

УДК 531.391

© 1994 г. В. А. ПОДЧУКАЕВ, А. А. СТРЕЛЬЦОВ

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СКОРОСТЕЙ
 АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЯ
 УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ В УСЛОВИЯХ ЗАВИСИМОСТИ
 МОМЕНТОВ СИЛ ОТ ЛИНЕЙНЫХ СКОРОСТЕЙ**

Рассмотрена задача восстановления значений линейных скоростей абсолютно твердого тела по измерениям угловых скоростей в условиях зависимости моментов сил от линейных скоростей. Построен алгоритм синтеза наблюдающего устройства, основанный на приведении системы уравнений, представленной с помощью функциональных матриц [1], к блочной форме Фробениуса. Приведен пример использования разработанного метода для восстановления линейных скоростей гипотетического самолета, движущегося в невозмущенной атмосфере.

1. Рассмотрим движение абсолютно твердого тела в связанной системе координат (ССК), описываемое уравнениями Эйлера, разрешенными относительно первых производных [2]:

$$\begin{aligned} V_x^* &= V_y \omega_z - V_z \omega_y + R_x/m, & V_y^* &= V_z \omega_x - V_x \omega_z + R_y/m \\ V_z^* &= V_x \omega_y - V_y \omega_x + \frac{R_z}{m}, & \omega_x^* &= \frac{I_y - I_z}{I_x} \omega_y \omega_z + \frac{1}{I_x} M_x \\ \omega_y^* &= \frac{I_z - I_x}{I_y} \omega_x \omega_z + \frac{1}{I_y} M_y, & \omega_z^* &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_x \omega_y + \frac{1}{I_z} M_z \end{aligned} \quad (1.1)$$

которые с помощью функциональных матриц допускают векторно-матричное представление

$$\dot{x}^* = [P(x, t)] \dot{x} + F(x \in R^6, F \in R^6), \quad x = \text{colon } [V_x V_y V_z \omega_x \omega_y \omega_z] \quad (1.2)$$

$$[P(x, t)] = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & 0 & 0 & 0 \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_y - I_z}{2I_x} \omega_z & \frac{I_y - I_z}{2I_x} \omega_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_z - I_x}{2I_y} \omega_z & 0 & \frac{I_z - I_x}{2I_y} \omega_x \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_x - I_y}{2I_z} \omega_y & \frac{I_x - I_y}{2I_z} \omega_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} R_x \\ \frac{1}{m} R_y \\ \frac{1}{m} R_z \\ \frac{1}{I_x} M_x \\ \frac{1}{I_y} M_y \\ \frac{1}{I_z} M_z \end{pmatrix}$$

Здесь x — вектор состояний; F — вектор внешних воздействий; m — масса; V_x, V_y, V_z — проекции вектора линейной скорости центра масс на оси ССК; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции вектора угловой скорости на оси ССК; I_x, I_y, I_z — моменты инерции относительно главных осей; R_x, R_y, R_z — проекции вектора сил на оси ССК; M_x, M_y, M_z — проекции вектора главного момента на оси ССК; t — время; $[P(x, t)]$ — функциональная матрица, определенная на решениях уравнения

(1.1), такая что подстановка в нее любого нетривиального решения этого уравнения обращает ее в матрицу функций времени, а подстановка тривиального решения — в матрицу чисел.

Будем полагать, что измерению доступны лишь угловые скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, введя в рассмотрение следующее уравнение:

$$y = Dx, \quad y \in R^3 \quad (1.3)$$

где $y = \text{colop} [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ — вектор измерений $D = [\theta_3 E_3]$ — блочная матрица параметров измерителей, в которой через E_3, θ_3 обозначены соответственно единичная и нулевая матрицы размера 3×3 .

Поскольку функциональная матрица $[P(x, t)]$ в уравнении (1.2) зависит только от вектора измерений y , это уравнение можно переписать в виде

$$\dot{x} = [P(y, t)]x + F \quad (1.4)$$

что дает возможность обобщить на него теорию наблюдателей полного порядка (см., например, [3]), поставив следующую задачу: требуется синтезировать наблюдатель полного порядка

$$x^v = [P(y, t)]x^v + [G(y, t)](y - Dx^v) + F, \quad x^v \in R^6 \quad (1.5)$$

где x^v — вектор состояний наблюдателя, $[G(y, t)]$ — искомая матрица его параметров, исходя из экспоненциальной устойчивости тривиального решения уравнения асимптотической оценки

$$e = [P(y, t)]e - [G(y, t)]De, \quad e \in R^6 \quad (1.6)$$

полученного вычитанием уравнения (1.5) из (1.4) с учетом обозначения $e = x - x^v$, где e — вектор ошибки восстановления.

При этом экспоненциальная устойчивость тривиального решения уравнения (1.6) означает, что при $t \rightarrow \infty$ имеет место $e \rightarrow 0$, и, как следствие, $x^v \rightarrow x$. Таким образом, измеряя только угловые скорости абсолютно твердого тела, интегрированием уравнения наблюдателя (1.5) можно получать информацию о неизмеряемых линейных скоростях, представляющих собой первые три компоненты вектора состояний наблюдателя.

Выясним условия осуществимости наблюдателя, не затрагивая пока вопрос о формировании в (1.5) вектора внешних воздействий F .

2. В основе синтеза наблюдателей полного порядка лежит двойственность задач управления и наблюдения, основанная на том, что экспоненциальная устойчивость системы (1.6) эквивалентна экспоненциальной устойчивости «транспонированной» системы

$$z = [P^T(y, t)]z - D^T [G^T(y, t)]z, \quad z \in R^6$$

которая введением обозначения

$$u = -[G(y, t)]z, \quad u \in R^3 \quad (2.1)$$

может быть представлена в виде

$$z = [P^T(y, t)]z + D^T u \quad (2.2)$$

Тем самым, синтез наблюдателя полного порядка (1.5) исходя из экспоненциальной устойчивости уравнения асимптотической оценки (1.6) эквивалентен поиску закона управления (2.1), доставляющего экспоненциальную устойчивость системе (2.2), замкнутой регулятором (2.1).

Будем решать последнюю задачу, как задачу синтеза приводимых систем [4], т. е. найдем закон управления (2.1) такой, что объект управления (2.2), замкнутый этим законом, ляпуновским преобразованием $z = [L(y, t)]s, s \in R^6$ приводим к системе $\dot{s} = Ns$, где N — заданная гурвицева матрица чисел, $[L(y, t)]$ — функциональная невырожденная матрица, определенная на решениях

уравнения (1.1), такая, что все ее элементы вместе с элементами обратной к ней матрицы, а также матрицы, являющейся первой производной от нее, определены, непрерывны и ограничены на решениях этого уравнения.

Необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи состоит в полной управляемости пары $[P^T(y, t), D^T]$ или в выполнении условия

$$\text{rank } [D^T D^0 D^T] = 6 \quad (2.3)$$

$$D^0 = [P^T(y, t)] - E_6 d/dt (\dots)$$

где D^0 — дифференциальный оператор, в котором через E_6 обозначена единичная матрица размера 6×6 .

Матрица $[P^T(y, t)]$ имеет блочную форму

$$[P^T(y, t)] = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

с блоками $p_{ij}(y, j=1,2)$ размера 3×3 , определяемыми равенствами

$$p_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix}, \quad p_{22} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{I_z - I_x}{2I_y} \omega_z & \frac{I_x - I_y}{2I_z} \omega_y \\ \frac{I_y - I_z}{2I_x} \omega_z & 0 & \frac{I_x - I_y}{2I_y} \\ \frac{I_y - I_z}{2I_x} \omega_y & \frac{I_z - I_x}{2I_y} \omega_x & 0 \end{vmatrix}$$

$$p_{11} = p_{21} = \theta_3$$

Подставляя (2.4) в (2.3), получим матрицу управляемости

$$[W(y, t)] = [D^T D^0 D^T] = \begin{vmatrix} \theta_3 & p_{12} \\ E_3 & p_{22} \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

с рангом, равным трем, что означает неуправляемость объекта (2.2). Из (2.5) следует, что условие полной управляемости состоит в выполнении неравенства

$$\det p_{12} \neq 0 \quad (2.6)$$

Поэтому для удовлетворения этого условия можно использовать то, что правые части (1.4), (1.5) не изменятся, если к ним прибавить $\Phi x - \Phi x$ и $\Phi x^v - \Phi x^v$ соответственно, где Φ — заданная матрица чисел

$$\Phi = \begin{vmatrix} \theta_3 & \theta_3 \\ p_{12}^T & \theta_3 \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

с блоком чисел p_{12} , удовлетворяющим условию (2.6). Результатом будет следующая система уравнений объекта и наблюдателя:

$$x' = [P_1(y, t)] x + F_1 \quad (2.8)$$

$$x^v = [P_1(y, t)] x^v + [G(y, t)] (y - Dx^v) + F_1^v \quad (2.9)$$

$$[P_1(y, t)] = [P(y, t)] + \Phi, \quad F_1 = F - \Phi x, \quad F_1^v = F - \Phi x^v$$

При этом члены $-\Phi x$, $-\Phi x^v$ будем трактовать как слагаемые векторов внешних воздействий F_1 и F_1^v соответственно, получив уравнение асимптотической оценки в виде

$$e' = [P_1(y, t)] e - [G(y, t)] D e + F_1 - F_1^v \quad (2.10)$$

что дает основание вместо уравнения (2.2) рассматривать уравнение

$$z' = [P_1^T(y, t)] z + D^T u \quad (2.11)$$

с полностью управляемой парой $[P_1^T(y, t), D^T]$.

Следует отметить, что присутствие в правой части (2.10) члена $F_1 - F_1^y$ приводит к появлению в векторе ошибки восстановления методической ошибки. Избавиться от этой ошибки можно лишь в случае, когда слагаемые трех последних компонент вектора внешних воздействий F содержат члены, линейно зависящие от скоростей V_x, V_y, V_z , т. е. вектор F допускает представление

$$F = F_3 - \Psi x, \quad \Psi = \begin{vmatrix} \theta_3 & \theta_3 \\ \psi_{21} & \theta_3 \end{vmatrix}$$

Тогда, если $\det \psi_{21} \neq 0$, то включение блока ψ_{21} в матрицу параметров объекта управления $[P_1(y, t)] = [P(y, t)] + \Psi$ позволяет достичь полной управляемости пары $[P_1^T(y, t)], D^T$.

3. Будем решать поставленную задачу синтеза наблюдателя как задачу синтеза приводимых систем приведением к блочной форме Фробениуса [4], для чего опишем алгоритм приведения к этой форме.

Этот алгоритм состоит в построении невырожденного нелинейного преобразования

$$z [L(y, t)] s, \quad s \in R^6 \quad (3.1)$$

вектора состояний системы

$$z' = [P_1^T(y, t)] z + D^T u \quad (3.2)$$

приводящего его к виду

$$s' = [P_2(y, t)] s + e_2 u \quad (3.3)$$

$$[P_2(y, t)] = \begin{vmatrix} \theta_3 & E_3 \\ -\alpha_2(y, t) & -\alpha_1(y, t) \end{vmatrix}, \quad e_2 = \begin{vmatrix} \theta_3 \\ E_3 \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

где $\alpha_1(y, t), \alpha_2(y, t)$ — искомые функциональные матрицы размера 3×3 .

Покажем сначала, что замена переменных

$$z = [W(y, t)] r, \quad r \in R^6, \quad [W(y, t)] = [D^T D^0 D^T] \quad (3.5)$$

приводит систему (3.2) к блочной форме Люенбергера

$$r' = [P_3(y, t)] r + e_1 u \quad (3.6)$$

$$[P_3(y, t)] = \begin{vmatrix} \theta_3 & H_2(y, t) \\ E_3 & H_1(y, t) \end{vmatrix}, \quad e_1 = \begin{vmatrix} E_3 \\ \theta_3 \end{vmatrix}, \quad D^0 = [P_1^T(y, t)] - E_6 \frac{d}{dt}(\cdot) \quad (3.7)$$

где $H_1(y, t), H_2(y, t)$ — функциональные матрицы размера 3×3 , которые будут определены ниже.

Действительно, замена переменных (3.5) дает с учетом (3.7):

$$\begin{aligned} r' &= [W^{-1}(y, t)] P_1^T(y, t) W(y, t) - W^{-1}(y, t) W'(y, t) r + \\ &+ [W^{-1}(y, t)] D^T u = [W^{-1}(y, t)] D^0 W(y, t) r + \\ &+ [W^{-1}(y, t)] D^T u = [W^{-1}(y, t)] D^0 D^T W^{-1}(y, t) D^0 D^T r + \\ &+ [W^{-1}(y, t)] D^T u \end{aligned} \quad (3.8)$$

Наряду с (3.8) рассмотрим тождество $[W^{-1}(y, t)] [W(y, t)] = E_6 = [e_1 e_2]$, которое с учетом (3.5) можно представить в виде

$$[W^{-1}(y, t)] [D^T D^0 D^T] = [W^{-1}(y, t)] D^T W^{-1}(y, t) D^0 D^T = [e_1 e_2]$$

откуда следует $[W^{-1}(y, t)] D^T = e_1, [W^{-1}(y, t)] D^0 D^T = e_2$. Это дает основание

переписать правую часть (3.8) как

$$\dot{r} = [e_2 H(y, t)] r + e_1 u \quad (3.9)$$

$$[H(y, t)] = [W^{-1}(y, t) D^{02} D^T] = \begin{bmatrix} H_2 & (y, t) \\ H_2 & (y, t) \end{bmatrix}$$

Таким образом, справедливость (3.7) доказана.

Заметим, что к виду, аналогичному (3.6), может быть приведена и система (3.3) с блочной матрицей Фробениуса (3.4), если в качестве нелинейного преобразования состояний этой системы использовать невырожденное преобразование

$$s = [\Gamma(y, t)] r \quad (3.10)$$

с матрицей управляемости

$$[\Gamma(y, t)] = [e_2 D_1^0 e_2] = \begin{bmatrix} \theta_3 & E_3 \\ E_3 & -\alpha_1(y, t) \end{bmatrix}, \quad D_1^0 = [P_2(y, t)] - E_6 \frac{d}{dt}(\cdot)$$

которое позволяет переход к виду (3.3) системы (3.2) организовать заменой состояний по формуле (3.1), где

$$[L(y, t)] = [W(y, t) \Gamma^{-1}(y, t)] \quad (3.11)$$

Легко проверить, что результатом замены (3.10) будет система (3.6) с матрицей Люенбергера, определяемой выражением

$$[P_3(y, t)] = \begin{bmatrix} \theta_3 & -\alpha_2(y, t) + \alpha_1(y, t) \\ E_3 & -\alpha_1(y, t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Для отыскания неизвестных блоков $\alpha_i(y, t)$ ($i = 1, 2$) достаточно приравнять правый столбец полученной матрицы правому столбцу матрицы $[P_3(y, t)]$, определяемому выражением (3.9), найденному в результате первого преобразования (3.5):

$$[H(y, t)] = \begin{bmatrix} p_{22} p_{12}^{-1} p_{12} - p_{22} p_{12}^{-1} p_{11} p_{12} + p_{21} p_{12} - p_{22} \\ p_{22}^{-1} p_{11} p_{12} - p_{12}^{-1} p_{12} + p_{22} \end{bmatrix}$$

что позволяет искомые блоки $\alpha_i(y, t)$ ($i = 1, 2$) блочной формы Фробениуса найти в виде

$$\alpha_1(y, t) = p_{12}^{-1} p_{12} - p_{12}^{-1} p_{11} p_{12} - p_{22} \quad (3.13)$$

$$\alpha_2(y, t) = p_{12}^{-1} p_{12} - p_{12}^{-1} p_{11} p_{12} - p_{12}^{-1} p_{11} p_{12} - (p_{12}^{-1} p_{12} p_{12}^{-1} + p_{22} p_{12}^{-1}) (p_{12} - p_{11} p_{12}) - p_{21} p_{12}$$

Для того чтобы система (3.3) была системой с постоянными коэффициентами и, как следствие, исходная система (3.2) была приводимой [4], необходимо закон управления системой (3.3) взять в виде

$$u = [K(y, t)] s = \|\alpha_2(y, t) - \beta_2 E_3 \alpha_1(y, t) - \beta_1 E_3\| s$$

где $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ — заданные коэффициенты минимального многочлена приведенной системы $\lambda^2 + \beta_1 \lambda + \beta_2 = 0$.

Тогда с учетом (2.1), (3.11) исходную матрицу параметров наблюдателя найдем согласно

$$[G(y, t)] = - \|K(y, t) \Gamma(y, t) W^{-1}(y, t)\|^T \quad (3.14)$$

4. Проиллюстрируем описанную методику на примере восстановления линей-

ных скоростей одномоторного самолета, уравнения движения которого с дозвуковой скоростью в невозмущенной атмосфере имеют вид [5]:

$$\begin{aligned} V_x' &= \omega_z V_y - \omega_y V_z + \frac{qSc_x^{\delta_h}(\alpha)}{m} \delta_h + \frac{\cos \varphi}{m} p + \frac{qSc_x(\alpha)}{m} - g \sin \vartheta \\ V_y' &= \omega_x V_z - \omega_z V_x + \frac{qSc_y^{\delta_h}(\alpha)}{m} \delta_h + \frac{\sin \varphi}{m} p + \frac{qSc_y(\alpha)}{m} - g \cos \gamma \cos \vartheta \\ V_z' &= \omega_y V_x - \omega_x V_y + \frac{qSc_z^{\delta_n}(\alpha)}{m} \delta_n + \frac{qSc_z(\alpha)}{m} + g \sin \gamma \cos \vartheta \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \omega_x' &= \frac{I_y - I_z}{I_x} \omega_y \omega_z + \frac{qSl^2 m_x^{\omega_x}(\alpha)}{2I_x V} \omega_x + \frac{qSl^2 m_x^{\omega_y}(\alpha)}{2I_x V} \omega_y + \\ &+ \frac{qSl m_x^{\delta_n}(\alpha)}{I_x} \delta_n + \frac{qSl m_x^{\delta_e}(\alpha)}{I_x} \delta_e + \frac{qSl m_x(\alpha, \beta)}{I_x} \\ \omega_y' &= \frac{I_z - I_x}{I_y} \omega_x \omega_z + \frac{qSl^2 m_y^{\omega_x}(\alpha)}{2I_y V} \omega_x + \frac{qSl^2 m_y^{\omega_y}(\alpha)}{2I_y V} \omega_y - \\ &- \frac{K_*}{I_y} \omega_z + \frac{qSl m_y^{\delta_e \delta_h}(\alpha)}{I_y} \delta_e \delta_h + \frac{qSl m_y^{\delta_n}(\alpha)}{I_y} \delta_n + \frac{qSl m_y^{\delta_e}(\alpha)}{I_y} \delta_e + \frac{qSl m_y(\alpha, \beta)}{I_y} \\ \omega_z' &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_x \omega_y + \frac{qSb_a^2 m_z^{\omega_2}(\alpha)}{I_z V} \omega_z + \frac{K_*}{I_z} \omega_y + \frac{qSb_a m_z^{\delta_h}(\alpha)}{I_z} \delta_h + \frac{qSb_a m_z(\alpha)}{I_z} \end{aligned}$$

$$q = 0,5\rho V^2, \quad V = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)^{1/2}, \quad \alpha = -\arcsin(V_y/\sqrt{V_x^2 + V_y^2})$$

$$\beta = \arcsin(V_z/V)$$

где ρ — плотность воздуха; α — угол атаки; β — угол скольжения; ν — угол тангажа; γ — угол крена; δ_h — угол отклонения руля высоты; δ_n — угол отклонения руля направления; δ_e — угол отклонения элеронов; P — тяга двигателя; $c_x(\alpha)$, $c_y(\alpha)$, $c_z(\alpha)$, $c_x^{\delta_h}(\alpha)$, $c_y^{\delta_n}(\alpha)$, $c_z^{\delta_e}(\alpha)$, $m_x(\alpha, \beta)$, $m_y(\alpha, \beta)$, $m_z(\alpha)$, $m_x^{\omega_x}(\alpha)$, $m_x^{\omega_y}(\alpha)$, $m_y^{\omega_x}(\alpha)$, $m_y^{\omega_y}(\alpha)$, $m_z^{\omega_2}(\alpha)$, $m_x^{\delta_n}(\alpha)$, $m_x^{\delta_e}(\alpha)$, $m_y^{\delta_e \delta_h}(\alpha)$, $m_y^{\delta_n}(\alpha)$, $m_y^{\delta_e}(\alpha)$, $m_z^{\delta_h}(\alpha)$ — аэродинамические коэффициенты; S — площадь крыльев; l — размах крыльев; b_a — средняя аэродинамическая хорда крыла; K_* — суммарный момент количества движения вращающихся частей двигателя; φ — угол между направлением силы тяги и осью Ox ССК; g — ускорение свободного падения.

При записи уравнений (4.1) в векторно-матричной форме (2.8), с $p_{12}^n = E_3$ вектор внешних воздействий F_1 можно представить в виде $F_1 = F_1^1 + F_1^2$, где F_1^1 — составляющая, компоненты которой содержат аэродинамические коэффициенты, зависящие от восстанавливаемых линейных скоростей, F_1^2 — составляющая, не содержащая таких коэффициентов:

$$\begin{aligned} F_{11}^1 &= \frac{\cos \varphi}{m} p - g \sin \vartheta, & F_{12}^1 &= \frac{\sin \varphi}{m} p - g \cos \gamma \cos \vartheta \\ F_{13}^1 &= g \sin \gamma \cos \vartheta, & F_{14}^1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

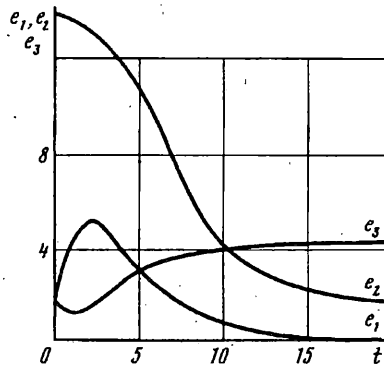
$$F_{15}^1 = -\frac{K_*}{I_y} \omega_z, \quad F_{16}^1 = \frac{K_*}{I_z} \omega_y, \quad F_{11}^2 = \frac{qSc_x^{\delta_h}(\alpha)}{m} \delta_h + \frac{qSc_x(\alpha)}{m} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
F_{12}^2 &= \frac{qSc_y^{\delta_h}(\alpha)}{m} \delta_h + \frac{qSc_y(\alpha)}{m}, \quad F_{13}^2 = \frac{qSc_z^{\delta_n}(\alpha)}{m} \delta_n + \frac{\delta Sc_z(\alpha)}{m} \\
F_{14}^2 &= \frac{qSl^2 m_x^{\omega_x}(\alpha)}{2I_x V} \omega_x + \frac{qSl^2 m_x^{\omega_y}(\alpha)}{2I_x V} \omega_y + \frac{qSlm_x^{\delta_n}(\alpha)}{I_x} \delta_n + \\
&+ \frac{qSlm_x^{\delta_e}(\alpha)}{I_x} \delta_e + \frac{qSlm_x(\alpha, \beta)}{I_x} - V_x \\
F_{15}^2 &= \frac{qSl^2 m_y^{\omega_x}(\alpha)}{2I_y V} \omega_x + \frac{qSl^2 m_y^{\omega_y}(\alpha)}{2I_y V} \omega_y + \frac{qSlm_y^{\delta_n}(\alpha)}{I_y} \delta_n + \frac{qSlm_y^{\delta_e}(\alpha)}{I_y} \delta_e + \\
&+ \frac{qSlm_y^{\delta_e \delta_{pb}}(\alpha)}{I_y} \delta_e \delta_h + \frac{qSlm_y(\alpha, \beta)}{I_y} - V_y \\
F_{16}^2 &= \frac{qSb_a^2 m_z^{\omega_z}(\alpha)}{I_z V} \omega_z + \frac{qSb_a m_z^{\delta_h}(\alpha)}{I_z} \delta_h + \frac{qSb_a m_z(\alpha)}{I_z} - V_z
\end{aligned}$$

В предположении измеримости углов $\varphi, \beta, \alpha, \vartheta, \gamma, \delta_h, \delta_n, \delta_e$ реализация вектора $F_1^{V^1}$ в составе наблюдателя может быть вычислена с точностью до погрешности измерения углов $\varphi, \vartheta, \gamma$, в то время как реализация $F_1^{V^2}$ может быть вычислена лишь приближенно по результатам восстановления линейных скоростей. При этом методическая ошибка восстановления линейных скоростей V_x, V_y, V_z будет определяться разностью вектор F_1^2 и $F_1^{V^2}$, т. е. вектором $\Delta F = F_1^2 - F_1^{V^2}$, компоненты которого имеют вид

$$\begin{aligned}
\Delta F_1 &= \frac{Sc_x^{\delta_h}(\alpha) \delta_h + c_x(\alpha)}{m} (q - q^V), \quad \Delta F_2 = \frac{Sc_y^{\delta_h}(\alpha) \delta_h + c_y(\alpha)}{m} (q - q^V) \\
\Delta F_3 &= \frac{Sc_z^{\delta_n}(\alpha) \delta_h + c_z(\alpha)}{m} (q - q^V) \tag{4.4} \\
\Delta F_4 &= \frac{Sl}{I_x} \left[\frac{l}{2} (m_x^{\omega_x} \omega_x + m_x^{\omega_y} \omega_y) \left(\frac{q}{V} - \frac{q^V}{V^V} \right) + \right. \\
&+ (m_x^{\delta_n}(\alpha) \delta_n + m_x^{\delta_e}(\alpha) \delta_e + m_x(\alpha, \beta)) (q - q^V) \left. \right] - V_x + V_x^V \\
\Delta F_5 &= \frac{Sl}{I_y} \left[\frac{l}{2} (m_y^{\omega_x}(\alpha) \omega_x + m_y^{\omega_y}(\alpha) \omega_y) \left(\frac{q}{V} - \frac{q^V}{V^V} \right) + \right. \\
&+ (m_y^{\delta_n}(\alpha) \delta_n + m_y^{\delta_e}(\alpha) \delta_e + m_y^{\delta_e \delta_h}(\alpha) \delta_e \delta_h + m_y(\alpha, \beta)) (q - q^V) \left. \right] - V_y + V_y^V \\
\Delta F_6 &= \frac{Sb_a}{I_z} \left[b_a m_z^{\omega_z} \omega_z \left(\frac{q}{V} - \frac{q^V}{V^V} \right) + (m_z^{\delta_{pb}}(\alpha) \delta_{pb} + m_z(\alpha)) (q - q^V) \right] - V_z + V_z^V \\
q^V &= 1/2 \rho V^{V^2}, \quad V^V = (V_x^{V^2} + V_y^{V^2} + V_z^{V^2})^{1/2}
\end{aligned}$$

Из (4.4) видно, что при $V \rightarrow V^V$ имеет место $\Delta F \rightarrow 0$. Тем самым методическая погрешность восстановления линейных скоростей, представляющая собой сумму свободной и вынужденной составляющих решения уравнения (2.10), будет иметь конечную величину, поскольку свободная составляющая стремится к нулю по построению, а вынужденная составляющая экспоненциально устойчивой системы от исчезающего внешнего воздействия — ограничена.



Искомая матрица параметров наблюдателя, вычисленная по формуле (3.14), имеет вид

$$[G(y, t)] = \begin{vmatrix} -\omega_2^2 - \omega_y^2 + \beta_2 & \omega_2 + \omega_x \omega_y + \beta_1 \omega_2 & -\omega_y + \omega_z \omega_x - \beta_1 \omega_y \\ -\omega_2^2 + \omega_x \omega_y - \beta_1 \omega_2 & -\omega_2^2 - \omega_x^2 + \beta_2 & \omega_x + \omega_y \omega_z + \beta_1 \omega_x \\ \omega_y + \omega_z \omega_x + \beta_1 \omega_y & -\omega_x + \omega_y \omega_z - \beta_1 \omega_x & -\omega_2^2 - \omega_x^2 + \beta_2 \\ \beta_1 & \omega_z + \frac{I_y - I_z}{2I_x} \omega_z & -\omega_y + \frac{I_y - I_z}{2I_x} \omega_y \\ -\omega_z + \frac{I_z - I_x}{2I_y} \omega_z & \beta_1 & \omega_x + \frac{I_z - I_x}{2I_y} \omega_x \\ \omega_y + \frac{I_x - I_y}{2I_z} \omega_y & -\omega_x + \frac{I_x - I_y}{2I_x} \omega_x & \beta_1 \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

Входящие в данную матрицу первые производные угловых скоростей предполагаются измеряемыми. Если же они недоступны измерению, то их можно найти путем численного дифференцирования угловых скоростей или использовать вместо них значения правых частей уравнений наблюдателя для угловых скоростей.

Численное интегрирование уравнений движения самолета (4.1) и синтезированного наблюдателя полного порядка с матрицей параметров (4.5) проведено для следующих значений аэродинамических коэффициентов и массо-габаритных параметров, принятых постоянными: $c_x(\alpha) = -0,466$; $c_x^{\delta}(\alpha) = -0,344 \text{ sign } \delta_*$; $c_y(\alpha) = 1,491$; $c_y^{\delta}(\alpha) = 1,719$; $c_z(\alpha) = 0,241$; $c_z^{\delta}(\alpha) = -1,512$; $m_x(\alpha, \beta) = 0,0015$; $m_x^{\omega}(\alpha) = -0,0375$; $m_x^{\omega_y}(\alpha) = -0,0159$; $m_x^{\omega_z}(\alpha) = -2,865$; $m_x^{\delta}(\alpha) = 1,948$; $m_y(\alpha, \beta) = 0,0034$; $m_y^{\omega_x}(\alpha) = 0,0047$; $m_y^{\omega_y}(\alpha) = -0,0216$; $m_y^{\delta}(\alpha) = 0$; $m_y^{\delta_e}(\alpha) = -3,438$; $m_y^{\delta_e}(\alpha) = -2,33$; $m_z(\alpha) = -0,05$; $m_z^{\omega_z}(\alpha) = 0,381$; $m_z^{\delta}(\alpha) = -3,438$; $m = 13\,000 \text{ кг}$; $I_x = 130 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I_y = 1040 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I_z = 1300 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $S = 82 \text{ м}^2$; $l = 30 \text{ м}$; $b_a = 2,9 \text{ м}$; $K_* = 104 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$.

Моделирование проводилось при отсутствии внешних воздействий в предположении, что как самолет, так и наблюдатель подвержены только возмущениям начальных условий, которые были приняты равными

$$\begin{array}{l} x(t_0) = \text{colon} \\ x^y(t_0) = \text{colon} \end{array} \begin{bmatrix} [159,11 & -13,76 & 2,13 & 0 & 0 & 0] \\ [157,30 & -27,73 & 0,3 & 0 & 0 & 0] \end{bmatrix}$$

Результаты моделирования (кривые изменения во времени ошибок восстановления линейных скоростей самолета $e_1 = V_x - V_x^V$, $e_2 = V_y - V_y^V$, $e_3 = V_z - V_z^V$) приведены на фигуре (кривые 1—3 соответствуют e_1 , e_2 — e_3 , из которой видно, что ошибка восстановления скорости V_x стремится к нулю, а установившиеся ошибки восстановления скоростей V_y , V_z малы настолько, что модуль вектора скорости, рассчитанный по восстановленным значениям линейных скоростей V^V отличается от истинного значения модуля вектора скорости V лишь на десятые доли процента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подчукаев В. А. Новый критерий устойчивости нелинейных систем//Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. № 6. С. 154—161.
2. Боднер В. А. Теория автоматического управления полетом. М.: Наука, 1964. 698 с.
3. Подчукаев В. А. Быстрые алгоритмы анализа и синтеза систем автоматического регулирования на основе полиномиальных функций их параметров. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. 111 с.
4. Подчукаев В. А. Метод функциональных матриц в анализе и синтезе нелинейных систем// Автоматическое управление объектами с переменными характеристиками. Новосибирск: Электротехн. ин-т, 1988. С. 70—76.
5. Буков В. Н. Адаптивные прогнозирующие системы автоматического управления полетом. М.: Наука, 1987. 230 с.

Саратов

Поступила в редакцию
12.VI.1989