

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. С. Ю. ВЕСЕЛКОВ

## УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, НАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ НА ГРАНИЦЕ

Рассматривается устойчивость полубесконечной пластины нагруженной сосредоточенной силой на границе. Методом Ритца получено значение первой критической силы и формы прогиба пластины.

Рассмотрим изотропную полубесконечную пластину  $S$  постоянной толщины  $h$ . Введем в ее срединной плоскости трехмерную декартову  $(x, y, z)$  и плоскую полярную  $(r, \varphi)$  системы координат; ось  $Ox$  направим вдоль прямолинейной границы. Предположим, что в точке  $O$  кромки пластины действует сосредоточенная сжимающая сила  $P = P_x \cos(\alpha) i + P_y \sin(\alpha) j$  (фиг. 1).

Согласно [1, 2] напряжения в координатах  $(r, \varphi)$  определяются выражениями

$$\sigma_{rr} = -2P/(\pi r) \cos(\varphi - \alpha), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{r\varphi} = 0 \quad (1)$$

Пусть кромка  $y = 0$  шарнирно оперта, тогда краевые условия выглядят таким образом

$$W(x, y) \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} W(x, y) \rightarrow 0 \quad (2)$$

где  $W(x, y)$  — прогиб пластины в направлении оси  $z$ .

При определенной величине силы  $P = P^*$  происходит локальная потеря устойчивости пластины, в результате чего выходит из плоскости  $xOy$  и выпучивается область  $\Omega$  в окрестности точки приложения силы [3—5]. Определим  $P^*$  и соответствующую форму потери устойчивости.

Решение поставленной задачи сводится к исследованию проблемы собственных значений следующего дифференциального уравнения [3, 6]:

$$\Delta \Delta W = \frac{h}{D} \left[ \sigma_{xx} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma_{yy} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] \quad (3)$$

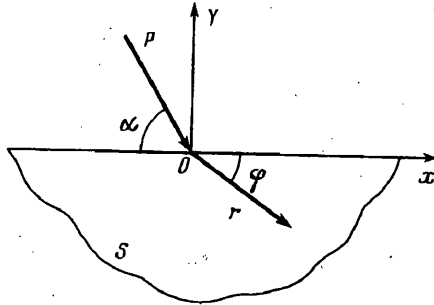
Уравнение (3) является уравнением Эйлера—Лагранжа для функционала  $I$ , который в декартовой и полярной системах координат определяется зависимостями [6]:

$$I = \frac{1}{2} \iint_S D \left\{ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right\} -$$

$$- h \left\{ \sigma_{xx} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{yy} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy} \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right\} dS \quad (4)$$

$$I = \frac{D}{2} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^4} \left( \frac{\partial^2 W(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W(r, \varphi)}{\partial r^2} \right)^2 +$$

$$+ 2 \left\{ \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 W(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} \right)^2 - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 W(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right\} d\varphi \quad (5)$$



Фиг. 1

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 W(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^4} \left( \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 \} + \nu \left\{ \frac{4}{r^3} \frac{\partial^2 W(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} \right. \\
 & \cdot \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial^2 W(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} \right)^2 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 W(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 W(r, \varphi)}{\partial r^2} - \\
 & \left. - \frac{2}{r^4} \left( \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 W(r, \varphi)}{\partial r^2} \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial r} \right\} - \sigma_r \frac{h}{D} \left( \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial r} \right)^2 d\varphi dr
 \end{aligned}$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$  — компоненты тензора напряжений,  $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ ,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Примем функцию  $W(r, \varphi)$  в виде [7]:

$$W(r, \varphi) = \sum_{k=3}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} A_{km} J_k(r) \frac{\sin(m \cdot \varphi)}{r} \quad (6)$$

где  $J_k(r)$  — бесселевы функции первого рода.

Подставляя ряд (6) в правую часть выражения (5) после выполнения необходимых преобразований, получим квадратичную форму относительно неизвестных коэффициентов  $A_{km}$ . Минимуму квадратичной формы отвечает система однородных линейных уравнений, определяемая соотношениями

$$\partial(I)/\partial A_{km}' = 0 \quad (k = \overline{3, N_1}; m = \overline{1, N_2}) \quad (7)$$

Равенство нулю определителя этой системы позволяет установить наименьшее собственное значение  $P^*$ . Прямой метод поиска нуля определителя дает существенную погрешность, поэтому в работе был применен другой подход. Представим структуру левой части выражения (7) так:

$$A - B = 0, \quad (8)$$

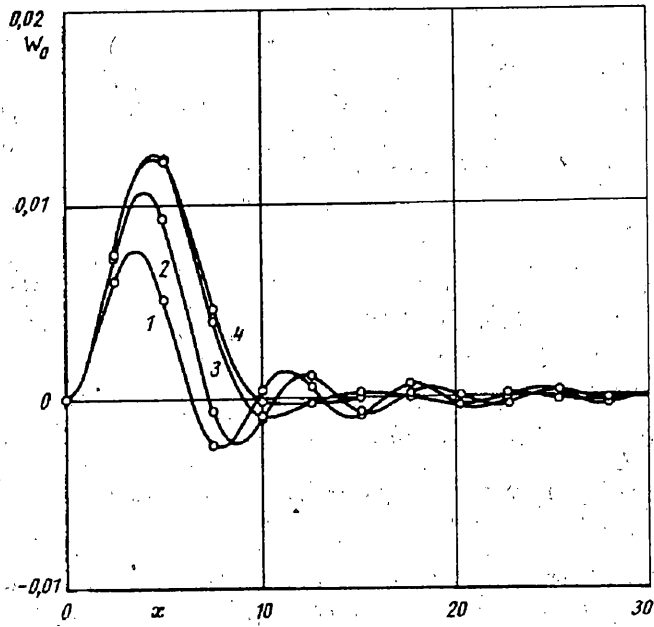
где  $B$  — симметричная матрица порядка  $N_1 \times N_2$ , элементы которой не зависят от  $P$ , а  $A$  — симметричная матрица того же порядка, каждый элемент которой зависит от силы.

Задача нахождения критической нагрузки и соответствующей ей формы потери устойчивости легко сводится теперь к обобщенной алгебраической проблеме собственных значений и векторов. Если матрица  $B$  положительно определенная, то легко можно перейти к обычной проблеме собственных значений.

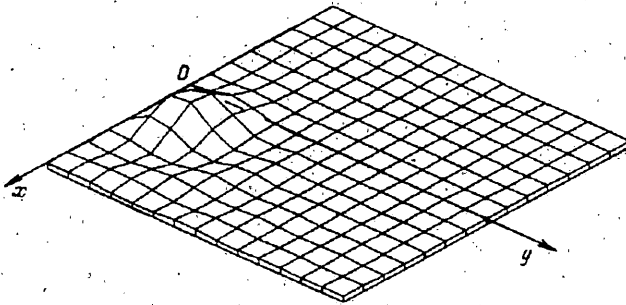
Силу  $P$  можно представить в следующем виде:

$$P^* = \beta D/h \quad (9)$$

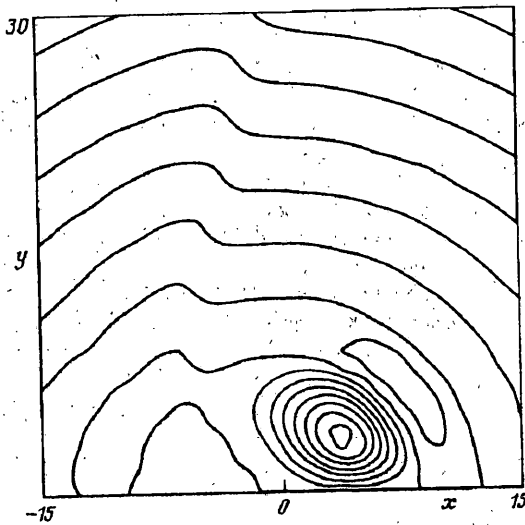
где  $\beta$  — некоторый коэффициент.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$N_2$	$N_1 = 2$	$N_1 = 4$	$N_1 = 6$	$N_1 = 8$	$N_1 = 11$	$N_1 = 12$	$N_1 = 16$	$N_1 = 24$
1	1,718	1,514	1,491	1,490	1,485	1,484	1,483	1,483
2	1,718	1,513	1,491	1,490	1,484	1,484	1,483	1,482
4	1,712	1,511	1,483	1,482	1,478	1,478	1,477	1,476
6	1,712	1,510	1,483	1,481	1,478	1,478	1,477	1,476

В таблице приведены значения  $\beta$  при различном числе членов ряда (6) по радиусу и углу ( $\alpha = \pi/2$ ). Как видно

$$\lim \beta = \beta^v \approx 1,4 \text{ при } k, m \rightarrow \infty.$$

Безразмерный прогиб  $W_0 = W(x, y)/h$  пластины в сечении  $\varphi = \pi/2$  ( $\alpha = \pi/2$ ,  $m = 2$ ) приводится на фиг. 2, значениям  $k = 2, 4, 6, 8$  отвечают соответственно кривые 1, 2, 3, 4.

Величины коэффициентов  $\beta$  в формуле (9) для некоторых углов  $\alpha$  (см. фиг. 1) приведены ниже ( $k = 2, m = 2$ ):

$\alpha$	0	$\pi/600$	$\pi/60$	$\pi/12$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/6$	$\pi/2$
$\beta$	6,308	6,308	5,641	3,760	2,145	2,013	1,845	1,718

Налицо достаточно хорошая сходимость метода с увеличением количества членов ряда в разложении (6).

В инженерной практике известно решение А. Зоммерфельда  $P_* = 4\pi D/l$ , определяющее величину критических усилий  $P_*$  для бесконечной полосы шириной  $l$ , шарнирно опертой по продольным кромкам [8]. Эта формула применима для относительно небольших значений параметра  $l$ ; т. к.  $\lim P_* \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow \infty$ . Устойчивость в данной работе формула позволяет, наоборот, оценить локальную устойчивость, когда одна из границ полосы (свободная от сосредоточенной нагрузки) удалена в бесконечность.

На фиг. 3, 4 воспроизведены безразмерные форма прогиба и линии уровня  $W(x, y) = \text{const}$  в случае силы действующей на кромку под углом  $\alpha = \pi/600$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
3. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
4. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: ГИ ФМЛ, 1963. 880 с.
5. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. Т. 2. Л.: ГСИСП, 1941. 960 с.
6. Варвак П. М. Справочник по теории упругости. Киев: 1971. 419 с.
7. Веселков С, Ю. Устойчивость упругой полубесконечной ортотропной пластины нагруженной сосредоточенной силой на границе. // В сб. Функционально-механические свойства материалов и их компьютерное конструирование. Псков. 1993. С. 189—191.
8. Sommerfeld von A. Aachen Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen. // Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1906. В. 54. 1 Heft. S. 113—153.

Санкт—Петербург

Поступила в редакцию  
20.V.1992