МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1994

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. Е. Д. СВИЯЖЕНИНОВ

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИССИПАТИВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

Работа посвящена вариационному способу определения комплексных амплитуд внутренних усилий и перемещений тела с распределенными инерционно-упругими параметрами (трехмерного, оболочки, стержня) при стационарных гармонических колебаниях с учетом всех видов рассеяния механической энергии вследствие трения (внутреннего, внешнего, конструкционного). Для определения нестационарных колебаний распределенных неконсервативных систем и условий их устойчивости широко используются подходы, основанные на применении вариационного уравнения Лагранжа и принципа Гамильтона — Остроградского [1—3]. Вариационные принципы хорошо известны также для задач статики [4, 5] и установившихся вынужденных колебаний распределенных систем без учета диссипации механической энергии [6], когда вариационные функционалы заданы на классе вещественных искомых функций. Учет же трения приводит к фазовым сдвигам между усилиями и смещениями точек упругих тел и переводит искомые амплитуды векторов из вещественной оси на комплексную плоскость.

В публикуемой работе и предлагается вариационный принцип для определения комплексных амплитуд стационарных колебаний диссипативных систем с распределенными параметрами. Формулируются диссипативная неоднородная краевая задача теории упругих колебаний со сложными смешанными граничными условиями, обусловленная неоднородностью как уравнений, так и граничных условий, и функционал, условие стационарности которого эквивалентно диссипативной краевой задаче. Из условия равенства нулю вариации этого функционала (вариационного условия), в частности, следуют проекционные условия Бубнова — Галеркина для диссипативной краевой задачи с неоднородными граничными условиями. Отличие их от соответствующих проекционных условий для недиссипативной краевой задачи [6] заключается в том, что проектирование уравнений и естественных граничных условий осуществляется на комплексносопряженные координатные функции. Проекции уравнений и граничных условий входят слагаемыми в единые проекционные уравнения, и вариационный способ их получения определяет правильную постановку знаков между этими слагаемыми.

Применением прямого вариационного метода задача сводится к системе комплексных линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов аппроксимации. Подход демонстрируется на примере решения задачи о вынужденных колебаниях вязкоупругого тела под действием поверхностных сил. Оценивается эффект введения в математическую модель рассеяния механической энергии. Показывается, что учет диссипации существенно необходим в околорезонансных и высокочастотной областях колебаний.

1. Постановка диссипативной краевой задачи теории упругих колебаний. Задача о гармонических колебаниях упругого тела (трехмерного, оболочки, стержня), занимающего область Ω, описывается системой дифференциальных уравнений, в операторной форме [6—12] имеющей вид

$$Dx - \lambda^2 Ry - i\lambda Sy = f, \quad D^* y - Bx - i\lambda Px = e \quad \text{в} \quad \Omega \tag{1.1}$$

при сложных смешанных условиях на границе тела Γ:

$$X + R_\Gamma Y - i\lambda S_\Gamma Y = F \quad \text{на} \quad \Gamma_1$$

$$Y + B_\Gamma X - i\lambda P_\Gamma X = E \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma \tag{1.2}$$

где x, y — искомые комплексные амплитуды векторов усилий и перемещений в области Ω, а X, Y — на границе Γ; f, e — заданные амплитуды векторов внешних объемных сил и деформаций в Ω, а F, E — поверхностных сил на Γ_1 и перемещений граничных точек на Γ_2; D, D^* — операторы дифференцирования по пространственным координатам, не содержащие характеристик физических свойств среды, вид которых определяется выбранной системой координат. Все остальные операторы — алгебраические, учитывающие физические свойства системы с распределенными параметрами: R, B — инерции и податливости; S, P — внешнего и внутреннего трения; R_Γ, B_Γ — динамических жесткостей и податливостей прилегающей к Ω среды в точках ее границы Γ; S_Γ, P_Γ – эквивалентные линейные операторы конструкционного демпфирования. Конкретный вид векторов и операторов для упругих тел различной размерности приведен в [6]. Основной смысл введения операторной формы записи краевой задачи (1.1), (1.2) заключается в том, что введенные операторы обладают рядом характерных свойств, позволяющих использование вариационных принципов.

2. Свойства операторов диссипативной краевой задачи о колебаниях упругого тела. Учет рассеяния механической энергии при моделировании упругих колебаний переводит искомые амплитуды векторов из вещественной оси на комплексную плоскость. Поэтому все применяемые в дальнейшем свойства операторов, указанные в [6] для вещественных функций, приводятся для пространства комплексных векторных функций.

Дифференциальные операторы D, D^* обладают свойством сопряженности по Лагранжу:

$$\int_\Omega Dx\bar{y}d\Omega = \int_\Omega xD^*\bar{y}d\Omega - \int_\Gamma X\bar{Y}d\Gamma \tag{2.1}$$

где чертой отмечены комплексно-сопряженные величины. Алгебраические операторы R, B, R_Γ, B_Γ, S, P, S_Γ, P_Γ – самосопряженные

$$\int_\Omega Ry_1\bar{y}_2d\Omega = \int_\Omega y_1R\bar{y}_2d\Omega, \quad \int_\Omega x_1B\bar{x}_2d\Omega = \int_\Omega Bx_1\bar{x}_2d\Omega \tag{2.2}$$

$$\int_{\Gamma_1} R_\Gamma Y_1\bar{Y}_2d\Omega = \int_{\Gamma_1} X_1R_\Gamma\bar{Y}_2d\Omega, \quad \int_{\Gamma_2} X_1B_\Gamma\bar{X}_2d\Omega = \int_{\Gamma_2} B_\Gamma X_1\bar{X}_2d\Omega$$

3. Сопряженная диссипативная краевая задача. При постановке диссипативной краевой задачи (1.1), (1.2) о гармонических колебаниях упругого тела относительно комплексных амплитуд x, y временной множитель был принят в виде $\exp(-i\lambda t)$. При выборе временного множителя в виде $\exp(i\lambda t)$ краевая задача относительно комплексно-сопряженных амплитуд $\bar{x}$, $\bar{y}$ выглядит следующим образом:

$$D\bar{x} - \lambda^2R\bar{y} + i\lambda S\bar{y} = \bar{f}, \quad D^*\bar{y} - B\bar{x} + i\lambda P\bar{x} = \bar{e} \quad \text{в} \quad \Omega \tag{3.1}$$

$$\bar{X} + R_\Gamma\bar{Y} + i\lambda S_\Gamma\bar{Y} = \bar{F} \quad \text{на} \quad \Gamma_1$$

$$\bar{Y} + B_\Gamma\bar{X} + i\lambda P_\Gamma\bar{X} = \bar{E} \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \ \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma \tag{3.2}$$

Задачу (3.1), (3.2), отличающуюся от (1.1), (1.2) лишь направлением вращения фазового вектора $\exp(\pm i\lambda t)$, будем называть сопряженной. Формально сопряженная задача отличается от основной лишь противоположными знаками перед диссипативными операторами. Вместе с тем основная и сопряженная задача — двойственны в том смысле, что если известно решение x, y одной из них, то комплексно-сопряженные им векторы $\bar{x}$, $\bar{y}$ — решение другой. Следовательно, достаточно определить решение либо основной, либо сопряженной ей диссипативной краевой задачи.

Будем рассматривать практически часто встречающийся случай таких диссипативных механических систем с распределенными параметрами, свободные движения в которых носят затухающий колебательный, но не апериодический характер. Это приводит к условию малости норм всех диссипативных операторов, которые можно рассматривать как возмущения

$$\Delta = \max(\|S\|, \|P\|, \|S_\Gamma\|, \|P_\Gamma\|) \ll \max(\|R\|, \|B\|, \|R_\Gamma\|, \|B_\Gamma\|) \tag{3.3}$$

где $\|\ldots\|$ — означает норму оператора. Для этого условия и формулируется вариационный принцип.

4. Вариационный принцип для упругих колебаний с учетом рассеяния механической энергии. Решение диссипативной краевой задачи (1.1), (1.2) равносильно условию стационарности функционала $l(x, y)$, заданного на классе комплексных дифференцируемых в Ω функций x, y:

$$l(x, y) = \frac{1}{2}\Big\{\int_\Omega [(Dx - \lambda^2 Ry - i\lambda Sy - 2f)\bar{y} + \bar{x}(D^* y - Bx - i\lambda Px - 2e) +$$

$$+ (D\bar{x} - \lambda^2 R\bar{y} + i\lambda S\bar{y} - 2\bar{f})y + x(D^*\bar{y} - B\bar{x} + i\lambda P\bar{x} - 2\bar{e})]\,d\Omega +$$

$$+ \int_{\Gamma_1} [(X + R_\Gamma Y - i\lambda S_\Gamma Y - 2F)\bar{Y} + (\bar{X} + R_\Gamma\bar{Y} + i\lambda S_\Gamma\bar{Y} - 2\bar{F})Y]\,d\Gamma - \tag{4.1}$$

$$- \int_{\Gamma_2} [\bar{X}(Y + B_\Gamma X - i\lambda P_\Gamma X - 2E) + X(\bar{Y} + B_\Gamma\bar{X} + i\lambda P_\Gamma\bar{X} - 2\bar{E})]\,d\Gamma\Big\}$$

Действительно, вариация функционала (4.1) будет равна

$$\delta l(x, y) = \frac{1}{2}\Big\{\int_\Omega [(D\delta x - \lambda^2 R\delta y - i\lambda S\delta y)\bar{y} + \bar{x}(D^*\delta y - B\delta x - i\lambda P\delta x) +$$

$$+ (Dx - \lambda^2 Ry - i\lambda Sy - 2f)\delta\bar{y} + \delta\bar{x}(D^* y - Bx - i\lambda Px - 2e) +$$

$$+ (D\delta\bar{x} - \lambda^2 R\delta\bar{y} + i\lambda S\delta\bar{y})y + x(D^*\delta\bar{y} - B\delta\bar{x} + i\lambda P\delta\bar{x}) +$$

$$+ (D\bar{x} - \lambda^2 R\bar{y} + i\lambda S\bar{y} - 2\bar{f})\delta y + \delta x(D^*\bar{y} - B\bar{x} + i\lambda P\bar{x} - 2\bar{e})]\,d\Omega +$$

$$+ \int_{\Gamma_1} [(\delta X + R_\Gamma\delta Y - i\lambda S_\Gamma\delta Y)\bar{Y} + (\delta\bar{X} + R_\Gamma\delta\bar{Y} + i\lambda S_\Gamma\delta\bar{Y})Y +$$

$$+ (X + R_\Gamma Y - i\lambda_\Gamma Y - 2F)\delta\bar{Y} + (\bar{X} + R_\Gamma\bar{Y} + i\lambda S_\Gamma\bar{Y} - 2\bar{F})\delta Y]\,d\Gamma -$$

$$- \int_{\Gamma_2} [\bar{X}(\delta Y + B_\Gamma\delta X - i\lambda P_\Gamma\delta X) + X(\delta\bar{Y} + B_\Gamma\delta\bar{X} + i\lambda P_\Gamma\delta\bar{X}) + \delta\bar{X}(Y + B_\Gamma X -$$

$$- i\lambda P_\Gamma X - 2E) + \delta X(\bar{Y} + B_\Gamma\bar{X} + i\lambda P_\Gamma\bar{X} - 2\bar{E})]\,d\Gamma\Big\}$$

Используем сопряженность по Лагранжу дифференциальных операторов D, D^* (2.1):

$$\int_\Omega D\delta x\bar{y}\,d\Omega = \int_\Omega \delta x D^*\bar{y}\,d\Omega - \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \delta X\bar{Y}\,d\Gamma,\quad \int_\Omega D\delta\bar{x}y\,d\Omega = \int_\Omega \delta\bar{x}D^* y\,d\Omega - \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \delta\bar{X}Y\,d\Gamma$$

$$\int_\Omega \bar{x}D^*\delta y\,d\Omega = \int_\Omega D\bar{x}\delta y\,d\Omega + \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \bar{X}\delta Y\,d\Gamma,\quad \int_\Omega xD^*\delta\bar{y}\,d\Omega = \int_\Omega Dx\delta\bar{y}\,d\Omega + \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} X\delta\bar{Y}\,d\Gamma$$

При этом слагаемые $\delta X\bar{Y} + \delta\bar{X}Y$ и интервалах по Γ_1 и $\bar{X}\delta Y + X\delta\bar{Y}$ – в интегралах по Γ_2 уничтожаются. Кроме того, применим самосопряженность алгебраических операторов R, B, R_Γ, B_Γ (2.2):

$$\int_\Omega R\delta y\bar{y}\,d\Omega = \int_\Omega R\bar{y}\delta y\,d\Omega,\quad \int_\Omega R\delta\bar{y}y\,d\Omega = \int_\Omega Ry\delta\bar{y}\,d\Omega,$$

$$\int_\Omega \overline{x}B\delta x d\Omega = \int_\Omega \delta x B\overline{x} d\Omega \int_\Omega xB\delta\overline{x} d\Omega = \int_\Omega \delta\overline{x}Bx d\Omega, \quad \int_{\Gamma_1} R_\Gamma \delta Y\overline{Y} d\Gamma =$$

$$= \int_{\Gamma_1} R_1\overline{Y}\delta Y d\Gamma, \quad \int_{\Gamma_1} R_\Gamma \delta\overline{Y} Y d\Gamma = \int_{\Gamma_1} R_\Gamma Y\delta\overline{Y} d\Gamma \int_{\Gamma_2} \overline{X}B_\Gamma \delta X d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \delta X B_\Gamma \overline{X} d\Gamma,$$

$$\int_{\Gamma_2} XB_\Gamma \delta\overline{X} d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \delta\overline{X} B_\Gamma X d\Gamma$$

Теперь заметим, что в выражениях искомых комплексных амплитуд x, y, $\overline{x}$, $\overline{y}$, X, Y, $\overline{X}$, $\overline{Y}$, представленных в компонентной форме через их вещественные амплитуды и фазы (для определенности выбраны векторы усилий и перемещений для поперечных колебаний стержня с учетом деформации сдвига и инерции вращения сечения [6], но все рассуждения полностью аналогичны и для других размерностей упругих тел):

$$x = X = (Q, M), \; x = \overline{X} = (\overline{Q}, \overline{M}), \; y = Y = (v, \vartheta), \; \overline{y} = \overline{Y} = (\overline{v}, \overline{\vartheta})$$

$$Q = Q_0 e^{-i\chi_Q}, \; \overline{Q} = Q_0 e^{i\chi_Q}, \; M = M_0 e^{-i\chi_M},$$

$$\overline{M} = M_0 e^{i\chi_M} v = v_0 e^{-i\chi_v}, \; \overline{v} = v_0 e^{i\chi_v}, \; \vartheta = \vartheta_0 e^{-i\chi_\vartheta}, \; \overline{\vartheta} = \vartheta_0 e^{i\chi_\vartheta}$$

где Q_0, M_0, v_0, ϑ_0, χ_Q, χ_M, χ_v, χ_ϑ – вещественные функции в Ω и на Γ; все фазовые углы χ_Q, χ_M, χ_v, χ_ϑ определяются только наличием диссипативного члена Δ. При $\Delta = 0$ выполняются тождества: $\chi_Q = \chi_M = \chi_v = \chi_\vartheta = 0$ в $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ и комплексные амплитуды становятся вещественными: $Q = \overline{Q} = Q_0$, $M = \overline{M} = M_0$, $v = \overline{v} = v_0$, $\vartheta = \overline{\vartheta} = \vartheta_0$.

Учитывая, что Δ — малый параметр (3.3), имеем

$$\max(\|\chi_Q\|, \|\chi_M\|, \|\chi_v\|, \|\chi_\vartheta\|) = O(\Delta) = o(\max(\|Q_0\|, \|M_0\|, \|v_0\|, \|\vartheta_0\|)) \quad (4.2)$$

Асимптотическое соотношение (4.2) между фазами и вещественными амплитудами компонент комплексных амплитуд векторов усилий и перемещений сохраняется и для их вариаций

$$\max(\|\delta\chi_Q\|, \|\delta\chi_M\|, \|\delta\chi_v\|, \|\delta\chi_\vartheta\|) = o(\max(\|\delta Q_0\|, \|\delta M_0\|, \|\delta v_0\|, \|\delta\vartheta_0\|)) \quad (4.3)$$

Вариации же самих комплексных амплитуд имеют вид

$$\delta x = (\delta Q, \delta M), \quad \delta\overline{x} = (\delta\overline{Q}, \delta\overline{M}), \quad \delta y + (\delta v, \delta\vartheta), \quad \delta\overline{y} = (\delta\overline{v}, \delta\overline{\vartheta})$$

$$\delta Q = (\delta Q_0 - iQ_0\delta\chi_Q)\, e^{-i\chi_Q}, \quad \delta\overline{Q} = (\delta Q_0 + iQ_0\delta\chi_Q)\, e^{i\chi_Q}$$

$$\delta M = (\delta M_0 - iM_0\delta\chi_M)\, e^{-i\chi_M}, \quad \delta\overline{M} = (\delta M_0 + iM_0\delta\chi_M)\, e^{i\chi_M}$$

$$\delta v = (\delta v_0 - iv_0\delta\chi_v)\, e^{-i\chi_v}, \quad \delta\overline{v} = (\delta v_0 + iv_0\delta\chi_v)\, e^{i\chi_v}$$

$$\delta\vartheta = (\delta\vartheta_0 - i\vartheta_0\delta\chi_\vartheta)\, e^{-i\chi_\vartheta}, \quad \delta\overline{\vartheta} = (\delta\vartheta_0 + i\vartheta_0\delta\chi_\vartheta)\, e^{i\chi_\vartheta}$$

Рассмотрим объемные интегралы на $\delta l(x, y)$, содержащие диссипативные операторы

$$S = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix}$$

где элементы матриц — скалярные функции, заданные в Ω:

$$\int_\Omega S\delta y\overline{y} d\Omega = \int_\Omega (s_{11}\delta v\overline{v} + s_{12}\delta\vartheta\overline{v} + s_{21}\delta v\overline{\vartheta} + s_{22}\delta\vartheta\overline{\vartheta})\, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega [s_{11}(\delta v_0 - iv_0\delta\chi_v)\, v_0 + s_{12}(\delta\vartheta_0 - i\vartheta_0\delta\chi_\vartheta)\, v_0 e^{i(\chi_v - \chi_\vartheta)} +$$

$$+ s_{21}(\delta v_0 - iv_0\delta\chi_v)\, \vartheta_0 e^{i(\chi_\vartheta - \chi_v)} + s_{22}(\delta\vartheta_0 - i\vartheta_0\delta\chi_\vartheta)\, \vartheta_0]\, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega (s_{11}\delta v_0 v_0 + s_{12}\delta\vartheta_0 v_0 + s_{21}\delta v_0\vartheta_0 + s_{22}\delta\vartheta_0\vartheta_0)\, d\Omega = \int_\Omega S y \delta\bar{y} d\Omega \tag{4.4}$$

$$\int_\Omega \bar{x} P \delta x d\Omega = \int_\Omega (\overline{Q}p_{11}\delta Q + \overline{Q}p_{12}\delta M + \overline{M}p_{21}\delta Q + \overline{M}p_{22}\delta M)\, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega [Q_0 p_{11} (\delta Q_0 - iQ_0\delta\chi_0) + Q_0 p_{12} (\delta M_0 - iM_0\delta\chi_M)\, e^{i(\chi_Q - \chi_M)} +$$

$$+ M_0 p_{21} (\delta Q_0 - iQ_0 \delta\chi_Q)\, e^{i(\chi_M - \chi_Q)} + M_0 p_{22} (\delta M_0 - iM_0\delta\chi_M)]\, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega (Q_0 p_{11}\delta Q_0 + Q_0 p_{12}\delta M_0 + M_0 p_{21}\delta Q_0 + M_0 p_{22}\delta M_0)\, d\Omega = \int_\Omega \delta\bar{x} P x d\Omega$$

$$\int_\Omega S\delta\bar{y} y d\Omega = \int_\Omega S\bar{y}\delta y d\Omega, \quad \int_\Omega x P \delta\bar{x} d\Omega = \int_\Omega \delta x P \bar{x} d\Omega$$

поскольку мнимые части подынтегральных выражений — величины более высокого порядка малости, чем их вещественные части, в силу (4.3).

Для поверхностных интегралов из $\delta l(x, y)$, содержащих диссипативные операторы, аналогично будем иметь

$$\int_{\Gamma_1} S_\Gamma \delta Y \overline{Y} d\Gamma = \int_{\Gamma_1} S_\Gamma Y \delta \overline{Y} d\Gamma, \quad \int_{\Gamma_2} X P_\Gamma \delta X d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \delta \overline{X} P_\Gamma X d\Gamma \tag{4.5}$$

$$\int_{\Gamma_1} S_\Gamma \delta \overline{Y} Y d\Gamma = \int_{\Gamma_1} S_\Gamma \overline{Y} \delta Y d\Gamma, \quad \int_{\Gamma_2} X P_\Gamma \delta \overline{X} d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \delta X P_\Gamma \overline{X} d\Gamma$$

Для доказательства (4.4), (4.5) используется лишь условие малости необратимых потерь энергии, равносильное исключению из рассмотрения механических систем с апериодически затухающими свободными процессами, что выполняется в практически важных случаях.

С учетом (4.4), (4.5) вариация функционала $\delta l(x, y)$ примет вид

$$\delta l (x, y) = \int_\Omega [(Dx - \lambda^2 Ry - i\lambda Sy - f)\, \delta\bar{y} + \delta\bar{x}\, (D^* y - Bx - i\lambda Px - e)]\, d\Omega +$$

$$+ \int_{\Gamma_1} (X + R_\Gamma Y - i\lambda S_\Gamma Y - F)\, \delta\overline{Y} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta\overline{X}\, (Y + B_\Gamma X - i\lambda P_\Gamma X - E)\, d\Gamma +$$

$$+ \int_\Omega [(D\bar{x} - \lambda^2 R\bar{y} + i\lambda S\bar{y} - \bar{f})\, \delta y + \delta x\, (D^*\bar{y} - B\bar{x} + i\lambda P\bar{x} - \bar{e})]\, d\Omega +$$

$$+ \int_{\Gamma_1} (\overline{X} + R_\Gamma\overline{Y} + i\lambda S_\Gamma \overline{Y} - \overline{F})\, \delta Y d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta X\, (\overline{Y} + B_\Gamma \overline{X} + i\lambda P_\Gamma \overline{X} - \overline{E})\, d\Gamma$$

Условие равенства этой вариации нулю приводит к вариационным условиям для основной и сопряженной диссипативных краевых задач теории упругих колебаний

$$\int_\Omega [(Dx - \lambda^2 Ry - i\lambda Sy - f)\, \delta\bar{y} + \delta\bar{x}\, (D^* y - Bx - i\lambda Px - e)]\, d\Omega + \tag{4.6}$$

$$+ \int_{\Gamma_1} (X + R_\Gamma Y - i\lambda S_\Gamma Y - F)\, \delta\overline{Y} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta\overline{X}\, (Y + B_\Gamma X - i\lambda P_\Gamma X - E)\, d\Gamma = 0$$

$$\int_\Omega [(D\bar{x} - \lambda^2 R\bar{y} + i\lambda S\bar{y} - \bar{f})\, \delta y + \delta x\, (D^*\bar{y} - B\bar{x} + i\lambda P\bar{x} - \bar{e})]\, d\Omega + \tag{4.7}$$

$$+ \int_{\Gamma_1} (\overline{X} + R_\Gamma\overline{Y} + i\lambda S_\Gamma \overline{Y} - \overline{F})\, \delta Y d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta X\, (\overline{Y} + B_\Gamma \overline{X} + i\lambda P_\Gamma \overline{X} - \overline{E})\, d\Gamma = 0$$

Вариационное условие (4.6) эквивалентно основной краевой задаче (1.1), (1.2), а (4.7) — сопряженной (3.1), (3.2).

Действительно, очевидно, что (4.6) следует из (1.1), (1.2), а (4.7) — из (3.1), (3.2). В силу независимости и произвольности вариаций δx, δy, а следовательно, и $\delta\bar{x}$, $\delta\bar{y}$ в Ω, δX, δY, а следовательно, и $\delta\bar{X}$, $\delta\bar{Y}$ на Γ, справедливо и обратное утверждение: (1.1), (1.2) и (3.1), (3.2) вытекают из соответствующих условий стационарности (4.6) и (4.7). Для доказательства этого, полагая сначала в (4.6), (4.7) $\delta X = \delta\bar{X} = 0$ на Γ_2, $\delta Y = \delta\bar{Y} = 0$ на Γ_1, из этих равенств получаем

$$\int_\Omega [(Dx - \lambda^2 Ry - i\lambda Sy - f)\,\delta\bar{y} + \delta\bar{x}\,(D^*y - Bx - i\lambda Px - e)]\,d\Omega = 0$$

$$\int_\Omega [(D\bar{x} - \lambda^2 R\bar{y} + i\lambda S\bar{y} - \bar{f})\,\delta y + \delta x\,(D^*\bar{y} - B\bar{x} + i\lambda P\bar{x} - \bar{e})]\,d\Omega = 0$$

что дает, в силу независимости вариаций δx, δy, $\delta\bar{x}$, $\delta\bar{y}$ и их произвольности в Ω уравнения (1.1) и (3.1). Полагая затем в (4.6), (4.7) $\delta x = \delta\bar{x} = 0$, $\delta y = \delta\bar{y} = 0$ в Ω, из этих вариационных условий имеем

$$\int_{\Gamma_1} (X + R_\Gamma Y - i\lambda S_\Gamma Y - F)\,\delta\bar{Y}d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta\bar{X}\,(Y + B_\Gamma X - i\lambda P_\Gamma X - E)\,d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_1} (\bar{X} + R_\Gamma\bar{Y} + i\lambda S_\Gamma\bar{Y} - \bar{F})\,\delta Y d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta X\,(\bar{Y} + B_\Gamma\bar{X} + i\lambda P_\Gamma\bar{X} - \bar{E})\,d\Gamma = 0$$

откуда из независимости δX, δY, $\delta\bar{X}$, $\delta\bar{Y}$ и произвольности δX, $\delta\bar{X}$ на Γ_2; δY, $\delta\bar{Y}$ – на Γ_1 следуют граничные условия (1.2) и (3.2). Вариационный принцип доказан.

5. Проекционные условия Бубнова — Галеркина для диссипативной краевой задачи теории упругих колебаний как следствия вариационных условий. Полученные вариационные условия (4.6), (4.7) дают способ построения приближенного решения диссипативных краевых задач теории упругих колебаний. Выбираются две последовательности линейно-независимых, в общем случае комплексных, базисных векторных функций x_i, y_i $(i = 1, 2,...)$, дифференцируемых в $\bar{\Omega}$. Выбранные последовательности базисных функций должны быть полными в том смысле, что для аппроксимаций искомых комплексных амплитуд усилий и перемещений x, y могут быть использованы приближенные представления

$$x = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i x_i,\quad y = \sum_{i=1}^{I} \beta_i y_i,\quad i = (\overline{1, I}) \tag{5.1}$$

$$X = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i X_i,\quad Y = \sum_{i=1}^{I} \beta_i Y_i$$

где α_i, β_i — неизвестные комплексные коэффициенты, число которых конечно. Тогда

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{I} \bar{\alpha}_i\bar{x}_i,\quad \bar{y} = \sum_{i=1}^{I} \bar{\beta}_i\bar{y}_i \tag{5.2}$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{I} \bar{\alpha}_i\bar{X}_i,\quad \bar{Y} = \sum_{i=1}^{I} \bar{\beta}_i\bar{Y}_i$$

а вариации (5.2) имеют вид

$$\delta\bar{x} = \sum_{i=1}^{I} \delta\bar{\alpha}_i\bar{x}_i,\quad \delta\bar{y} = \sum_{i=1}^{I} \delta\bar{\beta}_i\bar{y}_i \tag{5.3}$$

$$\delta\bar{X} = \sum_{i=1}^{I} \delta\bar{\alpha}_i\bar{X}_i,\quad \delta\bar{Y} = \sum_{i=1}^{I} \delta\bar{\beta}_i\bar{Y}_i$$

Подставим (5.3) в вариационное условие (4.6):

$$\sum_{i=1}^{I}\left\{\left[\int_{\Omega}(Dx-\lambda^2Ry-i\lambda Sy-f)\,\overline{y}_i d\Omega+\int_{\Gamma_1}(X+R_\Gamma Y-i\lambda S_\Gamma Y-F)\,\overline{Y}_i d\Gamma\right]\delta\overline{\beta}_i+\right.$$

$$\left.+\,\delta\overline{\alpha}_i\left[\int_{\Omega}\overline{x}_i\,(D^*y-Bx-i\lambda Px-e)\,d\Omega-\int_{\Gamma_2}\overline{X}_i\,(Y+B_\Gamma X-i\lambda P_\Gamma X-E)\,d\Gamma\right]\right\}=0$$

В силу независимости и произвольности вариаций $\delta\overline{\alpha}_i$, $\delta\overline{\beta}_i$ справедлива система уравнений

$$\int_{\Omega}(Dx-\lambda^2Ry-i\lambda Sy-f)\,\overline{y}_i d\Omega+\int_{\Gamma_1}(X+R_\Gamma Y-i\lambda S_\Gamma Y-F)\,\overline{Y}_i d\Gamma=0 \tag{5.4}$$

$$\int_{\Omega}\overline{x}_i\,(D^*y-Bx-i\lambda Px-e)\,d\Omega-\int_{\Gamma_2}\overline{X}_i\,(Y+B_\Gamma X-i\lambda P_\Gamma X-E)\,d\Gamma=0\ \ (i=\overline{1,I})$$

Уравнения (5.4), полученные как следствия вариационного условия (4.6), есть проекционные условия Бубнова — Галеркина на случай диссипативных краевых задач теории упругих колебаний со сложными смешанными неоднородными граничными условиями. Отличие их от соответствующих проекционных условий для недиссипативной краевой задачи, представленных в [6], заключается в том, что проектирование уравнений и естественных граничных условий осуществляется на комплексно-сопряженные координатные функции. Проекции уравнений и граничных условий входят слагаемыми в единые уравнения (5.4). Вариационный способ их получения определяет правильную постановку знаков между этими слагаемыми, а именно (+) — в первом проекционном уравнении и (–) — во втором.

6. Прямой метод решения диссипативной краевой задачи теории упругих колебаний. Представляя в проекционных условиях (5.4) x, y и X, Y в виде отрезков рядов (5.1) и меняя порядок интегрирования и суммирования, приходим к комплексной системе линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов аппроксимации α_i, β_i, $(i=\overline{1,I})$:

$$\sum_{j=1}^{I}\left[(D_{ji}+\Gamma_{1_{ji}})\,\alpha_j-(\lambda^2R_{ji}+i\lambda S_{ji}-R_{\Gamma_{ji}}+i\lambda S_{\Gamma_{ji}})\,\beta_j\right]=f_i+F_i \tag{6.1}$$

$$\sum_{j=1}^{I}\left[-(B_{ij}+i\lambda P_{ij}+B_{\Gamma_{ij}}-i\lambda P_{\Gamma_{ij}})\,\alpha_j+(D^*_{ij}-\Gamma_{2_{ij}})\,\beta_j\right]=e_i-E_i$$

$$D_{ji}=\int_{\Omega}Dx_j\overline{y}_i d\Omega,\quad D^*_{ij}=\int_{\Omega}\overline{x}_iD^*y_j d\Omega,\quad \Gamma_{1_{ji}}=\int_{\Gamma_1}X_j\overline{Y}_i d\Gamma,\quad \Gamma_{2_{ij}}=\int_{\Gamma_2}\overline{X}_iY_j d\Gamma$$

$$R_{ji}=\int_{\Omega}Ry_j\overline{y}_i d\Omega,\quad B_{ij}=\int_{\Omega}\overline{x}_iBx_j d\Omega,\quad R_{\Gamma_{ji}}=\int_{\Gamma_1}R_\Gamma Y_j\overline{Y}_i d\Gamma,\quad B_{\Gamma_{ij}}=\int_{\Gamma_2}\overline{X}_iB_\Gamma X_j d\Gamma$$

$$S_{ji}=\int_{\Omega}Sy_j\overline{y}_i d\Omega,\quad P_{ij}=\int_{\Omega}\overline{x}_iPx_j d\Omega,\quad S_{\Gamma_{ji}}=\int_{\Gamma_1}S_\Gamma Y_j\overline{Y}_i d\Gamma,\quad P_{\Gamma_{ij}}=\int_{\Gamma_2}\overline{X}_iP_\Gamma X_j d\Gamma$$

$$f_i=\int_{\Omega}f\overline{y}_i d\Omega,\quad e_i=\int_{\Omega}\overline{x}_ie\,d\Omega,\quad F_i=\int_{\Gamma_1}F\overline{Y}_i d\Gamma,\quad E_i=\int_{\Gamma_2}\overline{X}_iE\,d\Gamma$$

Решив систему (6.1) на основании (5.1), находим комплексные амплитуды x, y. В качестве базисных функций x_i, y_i $(i=\overline{1,I})$ наиболее удобно использовать собственные функции однородной краевой задачи, соответствующей исходной (1.1), (1.2), с нулевыми диссипативными операторами $\Delta=0$, являющиеся собственными формами колебаний механической системы без рассеяния энергии. Они находятся как решения однородной краевой задачи

$$Dx_i - \lambda_i^2 R y_i = 0, \quad D^* y_i - Bx_i = 0 \text{ в } \Omega \tag{6.2}$$

$$X_i = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad Y_i = 0 \text{ на } \Gamma_2, \quad \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma \tag{6.3}$$

В этом случае базисные функции — вещественные и удовлетворяют условию ортонормированности

$$\int\limits_{\Omega} R y_i y_j d\Omega = \delta_{ij}, \quad \int\limits_{\Omega} x_i B x_j d\Omega = \lambda_i^2 \delta_{ij} \tag{6.4}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, λ_i — собственные частоты колебаний.

Значения ряда коэффициентов в (6.1) при этом упрощаются: $D_{ji} = D^*_{ij} = B_{ij} = \lambda_i^2 \delta_{ij}$, $\Gamma_{1_{ji}} = \Gamma_{2_{ij}} = 0$, $R_{ji} = \delta_{ij}$, $S_{ji} = s_i \delta_{ij}$, $P_{ij} = p_i \delta_{ij}$. Тогда при нулевых операторах динамических жесткостей, податливостей прилегающей к Ω среды на границе Γ и конструкционного демпфирования, т. е. при выполнении условия

$$R_\Gamma = 0, \quad S_\Gamma = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad B_\Gamma = 0, \quad P_\Gamma = 0 \text{ на } \Gamma_2 \tag{6.5}$$

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$$

матрица системы (6.1) становится диагональной, и система уравнений распадается на I независимых пар уравнений для определения комплексных коэффициентов α_i, β_i:

$$\lambda_i^2 \alpha_i - (\lambda^2 + i\lambda s_i) \beta_i = f_i + F_i \quad (i = \overline{1, I})$$

$$-(\lambda_i^2 + i\lambda p_i) \alpha_i + \lambda_i^2 \beta_i = e_i - E_i$$

Помимо упрощения результирующей системы уравнений, выбором вещественных собственных форм колебаний консервативной механической системы в качестве базисных функций достигается и другое важное преимущество. Вся информация о фазовых сдвигах компонент векторов усилий и перемещений, обусловленных диссипацией, содержится только в комплексных коэффициентах α_i, β_i аппроксимаций (5.1). Это значительно упрощает вычисление вещественных и мнимых частей интересующих компонент искомых векторов x, y:

$$\begin{matrix}\mathrm{Re}\\\mathrm{Im}\end{matrix}(x) = \sum_{i=1}^{I} \begin{matrix}\mathrm{Re}\\\mathrm{Im}\end{matrix}(\alpha_i)\, x_i, \quad \begin{matrix}\mathrm{Re}\\\mathrm{Im}\end{matrix}(y) = \sum_{i=1}^{I} \begin{matrix}\mathrm{Re}\\\mathrm{Im}\end{matrix}(\beta_i)\, y_i$$

для дальнейшего определения их амплитуд и фаз.

При невыполнении условия (6.5), т. е. при сложных неоднородных исходных граничных условиях, с целью улучшения сходимости функциональных рядов вблизи граничных точек указанная система базисных функций дополняется ограниченным числом J собственных функций $x_j^\vee$, $y_j^\vee$ $(j = \overline{1, J})$ однородной краевой задачи, состоящей из уравнения (6.2) и граничного условия [7—11]: $Y_j^\vee = 0$ на Γ_1, $X_j^\vee = 0$ на Γ_2, $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$. И, наконец, в случае сложной формы области Ω, препятствующей простому и точному нахождению собственных функций, используются решения однородных краевых задач (6.2), (6.3) для более простой области $\Omega°$, включающей в себя исходную, с дополнением этой системы базисных функций ограниченным числом J функций $x_j^\vee$, $y_j^\vee$ $(j = \overline{1, J})$, разрывных на границах исходной области [12]:

$$x_j^\vee = \begin{bmatrix} 0, & \Omega \\ x_j, & \Omega° - \Omega \end{bmatrix}, \quad y_j^\vee = \begin{cases} 0, & \Omega \\ y_j, & \Omega° - \Omega \end{cases}$$

В этих обоих случаях задача сводится к системе $2J$ линейных алгебраических уравнений относительно небольшого числа $2J$ дополнительных коэффициентов аппроксимации a_j, b_j $(j = \overline{1, J})$ независимо от числа $2I$ основных коэффициентов

a_i, β_i $(i=\overline{1,I})$. Основные же коэффициенты α_i, β_i выражаются через дополнительные a_j, b_j $(j=\overline{1,J})$ линейным образом [7—12]. Отметим, что число координатных функций x_j^ν и y_j^ν, как и соответствующих коэффициентов a_j и b_j, в этих дополнительных аппроксимациях усилий и перемещений не обязательно должно быть одинаково и определяется числом граничных условий, которые должны быть удовлетворены посредством их.

7. Пример (вынужденные колебания вязкоупругого цилиндра). Рассмотрим плоские осесимметричные колебания вязкоупругого цилиндра радиуса r_0 под действием переменного давления амплитуды F на его внешней поверхности. Краевая задача имеет вид:

$$Dx - \lambda^2 Ry = 0,\quad D^* y - (1 + i\Delta)\, Bx = 0 \quad \text{в} \quad \Omega = \{0 \le \rho^\circ \le 1\} \tag{7.1}$$

$$X = F \quad \text{на} \quad \Gamma = \{\rho^\circ = 1\},\quad R = \rho \tag{7.2}$$

$$x = (\sigma_r, \sigma_\theta),\quad y = u,\quad X = \sigma_r,\quad Y = u$$

$$D = \frac{1}{r_0}\left(\frac{d}{d\rho^\circ} - \frac{1}{\rho^\circ}, \frac{1}{\rho^\circ}\right)$$

$$D^* = \frac{1}{r_0}\begin{Vmatrix} \dfrac{d}{d\rho^\circ} \\ \dfrac{1}{\rho^\circ} \end{Vmatrix};\quad B = \frac{1-\nu^2}{E}\begin{Vmatrix} 1, & -\dfrac{\nu}{1-\nu} \\ -\dfrac{\nu}{1-\nu}, & 1 \end{Vmatrix}$$

где $\rho^\circ = r/r_0$ — безразмерная радиальная координата, Δ — коэффициент внутреннего трения материала, ρ — его плотность, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона; σ_r, σ_θ — нормальные напряжения, u — радиальное смещение.

Используемые базисные функции x_i, y_i являются собственными функциями однородной краевой задачи $Dx_i - \lambda_i^2 Ry_i = 0$, $D^* y_i - Bx_i = 0$ в Ω, $X_i = 0$ на Γ и представляют формы свободных колебаний цилиндра без рассеяния механической энергии ($\Delta = 0$). Соответствующие им собственные частоты колебаний λ_i даются соотношением[1]

$$\lambda_i / c = \delta_i / r_0 \tag{7.3}$$

где c — скорость распространения дилатационных упругих волн, δ_i — корни трансцендентного уравнения частот

$$J_1'(\delta) + \frac{\nu}{(1-\nu)}\frac{J_1(\delta)}{\delta} = 0 \tag{7.4}$$

Решение (7.1), (7.2) строится в виде

$$x = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i x_i,\quad y = \sum_{i=1}^{I} \beta_i y_i \tag{7.5}$$

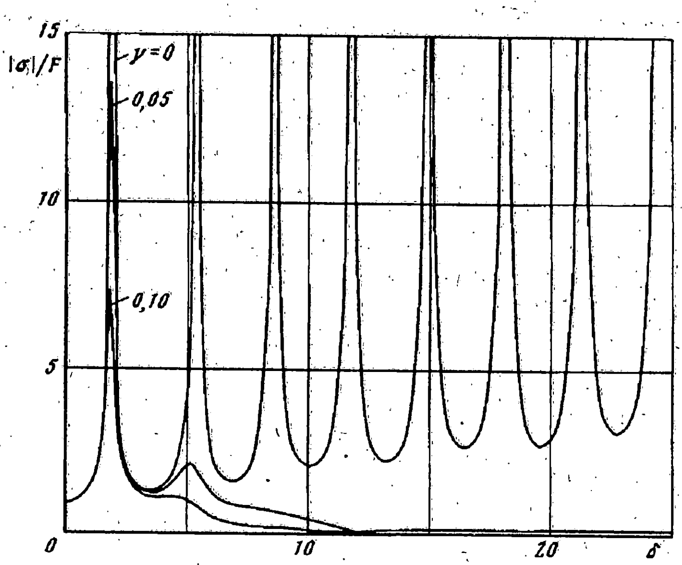
Для определения искомых коэффициентов аппроксимации α_i, β_i используются проекционные условия (5.4):

$$\int_\Omega (Dx - \lambda^2 Ry)\, y_i d\Omega + \int_\Gamma (X - F)\, Y_i d\Gamma = 0$$

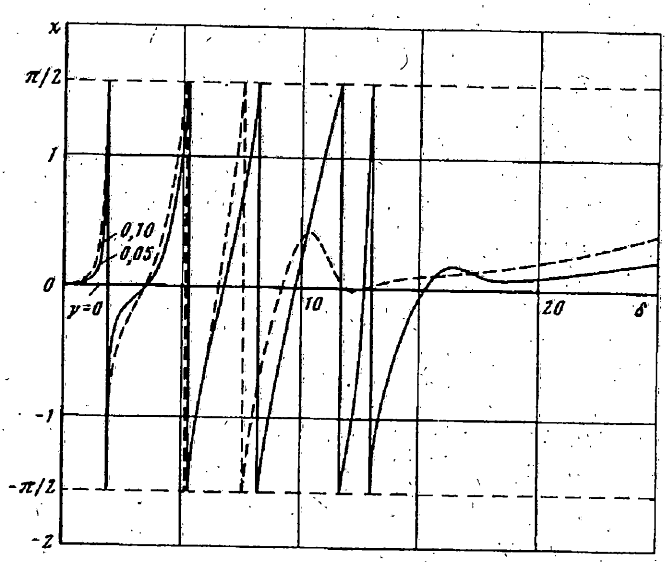
$$\int_\Omega x_i\, [D^* y - (1 + i\Delta)\, Bx]\, d\Omega = 0 \quad (i + \overline{1, I}) (7.6)$$

При подстановке в (7.6) аппроксимирующих рядов (7.5) с учетом свойств

[1] См. *Свияженинов Е. Д.* Спектры плоских осесимметричных колебаний кругового упругого тела. Л., 1984. 10 с. — Деп. в ВИНИТИ 1.08.84, № 5596—84.



Фиг. 1.



Фиг. 2

операторов (2.1), (2.2) и ортонормированности собственных форм (6.4) получаем систему двух линейных алгебраических уравнений

$$\lambda_i^2\alpha_i - \lambda^2\beta_i = F_i, \quad \lambda_i^2\beta_i - (1 + i\Delta)\,\lambda_i^2\alpha_i = 0 \quad (i = \overline{1, I})$$

$$F_i = \int\limits_{\Gamma} FY_i d\Gamma \qquad (7.7)$$

относительно каждой пары коэффициентов α_i, β_i. Из (7.7) следует

$$\alpha_i = F_i/(\lambda_i^2 - (1 + i\Delta)\,\lambda^2), \quad \beta_i = (1 + i\Delta)\,\alpha_i \qquad (7.8)$$

и по (7.5) находим комплексные амплитуды напряжений и перемещений вязкоупругого цилиндра.

Учет диссипации механической энергии определяется конкретным видом коэффициента внутреннего трения Δ. Принятие различных реологических моделей приводит к различному виду функциональной зависимости Δ от частоты колебаний λ. Остановимся на модели Фойхта [13], согласно которой потери энергии на внутреннее трение в материале пропорциональны частоте

$$\Delta = c_\lambda \lambda = \gamma\delta, \quad \delta = (r_0/c)\,\lambda, \quad c_\lambda = \gamma r_0/c \tag{7.9}$$

где δ — безразмерная частота колебаний, γ — безразмерный коэффициент пропорциональности, определяемый вязкоупругими свойствами материала; c_λ — размерный коэффициент пропорциональности.

Для ряда значений безразмерного диссипативного параметра $\gamma = 0$; 0,05; 0,10 построены амплитуда $|\sigma|/F = [\mathrm{Re}^2(\sigma) + \mathrm{Im}^2(\sigma)]/F$ (фиг. 1) и фаза $\chi = \operatorname{arctg}[\mathrm{Im}(\sigma)/\mathrm{Re}(\sigma)]$ (фиг. 2) нормального напряжения $\sigma = \sigma_r = \sigma_\theta$ на оси цилиндра как функции безразмерной частоты δ. При отсутствии диссипации, $\gamma = 0$, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) имеет неограниченно возрастающие резонансные пики в местах расположения собственных частот колебаний (7.3), (7.4); кроме того, наблюдается общее возрастание амплитуд колебаний с увеличением частоты. Фазочастотная характеристика (ФЧХ) при этом является разрывной функцией, равной нулю вне резонансов и скачком принимающей в них значения $\pm\pi/2$. Наличие диссипации, $\gamma \neq 0$ приводит не только к количественному, но и к качественному изменению частотных характеристик. Прежде всего, на высоких частотах учет даже малого рассеяния принципиально необходим: вместо общего нарастания амплитуд колебаний, имеющих резонансный характер, происходит установление их на незначительном постоянном уровне без резонансных пиков. На низких частотах учет рассеяния механической энергии существен в околорезонансных областях, приводя к ограничению там амплитуд колебаний, в тем большей степени, чем выше частота. Таким образом, при моделировании резонансных процессов механической системы введение ее диссипативных характеристик играет такую же первостепенную роль, как и упругоинерционных. В противном случае становится неясным, какой именно резонанс обеспечивает наибольшее усиление колебаний. АЧХ дает важный практический вывод: реально, с учетом диссипации, максимальное усиление колебаний в данной системе происходит именно на основном (низшем) резонансе. ФЧХ с учетом рассеяния становится непрерывно меняющейся вне резонансных частот функцией, принимающей на них те же значения $\pm\pi/2$, что и без потерь энергии, т. е. происходит сглаживание околорезонансных скачков ФЧХ. Точки экстремумов АЧХ и соответственно разрывов ФЧХ, отвечающие резонансным частотам, с увеличением диссипации смещаются по частотной оси влево.

Следует отметить весьма высокую скорость сходимости результирующих функциональных рядов (7.5). Число резонансных областей на частотных характеристиках недиссипативных систем, $\Delta = 0$, совпадает с числом I удерживаемых базисных функций x_i, y_i ($i = \overline{1, I}$), поэтому выбор длины отрезков аппроксимирующих рядов определяется верхней границей исследуемого диапазона частот. Учет же рассеяния энергии, $\Delta \neq 0$, приводит к качественным изменениям частотных характеристик, «забивая» все высокочастотные резонансные области. Поэтому выбор числа удерживаемых базисных функций I для моделирования колебаний диссипативной системы определяется не только верхней границей интересующего диапазона частот, но и величиной диссипации Δ: чем выше рассеяние механической энергии колебательной системы, тем меньшее число координатных функций необходимо для ее адекватного описания в определенном частотном диапазоне. Так, в рассмотренном примере для моделирования гармонических колебаний в интервале безразмерных частот $0 \leq \delta \leq 30$ при $\gamma = 0$ требуется 10 координатных функций, тогда как при $\gamma = 0{,}05$—5, а при $\gamma = 0{,}10$ — только 3. Особенно отчетливо количество резонансов диссипативной системы проявляется на ФЧХ посредством числа точек разрывов: в рассмотренном примере в интервале частот $0 \leq \delta \leq 30$ при $\gamma = 0$ ФЧХ $\chi(\delta)$ терпит 10 точек устранимого разрыва на резонансах ($\chi \equiv 0$ вне резонансов, $\chi = \pm\pi/2$ – на них), тогда как при $\gamma = 0{,}05$—5 точек разрывов первого рода ($\chi \not\equiv 0$ вне резонансов, $\chi = \pm\pi/2$ – на них), а при $\gamma = 0{,}10$ — только 3.

Из (7.8) непосредственно следует, что точки экстремумов АЧХ и разрывов ФЧХ δ_i^* даются выражением: $\delta_i^* = \delta_i/(1 + \Delta^2)^{1/2}$, где δ_i — безразмерные собственные частоты соответствующей недиссипативной системы (7.3). И на АЧ, и на ФЧХ видно прогрессирующее смещение резонансных точек δ_i^* влево с ростом диссипации (7.9) $\Delta = \gamma\delta$ в системе.

Метод позволяет эффективно моделировать диссипативные механические колебания во всем частотном диапазоне, включающем околорезонансные и высокочастотные области, где значительны процессы рассеяния энергии. В остальных областях частот, где диссипация проявляется слабо, результаты расчетов оказываются близкими к соответствующим результатам без учета рассеяния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
2. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. *Herrmann G.* Stability of equilibrium of elastic systems subjected to nonconservative forces//Appl. Mech. Rev. 1967. V. 20. No. 2. P. 103—108.
4. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
5. *Розин Л. А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: ЛГУ, 1978. 224 с.
6. *Фридман В. М., Чернина В. С.* Видоизменение метода Бубнова — Галеркина — Ритца, связанное со смешанным вариационным принципом в теории упругости//Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 1. С. 64—78.
7. *Богданов Б. А., Фридман В. М., Штукин Л. В.* Об одном методе решения задачи о колебаниях упругого тела при сложных граничных условиях//Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 111—119.
8. *Гусева Н. С., Привалова О. В., Фридман В. М.* Спектральный метод решения задачи о колебаниях упругого тела при смешанных граничных условиях//Механика и процессы управления. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 425. 1988. С. 39—44.
9. *Будникова Т. В., Свияженинов Е. Д., Фридман В. М.* Неосесимметричные колебания цилиндрической оболочки со сложными условиями опирания//Механика и процессы управления. Вариационные методы в механике. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. С. 34—40.
10. *Будникова Т. В., Свияженинов Е. Д., Фридман В. М.* Неосесимметричные колебания конической оболочки со сложными условиями опирания//Механика и процессы управления. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 425. 1988. С. 51—55.
11. *Будникова Т. В., Свияженинов Е. Д., Фридман В. М.* Неосесимметричные колебания вязкоупругой оболочки со сложными условиями опирания//Механика и процессы управления. Тр. Ленингр. гос. техн. ун-та, № 438. 1991. С. 44—47.
12. *Свияжининов Е. Д., Фридман В. М.* Спектральный метод решения задачи о колебаниях упругого тела сложной геометрической формы с использованием фиктивных областей//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 74—80.
13. *Свияженинов Е. Д.* Спектры плоских осесимметричных колебаний кругового упругого тела. Л., 1984. 10 с.—Деп. в ВИНИТИ 1.08.84, № 5596—84.
14. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
16.X.1992