

УДК 539.3

© 1994 г. Е. Г. ЕВСЕЕВ, Е. В. МОРОЗОВ

НЕПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КРУГОВОГО ТОНКОСТЕННОГО КОМПОЗИТНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассматривается нестационарный динамический процесс деформирования кругового тонкостенного композитного стержня, подвергаемого воздействию импульсной нагрузки. При построении расчетной модели учитываются деформация поперечного сдвига, инерция поворотов поперечного сечения, слоистость и ортотропия свойств материала. Численное решение задачи осуществляется на основе сеточно-характеристического конечно-разностного метода. В качестве примера представлены результаты расчета тонкостенного композитного стержня для различных вариантов распределения нагрузки.

1. Постановка задачи и определяющие соотношения. Применение композитных материалов в тонкостенных элементах конструкций позволяет наиболее полно реализовать их специфические свойства, высокие удельные прочностные и жесткостные характеристики. Наряду с широко распространенными типовыми элементами в виде оболочек вращения, панелей и стержней перспективным представляется использование тонкостенных криволинейных стержней с замкнутым контуром сечения. Большой практический интерес представляют круговые элементы типа тора. Плоские криволинейные рамы могут встречаться в составе судовых корпусов и в конструкциях летательных аппаратов. При этом нагрузка часто не лежит в плоскости кривизны таких элементов и характер нагружения не всегда является статическим.

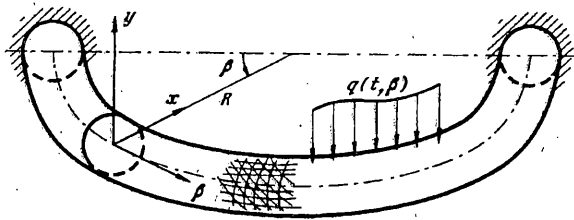
Среди вопросов общей теории тонкостенных стержней, представленных в [1], рассмотрены задачи статики криволинейных стержней с произвольным жестким контуром: изгиб и кручение плоского стержня с круговой осью малой кривизны, пространственная устойчивость круговых стержней, арок и торообразных оболочек с жестким профилем. Свободные, вынужденные и случайные колебания пространственно-криволинейных стержней исследуются в [2]. Отмечается, что в литературе практически не имеется решений задач о распространении упругих волн в пространственно-криволинейных стержнях. В [3] исследуется распространение волн продольных деформаций в прямолинейных стержнях со сплошным сечением и колебания круговых колец. Таким образом, представляет интерес задача исследования динамических процессов, возникающих в тонкостенных криволинейных композитных стержнях при импульсном воздействии, а также методы ее решения.

Рассматривается задача о нестационарном динамическом процессе деформирования кругового тонкостенного композитного стержня (фиг. 1), возникающем в результате воздействия импульсной нагрузки $q(t, \beta)$ в направлении, ортогональном плоскости кривизны стержня.

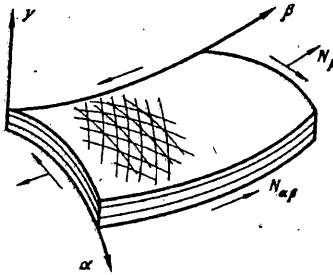
Распределение перемещений точек сечения стержня радиуса r определяется следующим образом:

$$u_{\beta} = w + r\theta_x \cos \alpha + r\theta_y \sin \alpha \quad (1.1)$$

$$u_x = u + r\theta_{\beta} \cos \alpha, \quad u_y = v - r\theta_{\beta} \sin \alpha$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где u_x, u_y, u_β — перемещения точек сечения вдоль осей координат x, y, β (β совпадает с осью стержня), u, v, w — перемещения центра сечения. Принятое распределение соответствует закону плоских сечений ($\theta_x, \theta_y, \theta_\beta$ — углы поворота сечения стержня относительно осей x, y, β соответственно).

Перемещения в направлении нормали γ к поверхности стержня u_γ и в тангенциальном направлении u_α определяются (фиг. 2) $u_\alpha = u_x \cos \alpha - u_y \sin \alpha$, $u_\gamma = u_y \cos \alpha + u_x \sin \alpha$.

С учетом (1.1) выражения для этих перемещений имеют вид

$$u_\alpha = u \cos \alpha - v \sin \alpha + r\theta_\beta \quad (1.2)$$

$$u_\gamma = u \sin \alpha + v \cos \alpha, \quad u_\beta = w + y\theta_x + x\theta_y$$

(В формулах (1.2) учтено, что $x = r \sin \alpha, y = r \cos \alpha$).

Перемещения $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$ связаны в линейном случае с деформациями $e_\alpha, e_\beta, e_{\alpha\beta}$ общими соотношениями [4]:

$$e_\alpha = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_\beta}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} + \frac{u_\gamma}{R_1}$$

$$e_\beta = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{u_\alpha}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} + \frac{u_\gamma}{R_2} \quad (1.3)$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} - \frac{u_\alpha}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} - \frac{u_\beta}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha}$$

где A_1, A_2 — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности. В рассматриваемом случае $A_1 = r, A_2 = R + r \sin \alpha$; радиусы кривизны равны $R_1 = r, R_2 = r + R/\sin \alpha$. Учитывая, что $r \ll R$, получаем

$$A_1 \cong R, \quad (\partial A_2 / \partial \alpha = r \cos \alpha), \quad R_2 \cong R / \sin \alpha$$

Тогда, из первого уравнения (1.3) с учетом выражений (1.2) для u_α , u_β , u_γ получим $e_\alpha = (-u \sin \alpha - v \cos \alpha)/r + (u \sin \alpha + v \cos \alpha)/r = 0$. Таким образом, контур сечения стержня не растягивается. Из второго равенства (1.3) следует

$$e_\beta = \varepsilon_\beta + x\chi_y + y\chi_x \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} + u \right), \quad \chi_x = \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_x}{\partial \beta}, \quad \chi_y = \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_y}{\partial \beta}$$

где ε_β — удлинение оси стержня, χ_x — искривление оси из плоскости кольца, χ_y — искривление оси в плоскости кольца.

Третье равенство (1.3) преобразуется (с учетом условия $r \ll R$) к виду

$$e_{\alpha\beta} = \psi_x \cos \alpha - \psi_y \sin \alpha + \psi_\beta \quad (1.5)$$

где ψ_x — деформация сдвига при изгибе в плоскости кольца, ψ_y — деформация сдвига при изгибе из плоскости, ψ_β — деформация сдвига при кручении, причем

$$\psi_x = \theta_y + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad \psi_y = \theta_x + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta}, \quad \psi_\beta = \frac{r}{R} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \quad (1.6)$$

Предполагаем в дальнейшем, что ось стержня нерастяжима, т. е. $\varepsilon_\beta = 0$, тогда из (1.4) имеем

$$\partial w / \partial \beta = -u \quad (1.7)$$

Согласно (1.6) углы поворота определяются равенствами

$$\theta_y = \frac{w}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \psi_x, \quad \theta_x = \psi_y - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} \quad (1.8)$$

В результате выражения для деформаций e_β , $e_{\alpha\beta}$ с учетом равенств (1.4) и (1.5) принимают вид

$$e_\beta = y\chi_x + x\chi_y, \quad (1.9)$$

$$e_{\alpha\beta} = \left(\theta_y + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{w}{R} \right) \cos \alpha - \left(\theta_x + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \sin \alpha$$

Нормальные усилия, действующие в стенке стержня N_β связаны с деформацией e_β следующим образом [4]:

$$N_\beta = B_{22} e_\beta = B_{22} (y\chi_x + x\chi_y), \quad B_{22} = \sum_{i=1}^k h_i A_{22}^{(i)}$$

Коэффициенты $A_{22}^{(i)}$ определяются известным образом через характеристики упругости и угол армирования i -го слоя [4], h_i — толщина i -го слоя композита. Усилие N_β сводится к моменту, действующему из плоскости кривизны стержня

$$M_x = \oint N_\beta y r d\alpha = D \chi_x, \quad D = \pi r^3 B_{22} \quad (1.10)$$

Касательное усилие с учетом (1.9) определяется следующим образом

$$N_{\alpha\beta} = B_{33} e_{\alpha\beta} = B_{33} \left[\frac{r}{R} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} + \left(\theta_y + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{w}{R} \right) \cos \alpha - \left(\theta_x + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \sin \alpha \right]$$

Здесь $B_{33} = G_{\alpha\beta}$ — средний модуль сдвига [4]. Это усилие сводится к крутящему моменту

$$M_\beta = \oint N_{\alpha\beta} r^3 d\alpha = 2\pi r^3 B_{33} \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} + C \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta}, \quad C = 2\pi B_{33} r^3 \quad (1.11)$$

Согласно равенствам (1.4), (1.7), (1.8), (1.10) и (1.11) моменты выражаются через перемещения

$$M_x = \frac{D}{R} \frac{\partial \theta_x}{\partial \beta}, \quad M_\beta = \frac{C}{R} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \quad (1.12)$$

После обобщения условий равновесия уравнения движения могут быть записаны так

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial Q_y}{\partial \beta} + q(t, \beta) &= B_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} - \frac{M_x}{R} = D_{p\beta} \frac{\partial^2 \theta_\beta}{\partial t^2} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial M_x}{\partial \beta} + \frac{M_\beta}{R} - Q_y &= D_{p_x} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Система уравнений (1.13) должна быть дополнена начальными и граничными условиями, после чего будет полностью поставлена начально-краевая (смешанная) задача для системы трех уравнений в частных производных второго порядка. Например, однородным начальным условиям соответствуют нулевые значения для всех входящих в систему (1.13) зависимых переменных в момент времени $t = 0$. Граничные условия, соответствующие жесткому защемлению края (торца стержня), запишутся в виде $v = \theta_x = \theta_\beta = 0$ при $\beta = -\pi/2, \pi/2$.

Исключая из уравнений (1.13) моменты M_x, M_β с помощью соотношений (1.12) и поперечную силу согласно равенству

$$Q_y = K_y \psi_y = K_y \left(\theta_x + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right)$$

получим систему уравнений относительно перемещения v и углов поворота θ_x, θ_β в виде

$$\begin{aligned} B_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{K_y}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} &= \frac{K_y}{R} \frac{\partial \theta_x}{\partial \beta} + q(t, \beta) \\ D_{p\beta} \frac{\partial^2 \theta_\beta}{\partial t^2} - \frac{C}{R^2} \frac{\partial^2 \theta_\beta}{\partial \beta^2} &= \frac{D}{R^2} \frac{\partial \theta_x}{\partial \beta} \\ D_{p_x} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} - \frac{D}{R^2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial \beta^2} &= -\frac{K_y}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{C}{R^2} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} - K_y \theta_x \end{aligned} \quad (1.14)$$

Система уравнений в перемещениях (1.14) представляет собой систему трех уравнений в частных производных второго порядка по времени t и по пространственной переменной β . Так как надеяться на возможность отыскания аналитического решения для произвольного вида нагружения $q(t, \beta)$ не приходится, то актуальной является проблема применения эффективной вычислительной процедуры. Для реализации сеточно-характеристического или иного (в том числе гибридного) явного конечно-разностного метода система (1.14) может быть сведена специальной заменой к эквивалентной системе первого порядка.

Для нормировки определяющих уравнений (1.14) в качестве характерного линейного размера выбирается радиус R , а в качестве характерного времени — время пробега упругим возмущением растяжения-сжатия длины R . Таким образом, перемещение v относится к R , время t — к c/R , где $c^2 = E_\beta / [\rho (1 - \nu_{12}\nu_{21})]$, ρ — плотность материала оболочки, а нагрузка q — к $2\pi E_\beta r h / [R (1 - \nu_{12}\nu_{21})]$. После выполнения необходимых преобразований в безразмерном виде система (1.14) запишется

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \xi^2 \zeta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} = \xi^2 \zeta^2 \frac{\partial \theta_x}{\partial \beta} + q(t, \beta)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_\beta}{\partial t^2} - \xi^2 \frac{\partial^2 \theta_\beta}{\partial \beta^2} = \frac{1}{4} \eta^2 \frac{\partial \theta_x}{\partial \beta} \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} - \eta^2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial \beta^2} = -2\xi^2 \zeta^2 \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + 2\xi^2 \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} - 2\xi^2 \zeta^2 \frac{R^2}{r^2} \theta_x$$

$$\xi^2 = G_{\alpha\beta} (1 - \nu_{12}\nu_{21})/E_\beta, \quad \zeta^2 = 0,5\pi, \quad \eta^2 = 2(1 - \nu_{12}\nu_{21})$$

В уравнениях (1.15) перемещение v , время t и нагрузка q отнормированы указанным выше образом.

2. Гиперболическая система первого порядка. Введением нового вектора-столбца независимых переменных

$$U = \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial \theta_\beta}{\partial t}, \frac{\partial \theta_x}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial \beta}, \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta}, \frac{\partial \theta_x}{\partial \beta}, v, \theta_\beta, \theta_x \right)^T \quad (2.1)$$

система (1.15) сводится к эквивалентной системе девяти уравнений первого порядка по времени и пространственной координате

$$\partial U / \partial t + A \partial U / \partial \beta = F(t, \beta, U) \quad (2.2)$$

в которой A — квадратная матрица размерности 9×9 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\xi^2 \zeta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta^2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

а компоненты вектора правой части имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= \xi^2 \zeta^2 \frac{\partial \theta_x}{\partial \beta} + q(t, \beta), & F_2 &= -\eta^2 \frac{\partial \theta_x}{\partial \beta} \\ F_3 &= -2\xi^2 \zeta^2 \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + 2\xi^2 \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} - 2\xi^2 \zeta^2 \frac{R^2}{r^2} \theta_x \\ F_4 &= F_5 = F_6 = 0 \\ F_7 &= U_1, & F_8 &= U_2, & F_9 &= U_3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Эквивалентность задачи Коши для волнового уравнения и задачи Коши для системы уравнений первого порядка может быть показана с помощью алгебры Клиффорда методом, рассмотренным в [5]. Для волнового уравнения общего вида эквивалентная система первого порядка является симметричной гиперболической по Фридрихсу.

В [6] в качестве дополнительного результата к основной теореме показана эквивалентность смешанной задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и соответствующей гиперболической системы первого порядка.

Эквивалентность смешанной задачи для системы уравнений в частных производных второго порядка (1.15) и смешанной задачи для гиперболической системы первого порядка (2.2) может быть показана [5]. Использование замены вида (2.1) для сведения системы второго порядка к гиперболической системе первого порядка в перемещениях предложено в [7].

Гиперболическая матрица (2.3) A имеет девять действительных собственных значений λ_x , определяемых соотношением

$$\det \|A - \lambda E\| = 0 \quad (2.5)$$

(E — единичная матрица соответствующих размеров). Собственные числа матрицы, определяемые характеристическим уравнением (2.5), могут быть записаны в виде диагональной матрицы

$$\Lambda = \text{diag} \|\!-\xi\zeta, -\xi, -\eta, \eta, \xi, \xi\zeta, 0, 0, 0\|$$

Существует девять линейно-независимых собственных вектора-строки ω^k , удовлетворяющих для соответствующих λ_k уравнению

$$\omega^k (A - \lambda_k E) = 0 \quad (2.6)$$

Это обуславливает существование представления матрицы A в виде

$$A = \Omega^{-1} \Lambda \Omega \quad (2.7)$$

где Ω — квадратная матрица, составленная из девяти векторов-строк ω^{-k} , а Ω^{-1} — обратная к последней: $\Omega^{-1} \Omega = E$.

Для рассматриваемой системы (2.2) имеем

$$\Omega = \left\| \begin{array}{cccccccc} \xi\zeta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi\zeta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

Существование разложения вида (2.6) для гиперболической матрицы позволяет применять для исследования хорошо зарекомендовавшие себя явные сеточно-характеристические конечно-разностные методы с положительной аппроксимацией [8].

Для реализации методов, учитывающих характеристические свойства системы определяющих уравнений, во внутренних точках расчетной области полезно знать матрицу $B = \Omega^{-1} \Lambda \Omega$. После преобразований получаем диагональную матрицу B для системы (2.2) в виде

$$B = \Omega^{-1} \Lambda \Omega = \text{diag} \|\xi\zeta, \xi, \eta, \xi\zeta, \xi, \eta, 0, 0, 0\|$$

Для реализации граничных условий системы (2.2) можно переписать в характеристическом виде. Используя разложение (2.7) и умножив систему (2.2) слева на матрицу Ω , получаем

$$\Omega \partial U / \partial t + \Lambda \Omega \partial U / \partial \beta = \Omega F(t, \beta, U) \quad (2.8)$$

Произведение матриц $\Lambda \Omega$ имеет вид

$$\Lambda \Omega = \left\| \begin{array}{cccccccc} -\xi^2 \zeta^2 & 0 & 0 & -\xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta^2 & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta^2 & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ \xi^2 \zeta^2 & 0 & 0 & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad (2.9)$$

а произведение $\Lambda \Omega$ — вид

$$|\Delta|\Omega = \begin{vmatrix} \xi^2\tau^2 & 0 & 0 & \xi\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^2 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta^2 & \eta & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi^2 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi^2\tau^2 & 0 & 0 & \xi\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

Представленные в данном разделе разложения используются при реализации явных конечно-разностных схем характеристического типа.

3. Метод численного решения. Одна из принципиальных трудностей при численном исследовании гиперболических систем уравнений первого порядка (2.2) с матрицей (2.3) и вектором правой части (2.4) явными конечно-разностными методами состоит в том, что правая часть содержит в себе члены с большими множителями вида $(R/r)^2$, которые ответственны за появление в решении сильноосциллирующих и слабозатухающих по времени составляющих. Если вклад в решение таких гармоник не учитывать явно, то во многих случаях имеет место быстрое развитие неустойчивости численного счета и возникает необходимость проводить расчеты с очень маленьким шагом по времени (намного меньшим, чем допускается известным условием Куранта — Фридрихса — Леви и условиями аппроксимации). Различные приемы увеличения шага интегрирования по времени, основанные на идеях усреднения, введении элементов неявности при учете вклада правой части или на проведении дополнительных итераций не решают проблему до конца.

В [9] предложена, а в [10] развита методика, позволяющая специальным образом выделить сильноосциллирующие составляющие решения так, чтобы была обеспечена устойчивость явных конечно-разностных схем при значениях параметра Куранта, близких к единице. При этом для аппроксимации гиперболического оператора могут применяться разностные схемы, учитывающие характеристические свойства системы, в том числе сеточно-характеристические [8] и гибридные (повышенного порядка), например [10—11].

Для решения системы (2.2) предлагается использовать метод расщепления, состоящий в данном случае из двух этапов. На первом этапе в каждом узле β_j разностной сетки по β (которая может быть и неравномерной) на каждом временном отрезке $[t^n, t^{n+1}]$, $t^{n+1} = t^n + \tau^n$ (τ^n — текущий шаг по времени, $n = 0, 1, \dots$) аналитически решается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dU_j/dt = f(t, \beta_j, U_j), \quad U_j|_{t=t^n} = U_j^n \quad (3.1)$$

Правая часть f выделена из F таким образом, чтобы в f входили все члены с большими параметрами и задача (3.1) имела выписываемое в явном виде сильноосциллирующее решение U_j^0 . Использование системы первого порядка делает процедуру выделения f простой и легко алгоритмизуемой. Для рассматриваемого случая в f входят все члены из исходного вектора (2.4) за исключением произвольной функции нагрузки.

На втором этапе на том же интервале по времени численно интегрируется гиперболическая система уравнений первого порядка

$$\partial U/\partial t + A\partial U/\partial \beta = F - f \quad (3.2)$$

с правой частью, не содержащей члены с большими параметрами. В качестве начальных данных для нее используется решение задачи (3.1).

Выпишем решение задачи Коши (3.1) в явном виде

$$U_{1j}^0 = U_{1j}^n + \tau^n \xi^2 \tau^2 U_{6j}^n, \quad U_{2j}^0 = U_{2j}^n + 0,25 \tau^n \eta^2 U_{6j}^n$$

$$U_{3j}^0 = U_{3j}^n \cos(a\tau^n) + (aU_{9j}^n - b/a) \sin(a\tau^n) + b/a^2 \quad (3.3)$$

$$U_{4j}^0 = U_{4j}^n, \quad U_{5j}^0 = U_{5j}^n, \quad U_{6j}^0 = U_{6j}^n$$

$$U_{7j}^0 = U_{7j}^n + \tau^n U_{1j}^n + 0,5 (\tau^n)^2 \xi^2 \zeta^2 U_{6j}^n$$

$$U_{8j}^0 = U_{8j}^n + \tau^n U_{2j}^n + 0,125 (\tau^n)^2 \eta^2 U_{6j}^n$$

$$U_{9j}^0 = \left(U_{9j}^n - \frac{b}{a^2} \right) \cos(a\tau^n) + \frac{U_{3j}^n}{a} \sin(a\tau^n) + \frac{b}{a^2}$$

$$a^2 = 2\xi^2 \zeta^2 \frac{R^2}{l^2}, \quad b = -2\xi^2 \zeta^2 \frac{R^2}{l^2} U_{4j}^n + 2\xi^2 U_{5j}^n$$

Сеточно-характеристическая схема для системы (3.2) с начальными значениями (3.3) может быть записана в векторном виде для внутренних точек неравномерной разностной сетки

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} = & U_j^0 + \tau^n (F_j^n - f_j^n) - \frac{\tau^n}{\beta_{j+1} - \beta_j} A_j^n (U_{j+1}^0 - U_j^0) - \\ & - \frac{\tau^n}{\beta_j - \beta_{j-1}} A_j^n (U_j^0 - U_{j-1}^0) + \frac{\tau^n}{\beta_{j+1} - \beta_j} (\Omega^{-1} | \Lambda | \Omega)_j^n (U_{j+1}^0 - 2U_j^0 + U_{j-1}^0) + \\ & + \frac{\tau^n}{\beta_j - \beta_{j-1}} (\Omega^{-1} | \Lambda | \Omega)_j^n (U_{j+1}^0 - 2U_j^0 + U_{j-1}^0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Использование записи (3.3) в общем виде для реализации вычислительного алгоритма приводит к некоторым неудобствам. Так как в рассматриваемом случае геометрически линейной теории матрица A системы (2.2) имеет постоянные коэффициенты, то разумно использовать равномерное разбиение расчетной области по пространственной и временной координатам. Тогда, если принять что $\beta_{j+1} - \beta_j = \beta_j - \beta_{j-1} = \Delta\beta = \text{const}$ и $t^{n+1} - t^n = \Delta t = \text{const}$, вместо системы (3.4) имеем

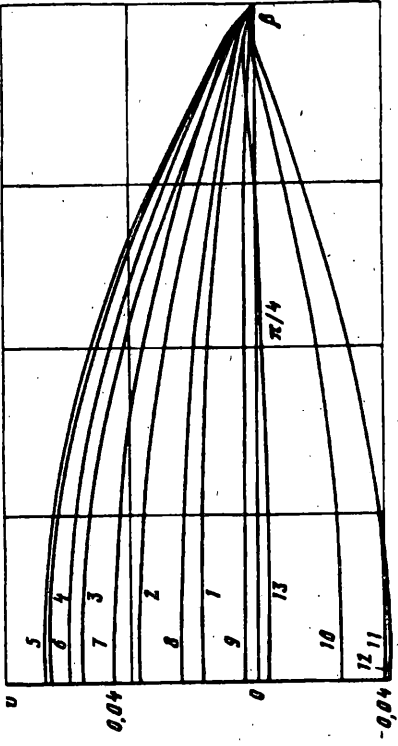
$$\begin{aligned} U_j^{n+1} = & U_j^0 + \Delta t (F_j^n - f_j^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta\beta} A (U_{j+1}^0 - U_{j-1}^0) + \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta\beta} (\Omega^{-1} | \Lambda | \Omega) (U_{j+1}^0 - 2U_j^0 + U_{j-1}^0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Реализация расчетных формул в граничных точках (условия жесткого закрепления) осуществляется традиционным для сеточно-характеристических подходов способом на основе представления (2.8) и соотношений (2.9), (2.10). Граничные точки, в которых выполняются условия симметрии, могут рассматриваться как внутренние точки расчетной области.

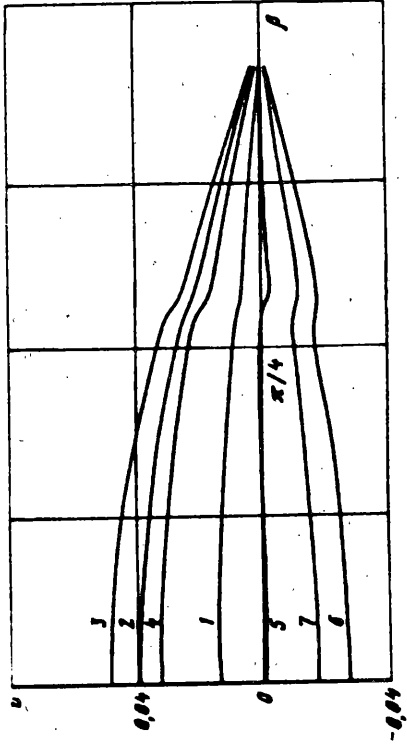
Таким образом, полный алгоритм решения на каждом шаге интегрирования по времени состоит в последовательном выполнении расчетов по формулам (3.3) и (3.5) для внутренних точек и по аналогичным формулам для граничных точек.

4. Численные примеры. На фиг. 3—6 представлены некоторые результаты расчетов динамического поведения конструкции, описанной выше, при приложении ступенчатой по времени нагрузки. В момент времени $t = 0$ стержень находится в покое. Тонкостенный стержень имеет следующие геометрические характеристики: радиус поперечного сечения $r = 0,03R$; толщина стенки сечения $h = 0,04$ $r = 0,0012R$. Отношение упругих констант материала $E_\beta/G_{\alpha\beta} = 6,4$; $\nu_{12} = 0,2$; $\nu_{21} = 0,156$. Нормированная амплитуда нагрузки $q = 0,1$.

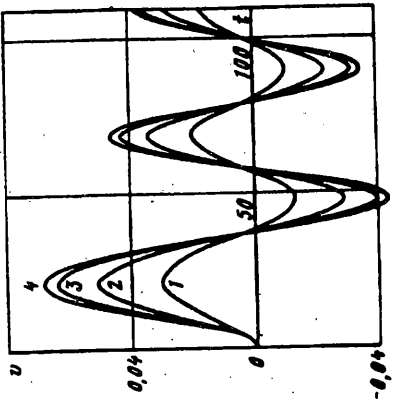
На фиг. 3 показаны изменения прогиба в зависимости от времени: кривые 1—4 соответствуют сечениям $\beta = 0, \pi/8, \pi/4$ и $3\pi/8$. Нагрузка приложена по всей длине оси и действует в течение времени $0 \leq t \leq 800 \Delta t \approx 30,0$. Число Куранта равно 0,7, шаг по времени $\Delta t = 0,0376$. Безразмерному времени $t = 1$ соответствует время пробега упругой волной растяжения-сжатия расстояния, равного



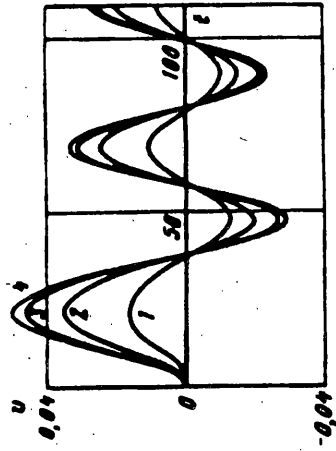
Фиг. 4



Фиг. 6



Фиг. 3



Фиг. 5

радиусу оси стержня R . На фиг. 4 кривые 1—13 представляют различные положения оболочки в последовательные моменты времени. На фиг. 5, 6 показаны графики, аналогичные представленным на фиг. 3, 4, для нагрузки, равномерно распределенной в интервале $-\pi/4 \leq \beta \leq \pi/4$.

Расчетная область $0 \leq \beta \leq \pi/2$ разбивается на 20 равных участков, отсчет угла β производится от плоскости симметрии. Увеличение числа интервалов разбиения в 2 и 4 раза, а также проведение расчетов с числами Куранта в диапазоне от 0,05 до 0,95 не приводят к существенному изменению результатов, что свидетельствует о практической сходимости и надежности предложенной методики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М.: ГИФМЛ, 1959. 568 с.
2. Светлицкий В. А. Механика стержней. Ч. 2. Динамика. М.: Высшая школа, 1987. 304 с.
3. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
4. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
5. Марчук Н. Г. Сведение задачи Коши для волнового уравнения к задаче Коши для системы уравнений первого порядка//Дифференциальные уравнения. 1984. Т. XX. № 4. С. 653—659.
6. Марчук Н. Г. О корректности постановки смешанной задачи для векторного волнового уравнения//Дифференциальные уравнения. 1984. Т. XX. № 5. С. 838—843.
7. Евсеев Е. Г. Метод решения нелинейных уравнений динамики тонких оболочек вращения/Нелинейная теория тонкостенных конструкций и биомеханика: Тр. I Всес. симпозиума. Тбилиси: Тбил. гос. ун-т, 1985. С. 191—193.
8. Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988. 290 с.
9. Евсеев Е. Г. Анализ динамического поведения ортотропных оболочек на основе сеточно-характеристических методов/Теория пластин и оболочек: Тр. XIV Всес. конф. Т. I. Тбилиси: Тбил. гос. ун-т, 1987. С. 512—517.
10. Евсеев Е. Г., Семенов А. Ю. Метод для численного решения уравнений динамики тонкостенных оболочек, основанный на выделении сильноосциллирующих компонент//Доклады АН СССР. 1990. Т. 310. № 4. С. 785—788.
11. Семенов А. Ю. Метод построения гибридных разностных схем для гиперболических систем//Доклады АН СССР. 1984. Т. 279. № 1. С. 34—37.

Москва

Поступила в редакцию
11.X.1993