе всего режима качения между скоростями сохраняется соотношение

$$\dot{\theta} = -\dot{\phi}/\psi \quad (2.8)$$

Из сопоставления фиг. 4, 5 можно сделать вывод, подтверждающийся также всеми другими аналогичными расчетами и заключающийся в том, что режим отрыва наступает всегда при коэффициентах трения  $f$ , меньших тех, при которых наступает несинхронный обкат.

Получим оценку для скорости  $\dot{\phi}_r = \omega_r$ , при которой режим скольжения переходит в режим ротационного качения. Для этого умножим первое уравнение системы (2.1) на  $(-R)$  и сложим со вторым уравнением этой системы. В результате получим зависимость

$$(d/dt)(I\dot{\phi} - R\Delta M\dot{\theta}) = Rk_4\Delta\dot{\theta} + \alpha RMg \cos\theta - k_4\dot{\phi}. \quad (2.9)$$

которую можно трактовать для рассматриваемой системы как следствие теоремы об изменении момента количества движения.

Учитывая, что выход на обкат происходит за весьма короткое время, можно пренебречь изменением момента количества движения, обусловленным действием внешних сил, представленных правой частью зависимости (2.9) (численные расчеты подтверждают это предположение), и считать, что момент количества движения в момент времени выхода на обкат равен начальному моменту количества движения, т. е. имеет место соотношение

$$I\dot{\phi}_r - R\Delta M\dot{\theta}_r = I\omega \quad (2.10)$$

где  $\dot{\phi}_r = \omega_r$  и  $\dot{\theta}_r$  связаны соотношением (2.8). Тогда из (2.10) имеем

$$\omega/\omega = (1 + \gamma)^{-1} \quad (2.11)$$

Сопоставим теперь начальную кинетическую энергию  $\mathcal{E} = 1/2I\omega^2$  с кинетической энергией системы в момент выхода на несинхронный обкат  $\mathcal{E}_r = 1/2I\omega_r^2 + 1/2M(\Delta\dot{\theta})^2$ , состоящей из кинетической энергии собственного вращения ротора с частотой  $\omega_r$  и энергии прецессионного движения с частотой  $\dot{\theta}_r$  и радиусом прецессии  $\Delta$ . Используя соотношение (2.8), находим

$$\mathcal{E}_r/\mathcal{E} = (1 + \gamma)^{-1} \quad (2.12)$$

Для максимального значения радиальной силы  $N$  имеем оценку

$$N_{\max} = N_r \approx M\Delta\dot{\theta}_r^2 = M\Delta\omega^2 / [(1 + \gamma)^2 \psi^2] \quad (2.13)$$

Сделаем некоторые оценки. Пусть, например, ротор представляет собой сплошной цилиндр постоянного сечения, т. е. для него  $I = 1/2MR^2$  и  $\gamma = 2$ . Ротор вращается в поле тяжести Земли с частотой, равной частоте маятниковых колебаний  $\omega = \Omega_a$  относительный зазор равен  $\psi = 0,01$ . Тогда из зависимостей (2.11) и (2.12) следует, что к моменту выхода на обкат угловая скорость и кинетическая энергия будут в три раза меньше исходных, т. е.  $2/3$  первоначальной кинетической энергии будет потеряно на трение скольжения и переведено в тепло. Максимальное значение нормальной силы в соответствии с зависимостью (2.13) в начале обката может примерно в 1000 раз превышать вес ротора.

Значение  $\gamma = 2$  является, видимо, предельным и характеризует случай, когда взаимодействие с корпусом происходит по наружной поверхности ротора. При взаимодействии через подшипник сухого трения, когда величина  $R$ , как правило, будет меньшей характерного размера ротора, коэффициент  $\gamma$  будет невелик. В последнем случае, как это следует из зависимости (2.12), при выходе на обкат

существенно меньшими будут снижение скорости и потеря кинетической энергии, но большим максимальное значение нормальной силы в соответствии с зависимостью (2.13).

Полученные оценки показывают, что в режиме несинхронного обката нагрузки на корпус могут достигать опасных значений. Поэтому наиболее важным и интересным в рассматриваемой задаче является нахождение условий выхода на такой обкат.

Физическая сторона явления, связанного с выходом на обкат, достаточна ясна — обкат наступает, когда силы сухого трения, выступающие в данном случае как активные, разгоняют ротор в направлении, противоположном вращению ротора, до скорости  $\dot{\theta}_r$ , при которой нарушается условие  $V_p > 0$ . Факторами, безусловно способствующими выходу на обкат, являются большие значения коэффициента сил сухого трения и начальная скорость  $\dot{\theta}_0$ , направленная в сторону, противоположную вращению ротора. Фактором, препятствующим выходу на обкат, являются силы вязкого сопротивления движению в зазоре. Влияние других факторов, в частности, такого как скорость вращения ротора, недостаточно ясно.

Первоначально проанализируем самый простой в математическом смысле случай  $\alpha = 0$ , точно никогда не реализуемый, но близко отражающий условия работы ротора с вертикальной осью или работу в условиях невесомости<sup>3</sup>. Из системы (2.1) имеем

$$M\ddot{\theta} + k_2\Delta\dot{\theta} + fM\Delta\dot{\theta}^2 \operatorname{sign} V_p = 0 \quad (2.14)$$

$$I\ddot{\phi} + k_4\dot{\phi} + fRM\Delta\dot{\theta}^2 \operatorname{sign} V_p = 0$$

Если скорость  $\dot{\phi}$  знака не меняет, то первое уравнение системы (2.14) будет как бы независимым от второго и как уравнение с разделяющимися переменными может быть проинтегрировано. В зависимости от знака  $\dot{\theta}$  вид уравнений и решения будут различными, а именно

$$M\ddot{\theta} + k_2\dot{\theta} + fM\dot{\theta}^2 = 0 \quad (2.15)$$

$$\dot{\theta} = k_2\dot{\theta}_0 \exp\left(-\frac{k_2}{M}t\right) \left\{ k_2 + fM\dot{\theta}_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{k_2}{M}t\right) \right] \right\}^{-1} \text{ при } \dot{\theta} > 0$$

$$M\ddot{\theta} + k_2\dot{\theta} - fM\dot{\theta}^2 = 0 \quad (2.16)$$

$$|\dot{\theta}| = k_2 |\dot{\theta}_0| \exp\left(-\frac{k_2}{M}t\right) \left\{ k_2 - fM |\dot{\theta}_0| \left[ 1 - \exp\left(-\frac{k_2}{M}t\right) \right] \right\}^{-1} \text{ при } \dot{\theta} < 0$$

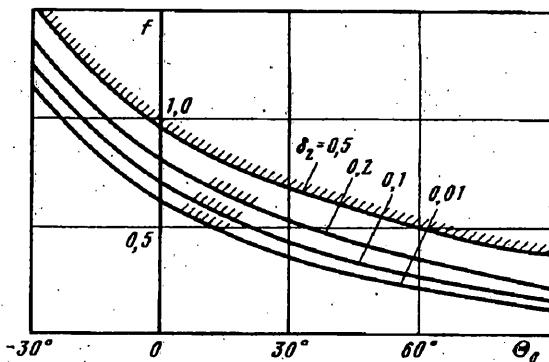
Из (2.15) и (2.16) следует, что при  $\dot{\theta}_0 > 0$  скорость  $\dot{\theta}$  в течении времени будет убывать. Однако, при  $\dot{\theta}_0 < 0$  возможен резкий рост скорости  $|\dot{\theta}|$ , а следовательно и выход на несинхронный обкат при условии

$$|\dot{\theta}_0| Mf > k_2 \quad (2.17)$$

Сопоставляя условие (2.17) с уравнением движения (2.16), нетрудно сделать вывод, что условие (2.17) является условием для сил: обкат становится возможным, если в начальный момент времени движущие силы сухого трения превосходят силы вязкого сопротивления.

Численные расчеты, выполненные с использованием полных уравнений (2.1) при малых значениях  $\alpha$ , показали, что условие (2.17) дает существенно заниженные значения для  $|\dot{\theta}_0|$ . Так, при  $\alpha = 0,01$  получено, что для возникновения обката необходимо чтобы  $|\dot{\theta}_0| Mf > 4k_2$ . Одна из причин такого различия заключается, в частности, в том, что режиму обката всегда предшествует отрыв с режимом полета, а это обстоятельство уравнением (2.16) никак не учитывается.

<sup>3</sup> Именно этот случай рассматривался в работе [2].



Фиг. 6

Расчеты, выполненные для полной системы (2.1) показали, что наряду с силами сухого и вязкого трений и начальной скорости  $\dot{\theta}_0$  существенное влияние на условия выхода на обкат оказывает величина начального угла. На фиг. 6 построены зависимости от  $\Theta_0$  для граничных значений коэффициента  $f$  при нескольких фиксированных значениях коэффициента трения  $\delta_2$ . При выполнении расчетов полагалось:  $\dot{\theta}_0 = 0$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\psi = 0,01$ ,  $\omega/\Omega_\alpha = 0,5$ ,  $\delta_1 = \delta_4 = 0$ .

Области параметров, соответствующие обкатным движениям, заштрихованы. Из фиг. 6 видно, что при увеличении положительного угла  $\Theta_0$  уменьшаются, а при увеличении отрицательного угла  $\Theta_0$  — увеличиваются граничные значения коэффициента  $f$ . Такое поведение кривых находит свое простое объяснение, если учесть, что в данном случае угол  $\Theta_0$  определяет величину подъема ротора в поле сил тяжести, а следовательно величину и направление скоростей  $\dot{\theta}$ , имеющих место в переходном режиме. Иными словами, угол  $\Theta_0$  вместе с начальной скоростью  $\dot{\theta}_0$ , играют роль «разгонных» факторов, причем при небольших углах  $\Theta_0$  между этими факторами существует следующая эквивалентность:  $\Theta_0 \approx -\dot{\theta}_0/\Omega_\alpha$ .

Учитывая, что граничные значения коэффициента  $f$  существенно зависят от угла  $\Theta_0$ , а значения  $\Theta_0$  в реальных условиях, как правило, неизвестны, следует при оценке опасности возникновения обката ориентироваться на меньшие граничные значения коэффициента  $f$ , которые, как это следует из фиг. 5, равны около 0,08—0,1.

Исследования показали, что параметры  $\gamma$  и  $\psi$  не оказывают практически никакого влияния на характер зависимостей, представленных на фиг. 6, т. е. не влияют на условия выхода на обкат, однако, эти параметры существенно влияют на интенсивность динамических процессов, так как эти величины согласно зависимостям (2.8) и (2.11) определяют частоту обката. Наиболее интересный результат состоит в том, что начальная скорость ротора  $\omega$  также практически не влияет на характер представленных на фиг. 6 зависимостей, однако сама величина скорости  $\omega$  влияет как на длительность переходных процессов при обкате, так и, что главное, на их интенсивность в соответствии с зависимостью (2.11).

Отметим, что изложенные результаты противоречат зависимостям, приведенной в [1] и определяющей условия наступления несинхронного обката

$$\omega^2 > \frac{g\Delta}{R^2} \left[ 1 + \left( \frac{I}{I + MR^2} \right)^2 \frac{1}{f^2} \right]^{1/2}$$

или в принятых безразмерных величинах

$$\omega/\Omega_\alpha > \psi [1 + 1/(f^2(1 + \gamma)^2)]^{1/4} \quad (2.18)$$

При этом основное различие результатов заключено в характере влияния

скорости ротора, относительного зазора и параметра  $\gamma$ , а также начальных условий и сил демпфирования в зазоре, которые зависимость (2.18) вообще игнорируют. Что же касается экспериментальных результатов, которые якобы хорошо подтверждают теоретические положения [1], то, как показал анализ, это совпадение следует признать случайным. В то же время, наблюдавшиеся и описанные в [1] режимы обкаты могут быть объяснены с позиций описываемой теории, если учесть, что в процессе эксперимента не контролировались начальные условия, в частности, по углу  $\Theta_0$ , а эти углы могли быть близкими и к  $\Theta_0 = \pi/2$ . Косвенным подтверждением влияния начальных условий служит упоминание в [1] того обстоятельства, что при внешне неизменных рабочих условиях иногда наблюдался обкат, а в некоторых случаях не наблюдался.

Сделаем здесь следующее дополнительное замечание. Незначительная неуравновешенность ( $E/\Delta \ll 1$ ) не оказывает существенного влияния на изложенные выше условия выхода на несинхронный обкат. При выбеге такого ротора при небольших значениях коэффициента сухого трения ( $f < 0,1$ ) возникают вынужденные колебания с частотой вращения с резонансом при частоте, близкой к собственной частоте маятниковых колебаний  $\Omega_a$ . Силы сухого трения определяют только интенсивность торможения и не влияют на коэффициент динамичности при резонансе, который определяется лишь силами вязкого трения. При большой начальной скорости для неуравновешенного ротора возможен так называемый режим «подпрыгивания», при котором за каждый оборот происходит отрыв ротора от корпуса, т. е. быстрое чередование режимов скольжения и полета.

2. *Внезапная и сильная разбалансировка ротора.* Ко второму практически важному случаю относится внезапная разбалансировка такого уровня, что элементы ротора могут задевать за неподвижный корпус<sup>4</sup>. Ограничимся здесь рассмотрением случая  $\alpha = 0$ , который, как уже указывалось, близко отражает условия работы с вертикальной осью или в невесомости, а также условия, когда центробежные нагрузки от неуравновешенности существенно превосходят силы веса. В близкой постановке рассматривалась задача в [9].

Будем полагать, что до возникновения большой неуравновешенности  $E$  ротор располагался концентрично корпусу, вращался с постоянной скоростью  $\dot{\phi} = \omega$ , имел неуравновешенность  $E_0 \ll E$ , т. е. практически был хорошо уравновешен. Тогда из системы (1.3) для момента времени непосредственно после разбалансировки имеем укороченную систему уравнений

$$M\ddot{x} + k_1\dot{x} + cx = ME\omega^2 \cos \omega t \quad (2.19)$$

$$M\ddot{y} + k_1\dot{y} + cy = ME\omega^2 \sin \omega t$$

с начальными условиями при  $t \geq 0$ :

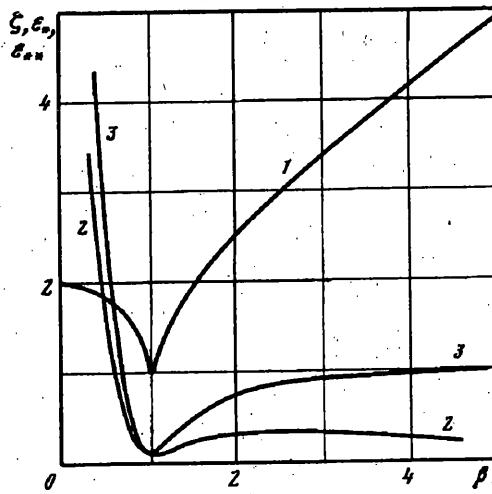
$$x = x_0 = 0, \quad y = y_0 = 0 \quad (2.20)$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y} = y_0 = 0$$

Взаимодействие ротора с корпусом в радиальном направлении предполагается абсолютно неупругим, скорости в окружном направлении преобразуются в соответствии с зависимостями (1.6). Движение после соприкосновения в режимах вращения со скольжением и несинхронного обкаты описывается уравнениями, получаемыми из уравнений (1.4) и (1.13) при  $\alpha = 0$ . Смена режимов происходит в соответствии с условиями (1.10) и  $V_p > 0$ .

В связи с отсутствием весовой нагрузки в рассматриваемой постановке характерными будут другие собственная частота  $\Omega_c = (c/M)^{1/2}$  и безразмерное

<sup>4</sup> Задевание ротора за корпус может иметь место и в других случаях, например вблизи критических скоростей при наборе оборотов или при выбеге; при ударных сотрясениях, когда перемещения ротора относительно корпуса достигают величины зазора и др. Эти случаи здесь не рассматриваются.



Фиг. 7

время  $\tau = \Omega_c t$ , где  $c$  — определяет как жесткость опор, так и жесткость самого вала. Введенные зависимостями (2.7) параметры  $\psi, \gamma$  останутся без изменения, однако появятся другие параметры:

$$\varepsilon = E/\Delta, \quad \delta_i = k_i/(\Omega_c M) \quad (i = 1, 2, 3).$$

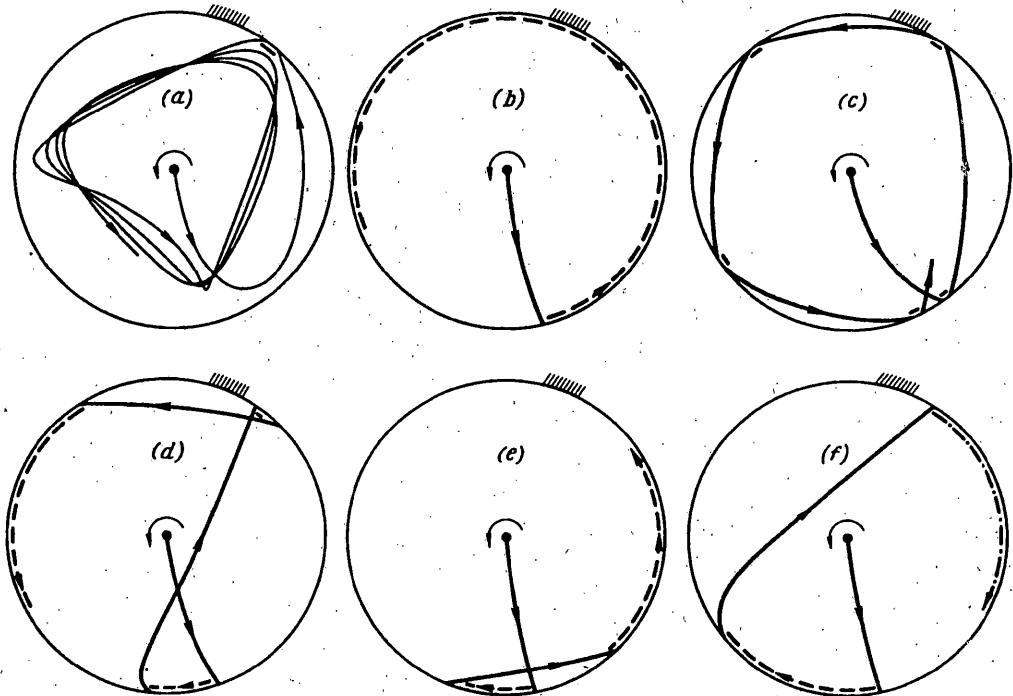
Скорости вращения и прецессии будут соотноситься с величиной  $\Omega_c$ .

В дальнейшем под сильной неуравновешенностью будем понимать такие величины  $E$ , которые приводят в решении системы (2.19) к перемещениям, превышающим величину радиального зазора, т. е. в реальности к задеванию ротора о корпус. Поэтому при решении системы (2.19) с начальными условиями (2.20) наиболее интересным является нахождение максимальных во времени перемещений  $A_{\max} = (x^2(t) + y^2(t))^{1/2}$  и амплитуды кругового установившегося движения  $A$  согласно (1.4) и сопоставления этих величин с радиальным зазором  $\Delta$ . На фиг. 7 представлены зависимости от  $\beta = \omega/\Omega_c$  при  $\delta_1 = 0,1$ , величины  $\zeta = A_{\max}/A$  (кривая 1); значений минимальной относительной неуравновешенности  $\varepsilon_* = E_*/\Delta$  (кривая 2), при которой ротор может задевать за корпус ( $A_{\max} = \Delta$ ); и величины  $\varepsilon_{**} = E_{**}/\Delta$  (кривая 3), при которой ротор всегда соприкасается с корпусом ( $A = \Delta$ ).

Отметим, что величина  $\zeta$ , отражающая динамичность процесса при внезапной разбалансировке, близка к двум — к величине, характерной для случая внезапно приложенной нагрузки, — лишь при малых скоростях  $\beta$ . При критической скорости ( $\beta = 1$ ) эта величина близка к единице и растет с увеличением  $\beta$ .

Как показали расчеты, не при всяком постоянном контакте ротора с корпусом, а тем более не при всяком задевании, создаются условия выхода на обкат, т. е. далеко не всякое задевание является опасным. Однако чтобы существовала сама задача о задевании, величины неуравновешенностей должны превышать минимальное  $\varepsilon_*$  согласно фиг. 7.

Численные расчеты показали, что определяющее влияние на характер взаимодействия ротора с корпусом оказывают параметры  $f$  и  $\varepsilon$ , определенное влияние играют скорость  $\beta$  и параметр  $b_{10}$  и практически не влияют остальные параметры. На фиг. 8 показаны характерные траектории движения ротора в зазоре при его взаимодействии с корпусом (сплошные кривые соответствуют полету, штриховые — вращению со скольжением, штрихпунктирные — несинхронному обкату). При неуравновешенности  $\varepsilon$ , лишь незначительно превышающей  $\varepsilon_*$ , практически вне зависимости от величин  $f$  и  $\beta$  имеет место однократное

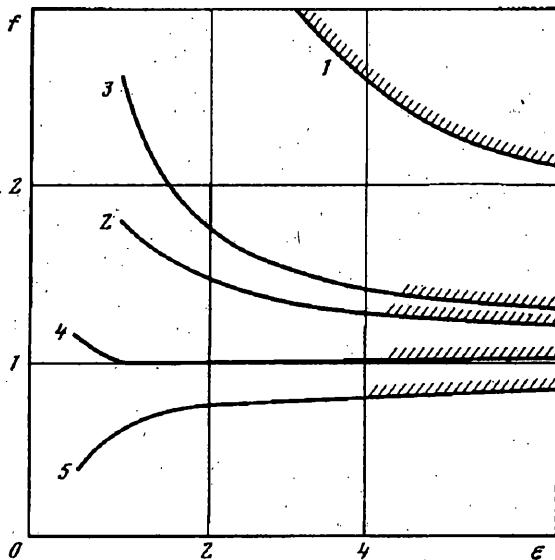


Фиг. 8

(реже двухкратное) соприкосновение ротора с корпусом с последующим свободным выбегом (фиг. 8, a,  $f = 2$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\varepsilon = 2$ ,  $\varepsilon_* = 1,67$ ,  $\varepsilon_{**} = 3$ ). При больших неуравновешенностях  $\varepsilon > \varepsilon_{**}$  и при малых значениях  $f$  имеет место сразу без отскоков выход на режим так называемого синхронного обката или простого торможения, когда ротор начинает прецессировать с частотой  $\dot{\theta} \approx \dot{\phi}$  в сторону, совпадающую с направлением вращения ротора (фиг. 8, b,  $f = 0,2$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\varepsilon = 5$ ,  $\varepsilon_* = 1,67$ ,  $\varepsilon_{**} = 3$ ). С ростом скорости, особенно вблизи критической скорости, возникает режим многократных соударений без выхода на режим синхронного обката (фиг. 8, c,  $f = 3$ ,  $\beta = 0,9$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon_* = 0,19$ ,  $\varepsilon_{**} = 0,24$  и фиг. 8, d,  $f = 8$ ,  $\beta = 1,2$ ,  $\varepsilon = 2$ ,  $\varepsilon_* = 0,22$ ,  $\varepsilon_{**} = 0,3$ ). С увеличением  $\beta$  и  $\varepsilon$  наступает возможность выхода на режим несинхронного обката: на фиг. 8, e ( $f = 1,8$ ,  $\beta = 5$ ,  $\varepsilon = 5$ ,  $\varepsilon_* = 5$ ;  $\varepsilon_{**} = 0,2$ ,  $\varepsilon_{**} = 0,96$ ) — режим несинхронного обката.

На фиг. 9 по результатам численных расчетов при параметрах  $\beta = 2$ ,  $\psi = 0,01$ ,  $\gamma = 2$ ,  $b_{10} = 0,25$ ,  $b_{20} = 0$ ,  $b_\varphi = 0,9$  построена граница (кривая 1) области существования несинхронного обката (область заштрихована). Исследования показали, что влияние параметра  $b_{10}$  при изменении последнего от нуля до единицы на граничное значение  $f$  не превышает 10%. Влияние параметров  $\psi$ ,  $\gamma$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  практически отсутствует. С ростом  $\beta$  область существования режимов несинхронного обката расширяется.

Кривая 1 на фиг. 9 построена при начальных условиях (2.20), которые соответствуют случаю, когда ротор до разбалансировки располагался концентрично расточке корпуса. Естественно, возможны другие места первоначального расположения ротора и другие условия по угловым скоростям. Например, ротор может располагаться эксцентрично в расточке, может быть первоначально разбалансирован и его перемещения могут быть соизмеримы с величиной зазора. Разба-



Фиг. 9

лансировка может произойти в момент, когда по каким-то причинам ротор находится в непосредственной близости от корпуса (именно условия этого случая использовались в [5]).

Как показали расчеты, начальное положение ротора и начальные условия по скоростям, не изменяя качественных особенностей описанных режимов, оказывают существенное влияние на граничные значения параметров, определяющих выход на несинхронный обкат. На фиг. 9 (кривая 2) нанесены границы при  $\beta = 2$  при начальных условиях

$$\begin{aligned} x_0 &= \Delta, \quad y_0 = 0, \quad \dot{\theta}_0 = 0, \quad (b_{20} = 0), \\ \dot{x}_0 &= 0, \quad \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{\phi} = \omega \end{aligned} \quad (2.21)$$

соответствующих случаю разбалансировки ротора, когда последний находится в непосредственной близости от корпуса. Кривые 3, 4 и 5 соответствуют случаям, когда при начальных условиях (2.21) начальные скорости прецессионных движений соответственно равны:

$$\dot{\theta}_0 = \omega \quad (b_{20} = 1), \quad \dot{\theta}_0 = -1/2\omega \quad (b_{20} = -1/2), \quad \dot{\theta}_0 = -\omega \quad (b_{20} = -1).$$

Из анализа фиг. 9 следует, что при начальных условиях (2.21) несинхронный обкат наступает при меньших значениях коэффициента  $f$ , при этом существенное влияние на условия выхода на несинхронный обкат оказывает начальное значение  $\dot{\theta}_0$ , особенно если  $\dot{\theta}_0$  имеет направление, противоположное направлению вращения ротора  $\omega$ .

Расчеты показали, что при синхронном обкате действующая на корпус центробежная нагрузка имеет порядок  $M\omega^2(E + \Delta)$  и вращается с частотой вращения ротора  $\dot{\phi}$ . При синхронном обкате частота обкатного вращения и начальный момент равны  $\dot{\theta}_0 = \omega / [(1 + \gamma)\psi]$ , а максимальная центробежная нагрузка имеет порядок  $M\dot{\theta}_0^2\Delta$  и эта величина практически не зависит от величины неуравновешенности ротора. Максимальные центробежные нагрузки при несинхронном и синхронном обкатах при неуравновешенности, близкой к величине зазора, существенно отличаются между собой. Так, для приведенных на фиг. 8, e, 8, f вариантов, отличающихся по коэффициенту  $f$  на 10% различие в центробежных нагрузках будет примерно в 500 раз ( $\varepsilon = 5$ ,  $\psi = 0,01$ ,  $\gamma = 2$ ).

Таким образом, несинхронный обкат при сильной разбалансировке имеет тот же характер, что и обкат при исчезновении жесткости опор. Отличие заключается в том, что, как это видно из приведенных на фиг. 6 и фиг. 9 зависимостей, для возникновения несинхронного обката при сильной разбалансировке ротора требуются существенно большие значения коэффициентов трения  $f$ , которых в действительности вроде бы и не должно быть. Однако анализ реально имевших место аварий [5] показывает, что условия для несинхронного обката, тем не менее, возникают. Возможно, коэффициенты трения  $f$ , имеющие низкие значения для первоначально хорошо обработанных поверхностей, увеличиваются в процессе взаимодействия поверхностей, когда выходу на несинхронный обкат предшествует длительный процесс синхронного обката и режимов с многократными соударениями.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский И. И., Костицын В. Т., Раевский Н. П. Об одном состоянии вала, вращающегося в подшипнике без смазки с зазором//Изв. АН СССР. ОТН. 1949. № 2. С. 168.
2. Денисов Г. Г., Неймарк Ю. И., Сандалов В. М., Цветков Ю. В. Об обкате ротора по жесткому подшипнику//Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 6. С. 4—13.
3. Сандалов В. М., Цветков Ю. В. Об обкате нагруженного ротора по жесткому подшипнику//Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 3. С. 52—56.
4. Олимпиев В. И. Об обкате неуравновешенного гибкого ротора по статору//Машиноведение. 1976. № 1. С. 52—56.
5. Позняк Э. Л. Крутильный удар в валопроводе при внезапной и сильной разбалансировке одного из роторов//Машиноведение. 1987. № 5. С. 66—74.
6. Малаховский Е. Е., Позняк Э. Л. Об устойчивости равномерного вращения неуравновешенного гибкого ротора//Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 6. С. 23—29.
7. Бертинов А. И., Варлей В. В. Электрические машины с катящимся ротором. М.: Энергия, 1969. 200 с.
8. Рагульскис К. М., Кубайтис З. И., Куминкас А. Л. и др. Колебания сложных механических систем. Вильнюс: Минтис, 1969. 246 с.
9. Сандалов В. М., Цветков Ю. В. О взаимодействии несбалансированного ротора с жестким подшипником скольжения с радиальным зазором//Прикл. проблемы теории колебаний. Горький: Изд-е Горьк. ун-та. 1989. С. 69—75.

Москва

Поступила в редакцию  
3.VI.1991