

УДК 539.374

© 1994 г. М. Б. АХУНДОВ, Ф. М. САДЫХОВ, Ю. В. СУВОРОВА

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ
В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ВЯЗКОУПРУГOM СТЕРЖНЕ
КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА

Как показывают экспериментальные исследования, при расчете конструкций на динамическую прочность и долговечность необходимым является учет процесса повреждаемости. Теоретические исследования влияния этого явления на процессы деформирования и разрушения в условиях статики или квазистатики более развиты, нежели в условиях динамических режимов, хотя именно для динамики роль повреждаемости материала, по-видимому, будет более определяющей, нежели для статики.

Вопросам распространения волн в неупругих средах с учетом процесса накопления повреждений посвящено незначительное количество работ.

В одних из них учет повреждаемости производится посредством соответствующего критерия разрушения [1]. Другой путь исследования предложен в работе [2]. Здесь использована модель деформирования наследственной среды, включающая в себя оператор, характеризующий процесс накопления повреждений. Однако результаты получены для регулярных ядер наследственных операторов вязкости и поврежденности. В настоящей работе наряду с исследованием случаев сингулярных ядер, исследовано также явление залечивания дефектов, причем как для однородного, так и для кусочно однородного стержней.

Задачи о распространении волн в нелинейных средах представляют собой сложные математические задачи, к решению которых привлекаются приближенные методы, среди которых наибольшее развитие получили численные. В [3, 4] показано, что в одномерном случае в наследственно-упругих средах, характеризующихся сингулярными ядрами наследственности, ударные волны распространяться не могут и напряжение на фронте непрерывно дифференцируемо, что было использовано для построения и реализации численной схемы для нелинейно наследственно-упругого однородного стержня, в том числе и с учетом повреждаемости. В данной работе эта схема получила свое дальнейшее развитие.

1. Рассмотрим для начала ударное нагружение однородного стержня конечной длины, по одному из его торцов при свободном другом его торце.

Примем следующие безразмерные величины:

$$v = \bar{v}/(c_0 \varepsilon_0), \epsilon = \bar{\epsilon}/\varepsilon_0, x = \bar{x}/l, t = \bar{t}c_0/l \quad (1.1)$$

$$\sigma = \bar{\sigma}/(E\varepsilon_0), \lambda = \bar{\lambda}^{1-\alpha}/c_0^{1-\alpha}, \gamma = \bar{\gamma}^{1-\beta}/c_0^{1-\beta}$$

где $c_0 = \sqrt{E/\rho}$, ε_0 — предел пропорциональности, l — длина стержня.

Система уравнений, определяющих задачу, будет следующей:

$$\partial v(x, t)/\partial t = \partial \sigma(x, t)/\partial x, \partial \epsilon(x, t)/\partial t = \partial v(x, t)/\partial x \quad (1.2)$$

$$\varphi(\epsilon) = \sigma + L^* \sigma + M^* \sigma \quad (1.3)$$

где $\varphi(\epsilon)$ — нелинейная функция мгновенного деформирования

¹ См. Ахундов М. Б. Деформирование и разрушение изотропных наследственно-упругих материалов. Баку, 1989.—Деп. в АзНИИНТИ 12.05.89, № 1299; см. также Холин Н. Н. Кинетика накопления повреждений в металлах//Всес. конф. Современные проблемы строительной механики. М.: МАН, 1983. С. 109.

$$\varphi(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & \varepsilon \leq 1 \quad (0 \leq \gamma < 1) \\ \gamma\varepsilon + (1 - \gamma)(2 - 1/\varepsilon), & \varepsilon > 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

В свою очередь, операторы вязкости и поврежденности имеют вид

$$L^*\sigma = \int_0^t L(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau$$

$$M^*\sigma = \begin{cases} E(t_i^+), & t \in (t_i^-, t_{i+1}^-) \\ E(t_i^+) + \int_{t_i^-}^t M(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, & t \in (t_{i+1}^-, t_{i+1}^+) \end{cases} \quad (1.5)$$

$$E(t_i^+) = \sum_{k=1}^l \Phi(\varepsilon(t_k^+)) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(t_k^+ - \tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (1.6)$$

$$L(t-\tau) = \lambda(t-\tau)^{-\alpha}, M(t-\tau) = \kappa(t-\tau)^{-\beta} \quad (0 \leq \alpha, \beta < 1) \quad (1.7)$$

Здесь (t_k^-, t_k^+) — интервалы времени, когда идет процесс накопления повреждений, определяемый условием $\varepsilon > 0, \dot{\varepsilon} \geq 0$; $\Phi(\varepsilon(t_k^+))$ — функция залечивания дефектов, определяемая следующим образом:

$$\Phi(\varepsilon(t_k^+)) = \begin{cases} 0, & \varepsilon(t_k^+) \leq \varepsilon_1 \\ 1, & \varepsilon(t_k^+) > \varepsilon_1 \end{cases} \quad (1.8)$$

где ε_1 — некоторая предельная деформация.

В основу построения оператора поврежденности положена следующая концепция. Накопление повреждений происходит при неубывающих растягивающих деформациях; в противном случае значение оператора поврежденности соответствует моменту времени предшествующей максимальной растягивающей деформации, если ее уровень превышает некоторый заданный или эта величина равна нулю, что соответствует залечиванию дефектов.

Дифференцируя определяющее соотношение (1.3) по времени, с учетом вида ядер наследственных операторов (1.7), получим:

$$c^2(\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + L^* \frac{\partial \sigma}{\partial t} + M^* \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (1.9)$$

где, в свою очередь

$$c^2(\varepsilon) = \frac{d\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \begin{cases} 1; & \varepsilon \leq 1 \\ \gamma + (1 - \gamma)/\varepsilon^2; & \varepsilon > 1 \end{cases} \quad (1.10)$$

Обратная к функции нелинейного деформирования $\varphi(\varepsilon)$ функция будет иметь вид

$$\varepsilon = \Psi(z), \quad z = \sigma + L^*\sigma + M^*\sigma \quad (1.11)$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} z, & z \leq 1 \\ \frac{0,5z + \gamma - 1}{\gamma} + \left(\left(\frac{0,5z + \gamma - 1}{\gamma} \right)^2 + \frac{1 - \gamma}{\gamma} \right)^{1/2}, & z < 1 \end{cases}$$

Уравнения (1.2) и (1.9) представляют собой систему квазилинейных уравнений, гиперболических в узком смысле [2, 7], в правую часть которой входят интегральные члены наследственного типа. Выпишем конечно-разностную схему, представляющую дискретный аналог уравнений рассматриваемой задачи, используя результаты [4, 5]. Пусть узловая точка A_{mn} на характеристической плоскости (x, t) имеет координаты $m\delta x$ и $n\delta t$, где δx и δt шаги соответственно по осям x и t . Для внутренних точек области решения для значений скорости $v_{m,n}$ и напряжения $\sigma_{m,n}$ в этой точке имеем следующие расчетные соотношения:

$$v_{m,n} = \frac{1}{2} (v_{\Lambda_m, n-1} + v_{\Pi_m, n-1}) + \frac{1}{2c(\epsilon_{m, n-1})} (\sigma_{\Pi_m, n-1} - \sigma_{\Lambda_m, n-1} - F_{\Lambda_m, n-1} \delta t - F_{\Pi_m, n-1} \delta t) \\ \sigma_{m,n} = 1/2 (\sigma_{\Pi_m, n-1} + \sigma_{\Lambda_m, n-1} - F_{\Pi_m, n-1} \delta t - F_{\Lambda_m, n-1} \delta t) + \\ + 1/2 c (\epsilon_{m, n-1}) (v_{\Pi_m, n-1} - v_{\Lambda_m, n-1}) \quad (1.12)$$

где $v_{\Lambda_m, n-1}$, $v_{\Pi_m, n-1}$, $\sigma_{\Lambda_m, n-1}$, $\sigma_{\Pi_m, n-1}$ — значения скорости и напряжения в точках пересечения левой и правой нисходящих из узловой точки $A_{m,n}$ характеристик с горизонталью $(n-1)\delta t$:

$$v_{\Lambda_m, n-1} = v_{m-1, n-1} c(\epsilon_{m, n-1}) \frac{\delta t}{\delta x} + v_{m, n-1} \left[1 - c(\epsilon_{m, n-1}) \frac{\delta t}{\delta x} \right] \\ v_{\Pi_m, n-1} = v_{m+1, n-1} c(\epsilon_{m, n-1}) \frac{\delta t}{\delta x} + v_{m, n-1} \left[1 - c(\epsilon_{m, n-1}) \frac{\delta t}{\delta x} \right] \quad (1.13) \\ \sigma_{\Lambda_m, n-1} = \sigma_{m-1, n-1} c(\epsilon_{m, n-1}) \frac{\delta t}{\delta x} + \sigma_{m, n-1} \left[1 - c(\epsilon_{m, n-1}) \frac{\delta t}{\delta x} \right] \\ \sigma_{\Pi_m, n-1} = \sigma_{m+1, n-1} c(\epsilon_{m, n-1}) \frac{\delta t}{\delta x} + \sigma_{m, n-1} \left[1 - c(\epsilon_{m, n-1}) \frac{\delta t}{\delta x} \right]$$

В свою очередь $F_{\Lambda_m, n}$ и $F_{\Pi_m, n}$ определяются следующей формулой при $y = \Lambda$ и $y = \Pi$:

$$F_{y_m, n} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda (\sigma_{m, i+1} - \sigma_{y_m})}{[(n-i)\delta t]^{\alpha}} + \quad (1.14) \\ + \begin{cases} H_y(t_r^+), & 1 + n_r^+(m) \leq n \leq n_{r+1}^-(m) \\ H_y(t_r^+) + \sum_{j=n_{r+1}^-(m)}^{n-1} \frac{\lambda (\sigma_{m, j+1} - \sigma_{y_m})}{[(n-j)\delta t]^{\beta}} (1 + n_{r+1}^-(m) \leq n \leq n_{r+1}^+(m)) \end{cases} \\ H_y(t_r^+) = \sum_{k=1}^{n_k^+(m)-1} \Phi_k \sum_{j=n_k^-(m)}^{n_k^+(m)-1} \frac{\lambda (\sigma_{m, j+1} - \sigma_{y_m})}{[(n-j)\delta t]^{\beta}}$$

где дискретная функция залечивания дефектов определяется согласно (1.8) следующим образом:

$$\Phi_k = \begin{cases} 0, & \epsilon_{m, n_k^+(m)} \leq \epsilon_1 \\ 1, & \epsilon_{m, n_k^+(m)} > \epsilon_1 \end{cases} \quad (1.15)$$

в представлении (1.14) $n_k^-(m)$ и $n_k^+(m)$ номера вторых временных координат узловых точек, соответствующих временам t_k^- и t_k^+ при одном и том же фиксированном номере m их первых осевых координат. Условия, определяющие эти номера, будут:

$$\epsilon_{m,n} > 0, \quad \epsilon_{m,n} - \epsilon_{m,n-1} > 0 \quad (1.16)$$

Дискретный аналог определяющего соотношения в форме (1.11) будет

$$\epsilon_{m,n} = \Psi(z_{m,n}); z_{m,n} = \sigma_{m,n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda (\delta t)^{1-\alpha}}{(n-i)^{\alpha}} \sigma_{m,i} + \quad (1.17)$$

$$+ \begin{cases} E_r(t_r^+), & 1 + n_r^+(m) \leq n \leq n_{r+1}^-(m) \\ E_r(t_r^+) + \sum_{j=n_{r+1}^-(m)}^{n-1} \frac{\kappa(\delta t)^{1-\beta}}{(n-j)^\beta} \sigma_{m,j} (1 + n_{r+1}^-(m) \leq n \leq n_{r+1}^+(m)) \end{cases}$$

$$E_r(t_r^+) = \sum_{k=1}^r \Phi_k \sum_{j=n_k^-(m)}^{n_k^+(m)} \frac{\kappa(\delta t)^{1-\beta}}{[n_k^+(m) - j]^\beta} \sigma_{m,j}$$

В каждой внутренней точке области решения на характеристической плоскости уравнения (1.12) и (1.17) представляют собой замкнутую систему уравнений, достаточную для определения в этих узловых точках значений скорости $v_{m,n}$, деформации $\varepsilon_{m,n}$ и напряжения $\sigma_{m,n}$.

Значения $v_{m,n}$, $\sigma_{m,n}$ и $\varepsilon_{m,n}$ в точках нижней горизонтальной линии представляют начальные условия, они принимаются нулевыми

$$\sigma_{m,0} = 0; v_{m,0} = 0, \varepsilon_{m,0} = 0 (0 \leq m \leq m_*) \quad (1.18)$$

где m_* — номер узловой точки, соответствующий правому свободному от усилий торцу стержня $l = m_* \delta x$.

Границные условия представляются следующим образом:

$$\sigma_{0,n} = \begin{cases} \sigma_0, & 1 \leq n \leq n_* \\ 0, & n > n_* \end{cases} \quad (1.19)$$

$$v_{m_*,n} = 0, n > 0 \quad (1.20)$$

Условие (1.19) соответствует тому, что левый торец стержня в течение периода времени $t_0 = n_* \delta t$ подвержен воздействию нагрузки интенсивностью σ_0 . Формула (1.20) выражает условие отсутствия усилий на правом торце стержня. Для полноты системы соотношений, необходимых для определения всех трех величин — напряжения, скорости и деформации — на вертикалях $m = 0$ и $m = m_*$ характеристической плоскости соответствующих левому и правому торцам стержня, к (1.19) и (1.20) следует добавить следующие, а именно

$$\varepsilon_{0,n} = \Psi(z_{0,n})$$

$$v_{0,n} = v_{\Pi_0,n-1} - \frac{1}{c(\varepsilon_{0,n-1})} (\sigma_{0,n} - \sigma_{\Pi_0,n-1} - F_{\Pi_0,n-1} \delta t) \quad (1.21)$$

к соотношению (1.19) для левого торца стержня, и

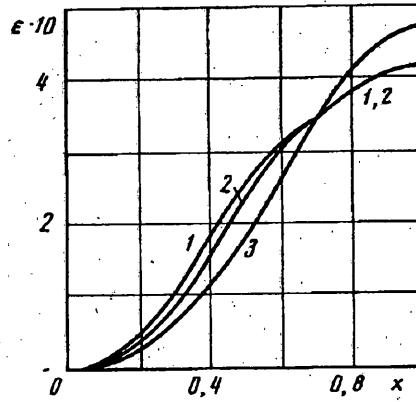
$$\varepsilon_{m_*,n} = \Psi(z_{m_*,n}),$$

$$\sigma_{m_*,n} = \sigma_{\Lambda_{m_*},n-1} + c(\varepsilon_{m_*,n-1}) (v_{m_*,n} - v_{\Lambda_{m_*},n-1}) - F_{\Lambda_{m_*},n-1} \delta t \quad (1.22)$$

к соотношению (1.20) для правого торца стержня.

Выписанная разностная схема, представляющая аналог схемы, данной в [4], также может рассматриваться как вариант схемы Куранта — Изаксона — Рисса, достаточным условием устойчивости которой будет [6] $\delta t \max \{c(\varepsilon)\} / \delta x < 1$.

На основе численной схемы была составлена программа на языке PL-1, реализованная на ЭВМ ЕС-1035. На фиг. 1 приведены кривые распределения деформации по длине однородного стержня для двух значений параметра нелинейности материала $\gamma = 0,5; 0,9$ и при $\varepsilon_1 = 0,2$ (случай частичного залечивания дефектов) и $\varepsilon_1 = 6$ (случай полного залечивания дефектов) для момента времени $t = 3$ ($n = 120$). Числовой расчет производится для следующих значений параметров задачи: $\lambda = 0,001; x = 0,02; \alpha = \beta = 0,8; \sigma_0 = -2; n_* = 8$ ($t_* = 0,2$); $m_* = 20$



Фиг. 1

$(\delta x = 0,05; \delta t = 0,5\delta x)$. Кривая 1 соответствует случаю $\gamma = 0,5; \varepsilon_1 = 0,2$; 2 — $\gamma = 0,5; \varepsilon_1 = 6$; 3 — $\gamma = 0,9; \varepsilon_1 = 0,2$.

2. Рассмотрим случай составного, кусочно-однородного стержня. Положим, что стержень состоит из q -однородных участков. Обозначим плотность, модуль Юнга, предел пропорциональности, скорость, напряжение, деформацию для i -го участка через $\bar{\rho}_i, \bar{E}_i, \bar{\varepsilon}_{0,i}, \bar{v}^i, \bar{\sigma}^i, \bar{\epsilon}^i$. Для каждого однородного участка справедливы определяющие уравнения (1.3), уравнения движения и неразрывности (1.2). Примем на каждом участке однородности ту же модель деформирования и накопления повреждений, что и для однородного стержня, то есть соотношения (1.5), (1.6). Начальные условия для всех участков будем рассматривать по-прежнему нулевыми. Границные условия на левом торце стержня $\bar{x} = 0$ будут иметь вид (1.19), где $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0^i$. На правом торце стержня $\bar{x} = \bar{L}$ справедливо условие (1.20), где $\bar{v} = \bar{v}^q$.

Определим условия на контакте двух однородных участков. Примем там условия непрерывности скоростей и усилий. Введем безразмерные величины согласно (1.1), где все размерные величины следует отметить индексом соответствующего участка, кроме лишь величины l , приняв $\bar{l} = \bar{L}$, где \bar{L} — длина всего стержня, т. е. $\bar{L} = \bar{l}_1 + \dots + \bar{l}_q$. Тогда на каждом участке однородности система разрешающих уравнений рассматриваемой задачи идентична той, что была получена для однородного стержня.

Условия на контакте двух однородных участков в размерных величинах имеют вид

$$\bar{\sigma}^i(\bar{L}_i, \bar{t}) = \bar{\sigma}^{i+1}(\bar{L}_i, \bar{t}), \quad \bar{v}^i(\bar{L}_i, \bar{t}) = \bar{v}^{i+1}(\bar{L}_i, \bar{t}) \quad (2.1)$$

$$\bar{L}_i = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \dots + \bar{l}_i$$

В безразмерных величинах условия (2.1) примут вид

$$\sigma^{i+1}(L_i, t_{i+1}) = \frac{E_i \varepsilon_{0,i}}{E_{i+1} \varepsilon_{0,i+1}} \sigma^i(L_i, t_i), \quad v^{i+1}(L_i, t_{i+1}) = \frac{c_{0,i} \varepsilon_{0,i}}{c_{0,i+1} \varepsilon_{0,i+1}} v^i(L_i, t_i) \quad (2.2)$$

Здесь $L_i = \bar{L}_i / \bar{L}$, $L_q = L = \bar{L} / \bar{L} = 1$. Возьмем $1 = L_q = m_q \delta x$, тогда $L_i = m_i \delta x$. Кроме того, для безразмерных времен на однородных участках согласно (1.1) справедливо

$$t_{i+1} = c_{0,i+1} t_i / c_{0,i} \quad (2.3)$$

Приняв $t_i = n_i \delta t_i$, а также $\delta t_i = k_i \delta x$, получим

$$n_{i+1} = c_{0,i+1} k_i n_i / (c_{0,i} t_{i+1}) \quad (2.4)$$

Требуя совпадения номеров временных слоев на участках однородности, из (2.4) получим:

$$k_1 = k_{0,1} c_{0,1} / c_{0,1} \quad (2.5)$$

Условие устойчивости численной схемы удовлетворится, если $k_1 \leq c_{0,1} / \max c_{0,i}$.

Итак, на каждом участке однородности пространственный шаг одинаков, временные же шаги (в безразмерных величинах) различны. Число разбиений временных интервалов на каждом участке однородности одинаково $n_i = n_{i+1}$. В этом случае дискретный аналог контактных условий (2.2) имеет вид

$$\sigma_{m_p, n}^{i+1} = a_{i, i+1} \sigma_{m_p, n}^i, v_{m_p, n}^{i+1} = b_{i, i+1} v_{m_p, n}^i \quad (2.6)$$

где $a_{i, i+1}, b_{i, i+1}$ представляют собой коэффициенты в правых частях условий (2.2). Величины в (2.6) будут определяться посредством значений этих величин в соседних точках сетки на своем участке однородности следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{m_p, n}^{i+1} &= - (v_{m_p, n}^{i+1} - v_{\Lambda_{m_p, n-1}}) c (\epsilon_{m_p, n-1}^{i+1}) - \sigma_{\Lambda_{m_p, n-1}}^{i+1} + F_{\Lambda_{m_p, n-1}}^{i+1} \\ \sigma_{m_p, n}^i &= \sigma_{\Lambda_{m_p, n-1}}^i - F_{\Lambda_{m_p, n-1}}^i + (v_{m_p, n}^i - v_{\Lambda_{m_p, n-1}}) c (\epsilon_{m_p, n-1}^i) \\ v_{m_p, n}^{i+1} &= v_{\Lambda_{m_p, n-1}}^{i+1} + (\sigma_{\Lambda_{m_p, n-1}}^{i+1} - \sigma_{m_p, n}^{i+1} - F_{\Lambda_{m_p, n-1}}^{i+1}) / c (\epsilon_{m_p, n-1}^{i+1}) \\ v_{m_p, n}^i &= v_{\Lambda_{m_p, n-1}}^i + (\sigma_{m_p, n-1}^i - \sigma_{\Lambda_{m_p, n-1}}^i + F_{\Lambda_{m_p, n-1}}^i) / c (\epsilon_{m_p, n-1}^i) \end{aligned} \quad (2.7)$$

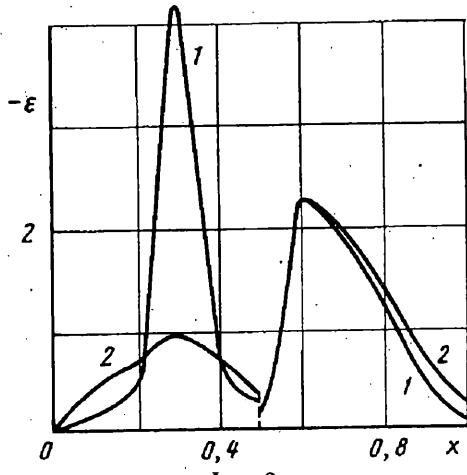
Итак, во внутренних точках каждого участка однородности, аналогично п. 1, будем иметь разностные уравнения (1.12), (1.13), (1.14), (1.15), (1.17) и начальные условия (1.18), где все величины следует снабдить индексом номера однородного участка. Для первого участка условия на левом конце имеют вид (1.19), (1.21). Для крайне правого, q -го, участка однородности условия на правом жестко защемленном торце будут определяться соотношениями (1.20), (1.22).

Так как числовая схема предполагает проведение расчёта слева направо, на одном временном слое, от места приложения нагрузки — левый конец первого участка однородности, до места жесткого закрепления — правый конец последнего, q -го участка однородности, то для применения численной модели п. 1 в целом для всего кусочно-однородного стержня достаточно определить, исходя из контактных условий, условия на левых концах однородных участков, начиная со второго. Эти условия будут (2.6), к которым следует добавить деформационное соотношение

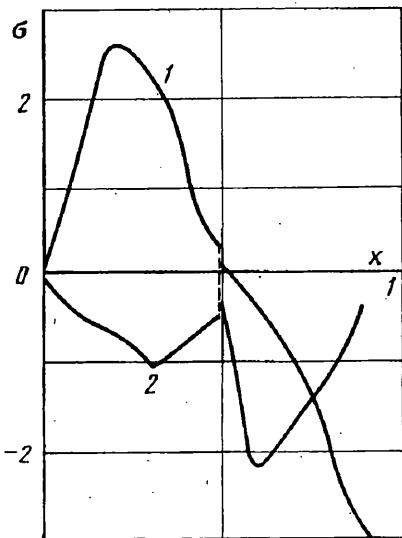
$$\epsilon_{m_p, n}^{i+1} = \Psi(z_{m_p, n}^{i+1}), x = L_i \quad (2.8)$$

Условия (2.6), (2.7) и (2.8) являются передаточными условиями от одного однородного участка к другому. Таким образом, представленный дискретный аналог задачи распространения волн в кусочно-однородном стержне является развитием численной схемы п. 1 на многослойный случай.

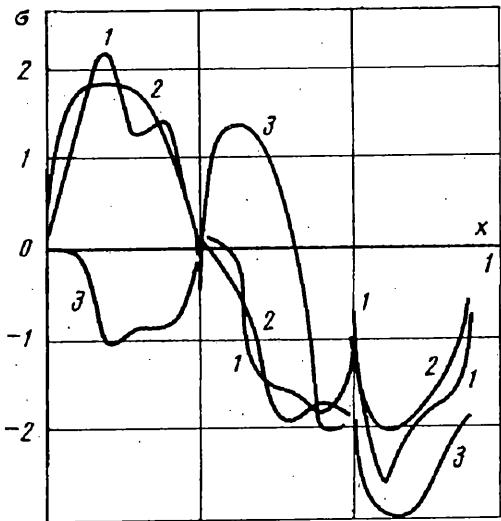
Численная реализация была проведена для двух случаев: когда стержень состоит из двух и трех однородных участков одинаковой длины. Для случая когда стержень состоит из двух однородных участков, было принято, что первый участок, по новому торцу которого производилось ударное нагружение, обладает свойствами нелинейной вязкости и поврежденности, а второй участок этими свойствами не обладает и представляет линейно упругий материал. На фиг. 2, 3 представлены кривые распределения деформаций по всей длине стержня для двух моментов безразмерного времени $t = 4,75$ и 6 ($c_{0,1} = c_{0,2}$), при следующих значениях числовых параметров: $a_{2,1} = 2, b_{2,1} = 1; \lambda_1 = 0,001; \chi_1 = 0,02; \alpha_1$



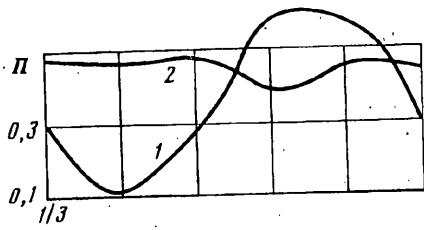
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

$\beta_1 = 0,8; \sigma_0 = -2; \gamma_1 = 0,5; 0,9; \varepsilon_1 = 0,02; 6; \lambda_2 = \kappa_2 = 0; t_0 = n_* \delta t = 0,4; \delta x = \delta t = 0,05$. На фиг. 2 кривая 1 соответствует значению $\varepsilon_1 = 0,2$; 2 — $\varepsilon_1 = 6,0$; на фиг. 3 кривая 1 соответствует значению $\gamma = 0,9$; 2 — $\gamma = 0,5$. Данные кривые свидетельствуют о существенном влиянии на распределение деформаций не только нелинейности материала, но и степени залечиваемости дефектов. В случае, когда стержень состоит из трех однородных участков одинаковой длины, свойством вязкости и поврежденности обладал средний, промежуточный участок, а крайние однородные участки брались линейно упругими. В качестве значений числовых параметров были приняты следующие: $\lambda_1 = \kappa_1 = 0; \gamma_1 = 1; a_{2,1} = 2; b_{2,1} = 1; \lambda_3 = \kappa_3 = 0; \gamma_3 = 1; a_{3,2} = 0,5; b_{3,2} = 1; \lambda_2 = 0,001; \kappa_2 = 0,02; \gamma_2 = 0,1; 0,5; \sigma_0 = -2; m_3 = 30; c_{0,1} = c_{0,2} = c_{0,3}; n = 120 (t = 4), n_* = 8 (t_0 = 0,27)$. На фиг. 4 представлены

кривые распределения напряжений по всей длине стержня в зависимости от степени нелинейности материала среднего участка и наличия у него свойств вязкости и поврежденности. Данные кривые свидетельствуют о весомости роли этих свойств. Наконец, на фиг. 5 приведены кривые распределения поврежденности вдоль среднего участка стержня, из которых яствует существенное влияние на это распределение степени нелинейности материала этого участка. На фиг. 4 кривая I соответствует случаю $\lambda_2 = \kappa_2 = 0$; $\gamma_2 = 0,5$; $2 - \lambda_2 = 0,001$; $\kappa_2 = 0,02$; $\gamma_2 = 0,5$; $3 - \lambda_2 = 0,001$; $\kappa_2 = 0,02$; $\gamma_2 = 0,1$; на фиг. 5 кривая I соответствует случаю $\lambda_2 = 0,001$; $\kappa_2 = 0,02$; $\gamma_2 = 0,5$; $2 - \lambda_2 = 0,001$; $\kappa_2 = 0,02$; $\gamma_2 = 0,1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никифоровский В. С., Шемякин Е. И. Динамическое разрешение твердых тел. Новосибирск: Наука, 1979. 271 с.
2. Рахматуллин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при кратковременных интенсивных нагрузках. М.: Наука, 1960. 399 с.
3. Локшин А. А., Суворова Ю. В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982. 152 с.
4. Суворова Ю. В., Осокин А. Е. Распространение одномерных волн в нелинейной наследственной среде//Мех. полимеров. 1978. № 3. С. 425—429.
5. Rabotnov Yu. N., Suvorova Yu. V., Osokin A. Ye. Deformation waves in nonlinear hereditary media//JUTAM. Symposium. Tallinn: 1982.
6. Courant R., Isacson E., Rees M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equation by finite differences//Communs Pure Appl. Math. 1952. Р. 243—254.
7. Кукуджанов В. Н. Многомерные задачи распределения волн напряжений в твердых телах//Сообщ. ВЦ АН СССР по прикл. матем. 1976. Вып. 6. С. 67.

Баку, Москва

Поступила в редакцию
13.IV.1992