

УДК 539.3

© 1994 г. Л. С. РЫБАКОВ

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ УПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ
РЕГУЛЯРНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ШПАНГОУТАМИ
НЕОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

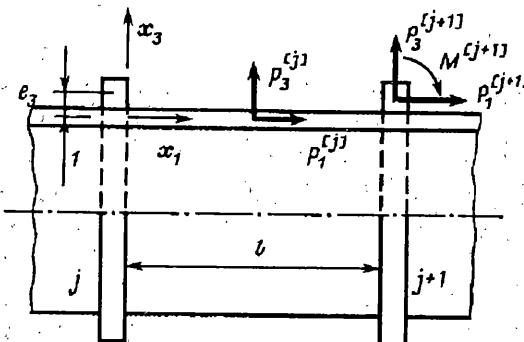
В основу аналитических исследований [1—6] и других деформированных ребристых пластин и оболочек была положена концепция сингулярно неоднородного тела, позволившая изучавшиеся там задачи свести к проблеме решения дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от δ — функции и ее производных.

В настоящей статье задача об осесимметричном упругом деформировании неограниченной круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной регулярно шпангоутами, с помощью метода «склейки» сведена к неограниченной системе разностных уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами. В случае бесконечной оболочки эта система бесконечна, и ее точное аналитическое решение построено с помощью преобразования Лорана. Отдельно получено и дискретно периодическое решение такой системы. Точное аналитическое решение полубесконечной системы разностных уравнений, отвечающей полубесконечной оболочке, найдено посредством преобразования Тейлора путем сведения ее к системе краевых задач Римана — Гильберта с матричным коэффициентом. Использование теории функций матрицы позволило указать эффективный способ решения таких краевых задач, а также выделить во всех построенных решениях дискретную функциональную зависимость в скалярной форме.

1. Постановка задачи. Рассмотрим неограниченную упругую круговую цилиндрическую оболочку постоянной толщины, подкрепленную эксцентрично относительно ее срединной поверхности одинаковыми круговыми упругими шпангоутами, расположеными с постоянным шагом. Внешняя нагрузка, действующая на подкрепленную оболочку, осесимметрична и представлена внешними нагрузками шпангоутов и самой оболочки. Фрагмент подкрепленной оболочки с двумя смежными шпангоутами j и $j+1$ показан схематично на фиг. 1. В случае бесконечной оболочки $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а в случае полубесконечной оболочки $j = 0, 1, 2, \dots$, причем крайний шпангоут последней (с номером $j=0$) может отличаться от внутренних.

Сущность упругой системы, моделирующей поведение подкрепленной оболочки, вытекает из следующих допущений: деформирование самой оболочки описывается классической линейной теорией тонких упругих оболочек, базирующейся на гипотезе Кирхгофа — Лява; шпангоуты имитируются линейно деформируемыми круговыми упругими линиями, наделенными заданными жесткостями на растяжение — сжатие и кручение, и взаимодействуют с оболочкой континуально по линиям пересечения ее срединной поверхности с плоскостями этих упругих линий.

При анализе деформирования подкрепленной оболочки воспользуемся методом склейки в версии, изложенной в [7, 8]. В соответствии с этим методом расчленим подкрепленную оболочку на элементы — шпангоуты и расположенные между ними отсеки оболочки, к которым помимо заданных внешних сил приложим еще силы их взаимодействия с соседними элементами. Тогда анализ деформирования подкрепленной оболочки сводится к упругому анализу ее изо-



Фиг.1

лированных элементов и формулированию геометрических условий их сопряжения.

С целью безразмерной формы изложения примем за основные размерные параметры радиус R срединной поверхности оболочки и ее модуль Юнга E . Тангенциальная B и цилиндрическая D жесткости оболочки связаны с этими величинами соотношениями $B = EhR/(1 - \mu^2)$, $D = BR^2/c$, где μ и h — коэффициент Пуассона и безразмерная (отнесенная к R) толщина оболочки, а $c = 12/h^2$. Все другие величины будем считать безразмерными. Величины с линейной размерностью обозначаются путем деления на R . Правила образования других безразмерных величин оговариваются ниже.

Введем обозначения: l — шаг шпангоутов (длина отсеков оболочки); $x_1 \in [0, l]$ — продольная, x_3 — нормальная локальные координаты в срединной поверхности отсека оболочки (см. фиг. 1); $u_m^U(x_1)$ — смещения вдоль осей x_m ($m = 1, 3$) точек срединной поверхности расположенного между шпангоутами j и $(j+1)$ отсека j оболочки; $n_\alpha^U(x_1)$, $m_\alpha^U(x_1)$ и $n_3^U(x_1)$ — погонные тангенциальные усилия, изгибающие моменты и перерезывающая сила в отсеке j оболочки (отнесены соответственно к B , D/R , D/R^2 ; $\alpha = 1, 2$); $p_1^U(x_1)$, $p_3^U(x_1)$ — отнесенные к B/R и D/R^3 внешние поверхностные силы, действующие на отсек j оболочки в направлении осей x_1 и x_3 ; $4\beta^4 = (1 - \mu^2)/c$; e_3 — удаленность упругих линий внутренних шпангоутов от срединной поверхности оболочки; κ и η — отнесенные к $\beta^3 D/R^3$ и $\beta D/R$ жесткости этих линий на растяжение — сжатие и выкручивание; U_j^U и Θ_j^U — смещения вдоль осей x_m ($m = 1, 3$) и угол выкручивания упругой линии шпангоута j ; P_1^U , P_3^U и M^U — отнесенные соответственно к B , $\beta^3 D/R^2$ и $\beta^2 D/R$ равномерно распределенные внешние силы и выкручивающий момент, приложенные к шпангоуту j (см. фиг. 1).

Поэлементный упругий анализ подкрепленной оболочки [8] приводит к уравнениям

$$u_1^{U'} = n_1^U - \mu u_3^U, \quad u_3^{U''} + 4\beta^4 u_3^U = p_3^U - \mu c n_1^U \quad (1.1)$$

$$n_1^{U'} = -p_1^U, \quad n_2^U = (1 - \mu^2) u_3^U + \mu n_1^U$$

$$m_1^U = -u_3^{U''}, \quad m_2^U = \mu m_1^U, \quad n_3^U = -u_3^{U'''}$$

описывающих деформирование отсека j оболочки, к уравнениям равновесия

$$(1 + e_3) P_1^U + n_1^U(0) - n_1^{U-1}(l) = 0 \quad (1.2)$$

$$\beta(1 + e_3)(\beta M^U - \eta \Theta^U) - ce_3[n_1^U(0) - n_1^{U-1}(l)] + m_1^U(0) - m_1^{U-1}(l) = 0$$

$$\beta^3(1 + e_3)(P_3^U - \kappa U_3^U) + n_3^U(0) - n_3^{U-1}(l) = 0$$

шпангоута j и к геометрическим условиям сопряжения

$$U_1^{[l]} - e_3 \Theta^{[l]} = u_1^{[l]}(0) = u_1^{[l-1]}(l) \quad (1.3)$$

$$U_3^{[l]} = u_3^{[l]}(0) = u_3^{[l-1]}(l), \quad \Theta^{[l]} = -u_3^{[l]}(0) = -u_3^{[l-1]}(l)$$

смежных элементов подкрепленной оболочки. Все эти уравнения справедливы при $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ для бесконечной оболочки и при $j = 1, 2, \dots$ для полубесконечной оболочки. В последнем случае их следует дополнить уравнениями равновесия крайнего ($j = 0$) шпангоута

$$(1 + e_{30}) P_1^{[0]} + n_1^{[0]}(0) = 0 \quad (1.4)$$

$$\beta(1 + e_{30})(\beta M^{[0]} - \eta_0 \Theta^{[0]}) - ce_{30}n_1^{[0]}(0) + m_1^{[0]}(0) = 0$$

$$\beta^3(1 + e_{30})(P_3^{[0]} - \kappa_0 U_3^{[0]}) + n_3^{[0]}(0) = 0$$

где e_{30}, κ_0, η_0 имеют тот же смысл, что и e_3, κ, η , но для крайнего шпангоута, а также геометрическими условиями сопряжения $U_1^{[0]} - e_{30}\Theta^{[0]} = u_1^{[0]}(0)$, $U_3^{[0]} = u_3^{[0]}(0)$.

С помощью вектора-столбца $\mathbf{y}^{[l]}(x)$ с компонентами

$$y_1^{[l]}(x) = \beta u_1^{[l]}(x_1), \quad y_2^{[l]}(x) = n_1^{[l]}(x_1) \quad (1.5)$$

$$y_m^{[l]}(x) = \beta^{3-m} d^{m-3} u_3^{[l]}(x_1) / dx_1^{m-3} \quad (m = 3, 4, 5, 6)$$

где $x = \beta x_1$, и его начального значения $\mathbf{Y}^{[l]} = \mathbf{y}^{[l]}(0)$ общее решение системы первых трех уравнений (1.1) представимо в виде

$$\mathbf{y}^{[l]}(x) = \mathbf{g}(x) \mathbf{Y}^{[l]} + \mathbf{f}^{[l]}(x) \quad (1.6)$$

Здесь $\mathbf{g}(x)$ — матрица 6×6 , отличные от нуля элементы которой выражаются через функции Крылова $k_m(x) = k_4^{(4-m)}(x) = d^{4-m}k_4(x)/dx^{4-m}$ ($m = 1, 2, 3$), $k_4(x) = 1/4(\text{ch } x \sin x - \text{sh } x \cos x)$ формулами (здесь и далее δ_{mn} — символ Кронекера):

$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = [x - \mu^2 k_2(x)]/(1 - \mu^2) \quad (1.7)$$

$$g_{1m} = \frac{\mu}{4} [g_{6m}(x) - \delta_{6m}], \quad g_{m2} = \frac{\mu}{1 - \mu^2} [g_{m3}(x) - \delta_{m3}]$$

$$g_{nm}(x) = k_{m-2}^{(n-3)}(x) \quad (m, n = 3, 4, 5, 6)$$

а $\mathbf{f}^{[l]}(x)$ — вектор-столбец с элементами

$$f_1^{[l]}(x) = \int_0^x [\beta^{-1} g_{12}(x-t) p_1^{[l]}(t\beta^{-1}) - \beta^{-4} g_{16}(x-t) p_3^{[l]}(t\beta^{-1})] dt \quad (1.8)$$

$$f_2^{[l]}(x) = \int_0^{x_1} p_1^{[l]}(\tau) d\tau, \quad f_m^{[l]}(x) = \beta^{-4} \int_0^x g_{m6}(x-t) p_3^{[l]*}(t\beta^{-1}) dt$$

$$p_3^{[l]*}(x_1) = p_3^{[l]}(x_1) + \mu c f_2^{[l]}(x) \quad (m = 3, 4, 5, 6)$$

Исключим из системе (1.2) из второго уравнения с помощью первого усилие $n_1^{[l]}$, после чего объединим ее с условиями (1.3) в единую систему, расположив в ней сначала первые уравнения (1.3), (1.2), а затем оставшиеся пары условий (1.3), (1.2). Воспользовавшись затем зависимостями (1.3), (1.5), (1.6), в итоге приходим к системе разностных уравнений

$$\mathbf{JY}^{[l]} = \mathbf{GY}^{[l-1]} + \mathbf{T}^{[l-1]} \quad (1.9)$$

шестого порядка, в которой $\mathbf{G} = \mathbf{g}(\lambda)$, $\lambda = \beta l$, \mathbf{J} — матрица 6×6 с элементами

$J_{ij} = \delta_{ij} - \eta^* \delta_{i5} \delta_{4j} + \chi^* \delta_{i6} \delta_{3j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$), $\eta^* = (1 + e_3) \eta$, $\chi^* = (1 + e_3) \chi$, а $T^{[j-1]}$ — вектор-столбец с элементами

$$T_m^{[j-1]} = f_m^{[j-1]}(\lambda) - (1 + e_3) P_1^{[j]} \delta_{m2} + (1 + e_3) (M^{[j]} + c\beta^{-2} e_3 P_1^{[j]}) \delta_{m5} + (1 + e_3) P_3^{[j]} \delta_{m6} \quad (m = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.10)$$

Эта система предназначена для нахождения искомых векторов-столбцов $\mathbf{Y}^{[j]}$, которыми, как показано выше (см. (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6)), определяется напряженно-деформированное состояние элементов подкрепленной оболочки, и допускает равносильное представление

$$Y_1^{[j]} = Y_1^{[j-1]} + G_{12} Y_2^{[j-1]} + 1/4\mu (\mathbf{A}_{4..} - \mathbf{I}_{4..}) \mathbf{X}^{[j-1]} + T_1^{[j-1]} \quad (1.11)$$

$$Y_2^{[j]} = Y_2^{[j-1]} + T_2^{[j-1]}$$

$$\mathbf{S}\mathbf{X}^{[j]} = \mathbf{AX}^{[j-1]} + \mathbf{F}^{[j-1]} + \frac{\mu}{1-\mu^2} (\mathbf{A}_{..1} - \mathbf{I}_{..1}) Y_2^{[j-1]}$$

где введены квадратные матрицы \mathbf{S} , \mathbf{A} и векторы-столбцы $\mathbf{X}^{[j]}$, $\mathbf{F}^{[j]}$ — четвертого порядка с компонентами

$$S_{mn} = J_{m+2,n+2} = \delta_{mn} - \eta^* \delta_{m3} \delta_{2n} + \chi^* \delta_{m4} \delta_{1n} \quad (1.12)$$

$$A_{mn} = G_{m+2,n+2} = k_n^{(m-1)}(\lambda), \quad X_m^{[j]} = Y_{m+2}^{[j]}, \quad F_m^{[j]} = T_{m+2}^{[j]}, \quad (m, n = 1, 2, 3, 4)$$

а \mathbf{I} — единичная матрица того же порядка, причем, например \mathbf{A}_m и $\mathbf{A}_{..m}$ — соответственно строка и столбец матрицы \mathbf{A} с номером m . Напомним, что система (1.11) (или (1.9)) бесконечна ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), в случае бесконечной оболочки и полубесконечна ($j = 1, 2, \dots$), если оболочка полубесконечная. В последнем случае эту систему дополняют краевые условия (1.4), которые после преобразований принимают вид

$$Y_2^{[0]} = -(1 + e_{30}) P_1^{[0]}, \quad \chi_0^* X_1^{[0]} + X_4^{[0]} = (1 + e_{30}) P_3^{[0]} \quad (1.13)$$

$$-\eta_0^* X_2^{[0]} + X_3^{[0]} = (1 + e_{30}) (M^{[0]} + \beta^{-2} c e_{30} P_1^{[0]})$$

$$\chi_0^* = (1 + e_{30}) \chi_0, \quad \eta_0^* = (1 + e_{30}) \eta_0$$

Если край полубесконечной оболочки неподкреплен и, например жестко заделан, то на нем имеют место условия

$$Y_1^{[0]} = 0, \quad X_1^{[0]} = 0, \quad X_2^{[0]} = 0 \quad (1.14)$$

Заметим, что при отсутствии осевых воздействий на подкрепленную оболочку ($P_1^{[j]} = P_2^{[j]} = 0$) $Y_2^{[j]} = 0$, и решение системы (1.11) сводится, по существу, к решению ее подсистемы разностных уравнений

$$\mathbf{S}\mathbf{X}^{[j]} = \mathbf{AX}^{[j-1]} + \mathbf{F}^{[j-1]} \quad (1.15)$$

уже четвертого порядка. При наличии осевых сил искомые $Y_2^{[j]}$ без труда находятся из второго уравнения (1.11), а $Y_1^{[j]}$ — из первого уравнения той же системы после предварительного решения третьего уравнения (1.11). Таким образом, и в общем случае нагружения центральное место занимает проблема решения системы разностных уравнений вида (1.15). Поэтому ниже строятся аналитические решения именно этой системы, описывающей, как нетрудно понять, осесимметричный изгиб подкрепленной оболочки, вызванный действием на нее только поперечных нагрузок.

2. О функциях матриц. Остановимся на некоторых результатах из теории функций матриц, используемых ниже при построении решений системы (1.15).

Пусть Φ — квадратная матрица порядка n с простым спектром. Это означает,

что ее характеристический многочлен и минимальный аннулирующий многочлен совпадают и имеют вид

$$\varphi(v) = |vI - \Phi| = \prod_{m=1}^n (v - v_m)$$

где v_m ($m = 1, 2, \dots, n$) — неравные между собой корни этих многочленов, образующие спектр матрицы Φ , а I — единичная матрица порядка n .

Если $f(v)$ — функция, заданная на спектре Φ (имеют смысл величины $f(v_m)$; $m = 1, 2, \dots, n$), то для ее матричного значения (функции матрицы Φ) справедливо разложение [9]:

$$f(\Phi) = \sum_{m=1}^n f(v_m) \Phi^{(m)} \quad (2.1)$$

в правой части которого присутствуют компоненты $\Phi^{(m)}$ матрицы Φ , определяемые выражениями

$$\Phi^{(m)} = \varphi_m(\Phi)/\varphi_m(v_m), \quad \varphi_m(v) = \varphi(v)/(v - v_m) \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (2.2)$$

и обладающие свойствами

$$\sum_{m=1}^n \Phi^{(m)} = I, \quad \Phi^{(m)} \Phi^{(k)} = \delta_{mk} \Phi^{(m)} \quad (m, k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

Ранг любой компоненты $\Phi^{(m)}$ равен 1, что указывает на пропорциональность между собой всех ее строк и столбцов. Кроме того, в силу теоремы Гамильтона — Кэли [9] $\varphi(\Phi) = (\Phi - v_m I) \varphi_m(\Phi) = 0$ при любом целом q имеют место тождества

$$\Phi^{(m)} = v_m^q \Phi^{-q} \Phi^{(m)} \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

Пусть теперь Φ — квадратная матрица четного порядка ($n = 2s$) с простым спектром, характеристический многочлен которой возвратного типа и потому имеет корни v_k^{-1} и v_k ($k = 1, 2, \dots, s$). Принимая во внимание, что в этом случае справедливы зависимости

$$\varphi(v) = (2v)^s \Delta(v) = (2v)^{s-1} (v - v_k^{-1}) (v - v_k) \Delta_k(v)$$

$$\varphi_k(v) = (2v)^{s-1} (v - v_k) \Delta_k(v), \quad \varphi_{k+s}(v) = (2v)^{s-1} (v - v_k^{-1}) \Delta_k(v)$$

$$\Delta(v) = \prod_{m=1}^s (\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \sigma_m), \quad \Delta_k(v) = \Delta(v)/(\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \sigma_k)$$

$$\operatorname{ch} \sigma = 1/2 (v + v^{-1}), \quad \operatorname{ch} \sigma_k = 1/2 (v_k + v_k^{-1}) \quad (k = 1, 2, \dots, s)$$

с помощью формул (2.2), (2.4) находим

$$\Phi^{(k)} = \frac{\varphi_k(\Phi)}{\varphi_k(v_k^{-1})} = v_k^{-q} \Phi^{-q} \Phi^{(k)} = \frac{\Phi^{-1} - v_k^{-1} I}{2 \operatorname{sh} \sigma_k} \Omega^{(k)} \quad (2.5)$$

$$\Phi^{(s+k)} = \frac{\varphi_{s+k}(\Phi)}{\varphi_{s+k}(v_k)} = v_k^q \Phi^{-q} \Phi^{(s+k)} = - \frac{\Phi^{-1} - v_k I}{2 \operatorname{sh} \sigma_k} \Omega^{(k)}$$

$$\operatorname{sh} \sigma_k = 1/2 (v_k - v_k^{-1}) \quad (k = 1, 2, \dots, s)$$

Здесь введены модифицированные компоненты $\Omega^{(k)} = \Phi^{(k)} + \Phi^{(s+k)} = \Delta_k(\Phi)/\Delta_k(v_k)$ ($k = 1, 2, \dots, s$) матрицы Φ , обладающие, подобно $\Phi^{(m)}$, свойствами (2.3) (при $n = s$; $m, k = 1, 2, \dots, s$).

Подставляя выражения (2.5) в формулу (2.1), приходим к такому представлению функции матрицы рассматриваемого вида

$$f(\Phi) = \sum_{k=1}^s [f(v_k^{-1}) \Phi^{(k)} + f(v_k) \Phi^{(s+k)}] = \\ = \sum_{k=1}^s \left[\frac{v_k f(v_k) - v_k^{-1} f(v_k^{-1})}{2 \operatorname{sh} \sigma_k} \mathbf{I} - \frac{f(v_k) - f(v_k^{-1})}{2 \operatorname{sh} \sigma_k} \Phi^{-1} \right] \Omega^{(k)} \quad (2.6)$$

Отсюда, в частности, имеем (p, q, m — любые целые числа):

$$(\mathbf{I} - z\Phi)^{-1} = (\mathbf{I} - z\Phi^{-1}) \sum_{k=1}^s \frac{\Omega^{(k)}}{(z - v_k^{-1})(z - v_k)} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{H}^{[p,q]} = (\mathbf{I} - \Phi^p)^{-1} \Phi^q = \sum_{k=1}^s (\zeta_{pq}^{(k)} \mathbf{I} - \zeta_{p,q-1}^{(k)} \Phi^{-1}) \Omega^{(k)}$$

$$\Gamma^{[m]} = \Phi^m = \sum_{k=1}^s (u_m^{(k)} \mathbf{I} - u_{m-1}^{(k)} \Phi^{-1}) \Omega^{(k)}$$

$$\zeta_{pq}^{(k)} = \zeta_{p,p-q-2}^{(k)} = \frac{u_q^{(k)} + u_{p-q-2}^{(k)}}{2(1 - t_p^{(k)})} = \frac{u_q^{(k)} - u_{q-p}^{(k)}}{2(1 - t_p^{(k)})}$$

$$u_m^{(k)} = U_m(\operatorname{ch} \sigma_k) = \frac{\operatorname{sh}(m+1)\sigma_k}{\operatorname{sh} \sigma_k}, \quad t_m^{(k)} = T_m(\operatorname{ch} \sigma_k) = \operatorname{ch} m\sigma_k$$

где $T_m(x)$ и $U_m(x)$ — многочлены Чебышева степени m соответственно 1-го и 2-го рода [10].

Если Φ — матрица 4×4 ($s = 2, n = 4$), то, как нетрудно видеть

$$\Omega^{(\alpha)} = -(-1)^\alpha \frac{\Omega + \mathbf{I} \operatorname{ch} \sigma_\alpha}{\operatorname{ch} \sigma_1 - \operatorname{ch} \sigma_2}, \quad \Omega = \frac{1}{2} (\Phi + \Phi^{-1}) - 2d_1 \mathbf{I} \quad (2.8)$$

$$2d_1 = \operatorname{ch} \sigma_1 + \operatorname{ch} \sigma_2 \quad (\alpha = 1, 2)$$

и первые три формулы (2.7) принимают вид

$$(\mathbf{I} - z\Phi)^{-1} = (\mathbf{I} - z\Phi^{-1}) \left[\frac{z^2 + 1}{\varphi(z)} \mathbf{I} + \frac{2z}{\varphi(z)} \Omega \right] \quad (2.9)$$

$$\mathbf{H}^{[p,q]} = (\mathbf{I} - \Phi^p)^{-1} \Phi^q = (\tau_{p,q+1} + \tau_{p,q-1}) \mathbf{I} -$$

$$- (\tau_{pq} + \tau_{p,q-2}) \Phi^{-1} + 2\tau_{pq} \Omega - 2\tau_{p,q-1} \Psi$$

$$\Gamma^{[m]} = \Phi^m = (\omega_{m+1} + \omega_{m-1}) \mathbf{I} - (\omega_m + \omega_{m-2}) \Phi^{-1} + 2\omega_m \Omega - 2\omega_{m-1} \Psi$$

$$\tau_{pq} = \frac{\zeta_{pq}^{(1)} - \zeta_{pq}^{(2)}}{2(t_1^{(1)} - t_1^{(2)})}, \quad \omega_m = \frac{u_m^{(1)} - u_m^{(2)}}{2(t_1^{(1)} - t_1^{(2)})}, \quad \Psi = \Phi^{-1} \Omega$$

3. Построение общих решений. Рассмотрим сначала бесконечную подкрепленную оболочку, упругий анализ которой сведен выше к решению бесконечной системы разностных уравнений (см. (1.15)):

$$\mathbf{X}^{[j]} = \Phi \mathbf{X}^{[j-1]} + \mathbf{F}^{[j-1]*} \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.1)$$

$$\Phi = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}, \quad \mathbf{F}^{[j]*} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{F}^{[j]}$$

четвертого порядка. Воспользуемся для этого преобразованием Лорана [11].

Пусть $z = x + iy$ — комплексная переменная ($i = \sqrt{-1}$) и пусть образы Лорана

$$* \quad \mathbf{X}(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} z^j \mathbf{X}^{[j]}, \quad \mathbf{F}^*(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} z^j \mathbf{F}^{[j]*} \quad (3.2)$$

бесконечных векторных последовательностей $\{\mathbf{X}^{[j]}\}$, $\{\mathbf{F}^{[j]*}\}$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) регулярны по крайней мере на единичной окружности L комплексной плоскости z . Для $\mathbf{X}(z)$ это предположение оправдывается построенным ниже решением, а для $\mathbf{F}^*(z)$ — видом рассматриваемых внешних воздействий на подкрепленную оболочку. По определению обратного преобразования Лорана

$$\mathbf{X}^{[j]} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbf{X}(\zeta) \zeta^{-j-1} d\zeta, \quad \mathbf{F}^{[j]*} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbf{F}^*(\zeta) \zeta^{-j-1} d\zeta \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.3)$$

Здесь и далее интегрирование по L осуществляется против часовой стрелки. При помощи последних соотношений система (3.1) приводится к виду

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L [(I - \zeta \Phi) \mathbf{X}(\zeta) - \zeta \mathbf{F}^*(\zeta)] \zeta^{-j-1} d\zeta = 0 \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Отсюда имеем

$$\mathbf{X}(\zeta) = \zeta (I - \zeta \Phi)^{-1} \mathbf{F}^*(\zeta) \quad (\zeta \in L) \quad (3.4)$$

Вычисления показывают, что характеристический многочлен матрицы Φ :

$$\varphi(v) = |vI - \Phi| = v^4 - 4d_1(v^3 + v) + (2 + 4d_2)v^2 + 1$$

$$d_1 = K_1 + \frac{1}{4}(\eta^* K_2 - \kappa^* K_4), \quad K_m = k_m(\lambda) \quad (m = 1, 2, 3, 4)$$

$$d_2 = \chi_1 + \frac{1}{4}\eta^*\chi_3 + \frac{1}{8}\kappa^*\chi_4 + \frac{1}{32}\eta^*\kappa^*(1 - \chi_1)$$

$$\chi_\alpha = \frac{1}{2}[\operatorname{ch} 2\lambda - (-1)^\alpha \cos 2\lambda], \quad \chi_{2+\alpha} = \frac{1}{2}[\operatorname{sh} 2\lambda - (-1)^\alpha \sin 2\lambda] \quad (\alpha = 1, 2)$$

возвратного типа и потому имеет корни $v_\alpha^{\pm 1}$ ($\alpha = 1, 2$), где

$$v_\alpha = \delta_\alpha + (d_\alpha^2 - 1)^{1/2}, \quad \delta_\alpha = d_1 - (-1)^\alpha(d_1^2 - d_2)^{1/2} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (3.5)$$

Условимся, что $|v_\alpha| > 1$ ($\alpha = 1, 2$), и пусть пока $v_1 \neq v_2$ ($d_1^2 \neq d_2$). Поставим в правую часть равенства (3.4) первую формулу (2.9) и второе разложение (3.2), после чего воспользуемся первым соотношением (3.3) и теоремой о вычетах. В итоге получим

$$\mathbf{X}^{[j]} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{G}^{[j-m]} \mathbf{F}^{[m]*} \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{G}^{[m]} = -\xi_m I + \xi_{m-1} \Phi^{-1} - \psi_m \Omega + \psi_{m-1} \Psi$$

$$\xi_m = \frac{v_1^{-|m|} \operatorname{cth} \sigma_1 - v_2^{-|m|} \operatorname{cth} \sigma_2}{2(\operatorname{ch} \sigma_1 - \operatorname{ch} \sigma_2)}, \quad \psi_m = \frac{v_1^{-|m|} \operatorname{sh} \sigma_2 - v_2^{-|m|} \operatorname{sh} \sigma_1}{2(\operatorname{ch} \sigma_1 - \operatorname{ch} \sigma_2) \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2}$$

Из этого общего решения бесконечной системы (3.1) можно было бы извлечь с помощью дискретных рядов Фурье периодическое решение $\mathbf{X}^{[j]} = \mathbf{X}^{[j \pm t]}$, существующее при условии $\mathbf{F}^{[j \pm t]*} = \mathbf{F}^{[j]*}$, где t — дискретный период задачи. Однако рекуррентный характер системы (3.1) позволяет указать более эффективный способ построения такого решения. Действительно, при любом целом $j > 0$ из этой системы вытекает формула

$$\mathbf{X}^{[k+j]} = \Phi^j \mathbf{X}^{[k]} + \sum_{m=0}^{j-1} \Phi^{j-m-1} \mathbf{F}^{[k+m]*} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.7)$$

Полагая в ней $j = t$, находим (см. (2.9), (2.7)):

$$\mathbf{X}^{[k]} = \mathbf{X}^{[k+l]} = \sum_{m=0}^{l-1} \mathbf{H}^{[l,m]} \mathbf{F}^{[k+m]*} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.8)$$

Обратимся теперь к полубесконечной оболочке. В этом случае решению подлежит полубесконечная система разностных уравнений

$$\mathbf{X}^{[j]} = \Phi \mathbf{X}^{[j-1]} + \mathbf{F}^{[j-1]*} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

Воспользуемся с этой целью преобразованием Тейлора — преобразованием Лорана для полубесконечных последовательностей, дополненных до бесконечных нулевыми элементами [12]. Пусть образы Тейлора

$$\mathbf{X}^+ (z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \mathbf{X}^{[j]}, \quad \mathbf{F}^{*+} (z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \mathbf{F}^{[j]*} \quad (3.10)$$

полубесконечных векторных последовательностей $\{\mathbf{X}^{[j]}\}$, $\{\mathbf{F}^{[j]*}\}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) регулярны в области D_+ , заключенной внутри окружности L , что, как и ранее, оправдывается построенным ниже решением и видом рассмотренных внешних воздействий на полубесконечную подкрепленную оболочку.

По определению обратного преобразования Тейлора

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbf{X}^+ (\zeta) \zeta^{-j-1} d\zeta = \theta \mathbf{X}^{[j]}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathbf{F}^{*+} (\zeta) \zeta^{-j-1} d\zeta = \theta \mathbf{F}^{[j]*} \quad (3.11)$$

$$\theta_m = 1 \quad (m \geq 0), \quad \theta_m = 0 \quad (m < 0), \quad (j = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

С помощью этих соотношений система (3.9) преобразуется в равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L [\mathbf{I} - \zeta \Phi] \mathbf{X}^+ (\zeta) - \zeta \mathbf{F}^{*+} (\zeta) \zeta^{-j-1} d\zeta = 0 \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3.12)$$

которым удовлетворяет кусочно-голоморфный вектор-столбец $\mathbf{X} (z)$ (он равен $\mathbf{X}^+ (z)$ в D_+ и $\mathbf{X}^- (z)$ в D_- ; D_- — область, расположенная вне окружности L), являющийся решением матричной краевой задачи Римана — Гильберта

$$(\mathbf{I} - \zeta \Phi) \mathbf{X}^+ (\zeta) = \mathbf{X}^- (\zeta) + \zeta \mathbf{F}^{*+} (\zeta) \quad (\zeta \in L) \quad (3.13)$$

где в силу (3.12) $\mathbf{X}^- (\infty) = \mathbf{C}$ — искомый постоянный вектор-столбец. Умножая слева равенства (3.13) поочередно на $\Phi^{(\alpha)}$ и $\Phi^{(2+\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$), с учетом выражения

$$\mathbf{I} - \zeta \Phi = \sum_{\alpha=1}^2 [(1 - \zeta v_{\alpha}^{-1}) \Phi^{(\alpha)} + (1 - \zeta v_{\alpha}) \Phi^{(2+\alpha)}]$$

вытекающего из первого представления (2.6) (при $s = 2$), и свойств (2.3) компонент $\Phi^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3, 4$) получаем две простейшие задачи Римана — Гильберта

$$(1 - \zeta v_{\alpha}^{-1}) \Phi^{(\alpha)} \mathbf{X}^+ (\zeta) = \Phi^{(\alpha)} [\mathbf{X}^- (\zeta) + \zeta \mathbf{F}^{*+} (\zeta)] \quad (3.14)$$

$$(1 - \zeta v_{\alpha}) \Phi^{(2+\alpha)} \mathbf{X}^+ (\zeta) = \Phi^{(2+\alpha)} [\mathbf{X}^- (\zeta) + \zeta \mathbf{F}^{*+} (\zeta)] \quad (\zeta \in L)$$

регулярные в D_+ , части решения которых даются формулами [11]:

$$\Phi^{(\alpha)} \mathbf{X}^+ (z) = \Phi^{(\alpha)} [z \mathbf{F}^{*+} (z) + \mathbf{C}] / (1 - z v_{\alpha}^{-1})$$

$$\Phi^{(2+\alpha)} \mathbf{X}^+ (z) = \Phi^{(2+\alpha)} [z \mathbf{F}^{*+} (z) - v_{\alpha}^{-1} \mathbf{F}^{*+} (v_{\alpha}^{-1})] / (1 - z v_{\alpha})$$

$$(\alpha = 1, 2; \quad z \in D_+)$$

Складывая их, после преобразований с использованием зависимостей (2.5) — (2.7) находим регулярную в D_+ часть решений краевой задачи (3.13):

$$\mathbf{X}^+(z) = z(\mathbf{I} - z\Phi)^{-1}\mathbf{F}^{*+}(z) + \sum_{\alpha=1}^2 \left[\frac{\Phi^{(2+\alpha)}\mathbf{F}^{*+}(v_\alpha^{-1})}{v_\alpha^2(z-v_\alpha^{-1})} - \frac{c_\alpha v_\alpha \Phi_r^{(\alpha)}}{z-v_\alpha} \right] \quad (z \in D_+) \quad (3.15)$$

Появление в этом общем решении двух новых постоянных c_α ($\alpha = 1, 2$) вместо четырех компонент вектор-столбца \mathbf{C} объясняется тем, что произведение матрицы с единичным рангом (а таковы компоненты $\Phi^{(m)}$; $m = 1, 2, 3, 4$) на вектор-столбец с точностью до скалярной величины совпадает со столбцом (безразлично каким; $r = 1, 2, 3, 4$) этой матрицы. По той же причине несмотря на матричную запись краевые задачи (3.14) носят скрытый скалярный характер, и именно в этом смысле можно сказать, что изложенный выше прием позволил свести связанную систему краевых задач Римана — Гильберта (3.13) к независимым между собой скалярным задачам (3.14). В связи с этим отметим, что обсуждаемый прием применим и к более общим, чем (3.13), задачам с матричным коэффициентом в виде функции матрицы.

Подставляя в выражение (3.15) второе разложение (3.10) и возвращаясь к оригиналам по первой формуле (3.11), находим решение (см. обозначения в (3.6))

$$\mathbf{X}^{[j]} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{G}^{[j-m]} \mathbf{F}^{[m]*} + \sum_{\alpha=1}^2 c_\alpha v_\alpha^{-j} \Phi_r^{(\alpha)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.16)$$

полубесконечной системы (3.9). Для отыскания постоянных c_α ($\alpha = 1, 2$) служат второе и третье условия (1.13).

Отличительная особенность построенных выше решений — в выделении дискретной функциональной зависимости в скалярной форме. Практическое использование их требует вычисления матриц $\Phi^{\pm 1}$, Ω , Ψ и $\Phi^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$). Замечая, что при любом целом m элементы матриц \mathbf{S}^m , \mathbf{A}^m выражаются формулами ($i, j = 1, 2, 3, 4$): $S_{ij}^{(m)} = \delta_{ij} - m\eta^* \delta_{i4} \delta_{j2} + mx^* \delta_{i4} \delta_{j1}$, $A_{ij}^{(m)} = k_j^{(i-1)} (m\lambda)$ в соответствии с (3.1), (2.8), (2.9); (2.5) находим

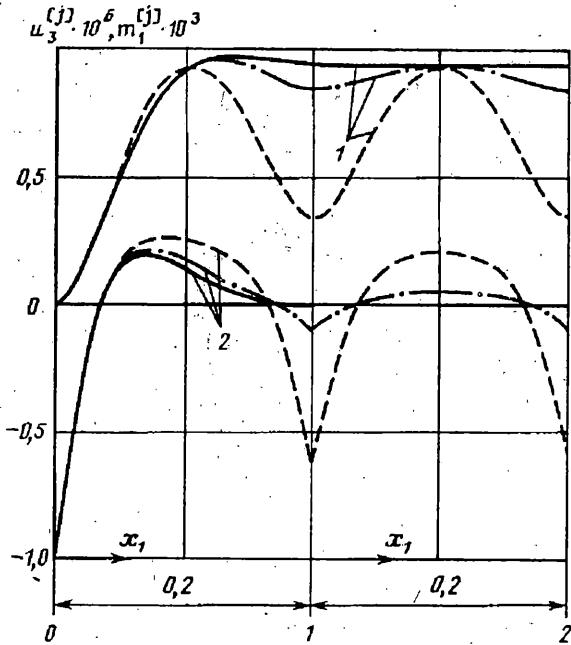
$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &= A_{ij} + \eta^* \delta_B A_{2j} - x^* \delta_{i4} A_{1j}, \quad \Phi_{ij}^{(-1)} = A_{ij}^{(-1)} - \eta^* A_{Bj}^{(-1)} \delta_{2j} + x^* A_{i4}^{(-1)} \delta_{1j} \\ 2\Omega_{ij} &= A_{ij} - 4d_1 \delta_{ij} + A_{ij}^{(-1)} - \eta^* (A_B^{(-1)} \delta_{2j} - \delta_B A_{2j}) + x^* (A_{i4}^{(-1)} \delta_{1j} - \delta_{i4} A_{1j}) \\ 2\Psi_{ij} &= \delta_{ij} - 4d_1 A_{ij}^{(-1)} + A_{ij}^{(-2)} - \eta^* [A_B^{(-1)} A_{2j}^{(-1)} + (A_B^{(-2)} - 4K_1 A_B^{(-1)}) \delta_{2j}] + \\ &+ x^* [A_{i4}^{(-1)} A_{1j}^{(-1)} + (A_{i4}^{(-2)} - 4K_1 A_{i4}^{(-1)}) \delta_{1j}] + \eta^* x^* [(A_B^{(-1)} A_{i4}^{(-1)} - \\ &- A_{i3}^{(-1)} A_{i4}^{(-1)}) \delta_{2j} + (A_{23}^{(-1)} A_{i4}^{(-1)} - A_B^{(-1)} A_{24}^{(-1)}) \delta_{1j}] \\ \Phi_{ij}^{(\alpha)} &= -(-1)^\alpha [4 \operatorname{sh} \sigma_\alpha (\operatorname{ch} \sigma_1 - \operatorname{ch} \sigma_2)]^{-1} [2\Omega_{ij} - v_\alpha^{-1} A_{ij} + v_\alpha A_{ij}^{(-1)} + \\ &+ 2v_\alpha^{-1} (2d_1 - \operatorname{ch} \sigma_\alpha) \delta_{ij} - \eta^* (v_\alpha A_B^{(-1)} \delta_{2j} + v_\alpha^{-1} \delta_B A_{2j}) + \\ &+ x^* (v_\alpha A_{i4}^{(-1)} \delta_{1j} + v_\alpha^{-1} \delta_{i4} A_{1j})] \quad (i, j = 1, 2, 3, 4; \alpha = 1, 2) \end{aligned}$$

До сих пор предполагалось, что $v_1 \neq v_2$ ($d_1^2 \neq d_2$). Если параметры подкрепленной оболочки таковы, что $d_1^2 = d_2$, то, как нетрудно видеть, (см. (3.5)):

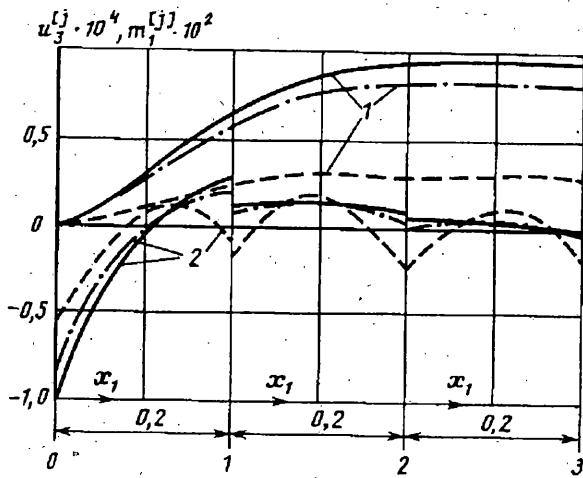
$$\delta_\alpha = \operatorname{ch} \sigma_\alpha = \operatorname{ch} \sigma = d_1, \quad v_\alpha = v = d_1 + (d_1^2 - 1)^{1/2}$$

$$\operatorname{sh} \sigma_\alpha = \operatorname{sh} \sigma = (d_1^2 - 1)^{1/2}, \quad \operatorname{cth} \sigma_\alpha = \operatorname{cth} \sigma = d_1 (d_1^2 - 1)^{-1/2} \quad (\alpha = 1, 2)$$

и величины ξ_m , ψ_m , τ_{pq} и ω_m (см. (2.9), (3.6)) принимают неопределенные



Фиг. 2



Фиг. 3

значения типа 0/0. Эти неопределенности легко раскрываются с помощью формулы конечных приращений Коши. Так, например, имеем

$$\xi_m = -\frac{|m| \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma + 1}{2 \operatorname{sh}^3 \sigma} v^{-|m|}, \quad \psi_m = -\frac{|m| \operatorname{sh} \sigma + \operatorname{ch} \sigma}{\operatorname{sh}^3 \sigma} v^{-|m|}$$

В заключение отметим, что точное решение рассмотренной задачи для конечной подкрепленной оболочки (см. систему (3.9) при $j = 1, 2, \dots, n-1; n+1$ — число шпангоутов, включая крайние) вытекает из формулы (3.7) при $k=0$ и согласно третьему выражению (2.9) представляет собой иную, более компактную аналитическую запись полученного в [8] в виде дискретно функциональной матрицы.

4. Примеры. Проиллюстрируем полученные выше теоретические результаты конкретными примерами, ограничиваясь рассмотрением действия на подкрепленную оболочку постоянного внутреннего давления, безразмерное значение которого примем равным единице, т. е. $p_1^{[J]} = P_1^{[J]} = P_3^{[J]} = M^{[J]} = 0$, $p_3^{[J]} = p_3^{[J*]} = 1$ при всех j .

Обращаясь к нужным формулам (1.7), (1.8), (1.10), (1.12), (3.1), находим

$$F_m^{[J]} = T_{m+2}^{[J]} = f_{m+2}^{[J]}(\lambda) = (\delta_{m1} - A_{m1})/(4\beta^4) \quad (m = 1, 2, 3, 4)$$

$$F^{[J*]} = F^* = (S_1^{(-1)} - \Phi_1)/(4\beta^4)$$

Подставляя последнее выражение в зависимость (3.6), после синтезирования ряда приходим к следующему решению:

$$\mathbf{X}^{[J]} = \mathbf{X}^\infty = \frac{(I - \Phi^{-1} + \Omega - \Psi)(S_1^{(-1)} - \Phi_1)}{8\beta^4(1 - 2d_1 + d_2)} \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

для бесконечной подкрепленной оболочки. Как показывают выкладки, оно вытекает и из периодического решения (3.8) при $t = 1$.

Подобные преобразования решения (3.16) приводят к зависимости

$$\mathbf{X}^{[J]} = \mathbf{X}^\infty + \sum_{\alpha=1}^2 v_\alpha^{-j} (c_\alpha \Phi^{(\alpha)} - \frac{v_\alpha}{v_\alpha - 1} \Phi^{(\alpha)} F^*) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

показывающей, что с ростом j решение для полубесконечной оболочки стремится асимптотически к решению для бесконечной оболочки. Предположим, что край полубесконечной оболочки неподкреплен и защемлен. Тогда очевидные преобразования, связанные с удовлетворением двух последних условий (1.14), дают (принимаем $r = 4$):

$$c_\alpha = \rho (X_1^* + \gamma_\alpha X_2^*), \quad \rho = \frac{8 \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2 (\operatorname{ch} \sigma_1 - \operatorname{ch} \sigma_2)}{4K_4 \operatorname{sh} (\sigma_1 - \sigma_2) + \chi (\operatorname{sh} \sigma_1 - \operatorname{sh} \sigma_2)}$$

$$\gamma_\alpha = \frac{4K_4 \operatorname{ch} \sigma_\alpha + \chi}{4K_3 \operatorname{sh} \sigma_\alpha}, \quad \chi = \chi_4 + \frac{1}{4} \eta^* (\chi_1 - 1)$$

$$X_\alpha^* = X_\alpha^\infty - \sum_{\beta=1}^2 \frac{v_\beta}{v_\beta - 1} \Phi_\alpha^{(\beta)} F^* \quad (\alpha = 1, 2)$$

Некоторые результаты вычислений на ЭВМ для разобранных выше примеров при $\mu = 0,3$, $l = 0,2$, $\eta^* = 1$ представлены на фиг. 2, 3, где изображены зависимости $u_1^{[J]}(x_1)$ (кривые 1) и $m_1^{[J]}(x_1)$ (кривые 2) в нескольких приграничных отсеках полубесконечной оболочки (цифрами внизу обозначены номера шпангоутов). Сплошные линии соответствуют $x^* = 1/16$, штрих-пунктирные — $x^* = 1$, штриховые — $x^* = 16$. Как видно, решение для бесконечной оболочки реализуется фактически начиная с отсека 1 при $h^{-1} = 300$ (фиг. 2) и отсека 2 при $h^{-1} = 30$ (фиг. 3). Вычисления показывают, что с ним согласуется асимптотически точное решение задачи о бесконечной оболочке с одним шпангоутом (в его окрестности) и точное решение задачи с тремя шпангоутами (в окрестности среднего шпангоута). Наилучшее сближение сравниваемых решений имеет место для максимальных (по модулю) значений переменных напряженно-деформированного состояния.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Код 93-013-16490.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гребень Е. С. Основные соотношения технической теории ребристых оболочек//Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 3. С. 124—135.
- Жилин П. А. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами//Инж. ж. МТТ. 1966. № 5. С. 139—142.
- Жилин П. А. Линейная теория ребристых оболочек//Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 4. С. 150—163.

4. Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. М.: Машиностроение, 1973. 659 с.
5. Методы расчета оболочек. Т. 2. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Теория ребристых оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 367 с.
6. Михайлов Б. К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 196 с.
7. Рыбаков Л. С. Упругий изгиб подкрепленной прямоугольной пластины//Прикладные методы расчета авиационных конструкций. М.: Изд-во МАИ, 1986. С. 46—50.
8. Рыбаков Л. С. Осьесимметричное упругое деформирование подкрепленной шпангоутами круговой цилиндрической оболочки//Изв. АН СССР. МТТ, 1990. № 3. С. 132—140.
9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
10. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.
11. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
12. Рыбаков Л. С. Контактные задачи о дискретном взаимодействии пластины и стержня//Изв. АН СССР. МТТ 1983. № 2. С. 160—171.

Москва

Поступила в редакцию
27.V.1992