

УДК 539.3

© 1994 г. В. Г. ПОПОВ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ РЕЛЕЯ С ТОНКИМ ЖЕСТКИМ КРАЕВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, РАСПОЛОЖЕННЫМ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В настоящее время актуальной задачей является повышение сейсмостойкости и вибрационной надежности фундаментов сооружений, элементы которых могут быть представлены как тонкая жесткая стенка, заглубленная в грунт и выходящая на его поверхность. В предлагаемой работе такой элемент моделируется тонким жестким краевым включением, выходящим на поверхность полуплоскости (среда находится в состоянии плоской деформации), взаимодействующим с распространяющейся вдоль поверхности плоской гармонической волной Релея. При этом исследуются параметры движения включения, воздействие на него со стороны среды, напряженное состояние среды вблизи включения.

1. Пусть в упругой полуплоскости $-\infty < x < +\infty$, $y > 0$, верхняя граница которой свободна от напряжений

$$\sigma_y(x, 0) = \tau_{yx}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (1.1)$$

на отрезке $x = 0$, $0 \leq y \leq h$, расположено тонкое жесткое включение. На включении терпят разрыв нормальные напряжения со скачком

$$\langle \sigma_x \rangle = \sigma_x(+0, y) - \sigma_x(-0, y) = \mu \chi(y), \quad y \in [0, h] \quad (1.2)$$

$$\chi(y) \equiv 0, \quad y > h$$

Вдоль положительного направления оси X распространяется плоская гармоническая волна Релея, вызывающая в среде перемещения

$$u_R(x, y) = c \exp(i\kappa_R x) [\exp(-\kappa_2 g_1 y) - (\mu_R g_2 / \xi_R) \exp(-\kappa_2 g_2 y)] \quad (1.3)$$

$$v_R(x, y) = ci \exp(i\kappa_R x) [(g_1 / \xi_R) \exp(-\kappa_2 g_1 y) - \mu_R \exp(-\kappa_2 g_2 y)]$$

$$g_1 = \sqrt{\xi_R^2 - \xi^2}, \quad g_2 = \sqrt{\xi_R^2 - 1}, \quad g_3 = 2\xi_R^2 - 1, \quad \xi = \frac{c_2}{c_1}, \quad \xi_R = \frac{c_2}{c_R}$$

$$\mu_R = 2\xi_R g_1 / g_3, \quad \kappa_R = \omega / c_R, \quad \kappa_j = \omega / c_j \quad (j = 1, 2)$$

Здесь c_1 , c_2 , c_R — скорости продольной, поперечной и поверхностной волн в среде, ω — частота колебаний. Временной множитель $\exp(i\omega t)$, в силу линейности здесь и далее опущен.

Будем предполагать, что включение может совершать горизонтальные (вдоль оси X) перемещения и поворот относительно оси, проходящей через начало координат. Тогда на линии включения должно быть выполнено условие

$$u(\pm 0, y) = \delta + \gamma y, \quad 0 \leq y \leq h \quad (1.4)$$

где δ — горизонтальные перемещения, γ — угол поворота включения.

Перемещения в упругой полуплоскости представим в виде

$$u = u_1 + u_2 + u_R, \quad v = v_1 + v_2 + v_R \quad (1.5)$$

где u_1 , v_1 — разрывное решение уравнений Ламе со скачком (1.2) на линии

включения, а u_2 и v_2 разрывное решение со скачками на границе полуплоскости $y = 0$, $-\infty < x < \infty$:

$$[\sigma_y] = \varphi_1(x), \quad [\tau_{yx}] = \varphi_2(x), \quad [v] = \varphi_3(x), \quad [u] = \varphi_4(x)$$

$$[f] = f(x, +0) - f(x, -0), \quad -\infty < x < \infty$$

Эти разрывные решения имеют вид [1]:

$$u_1 = \int_0^h \chi(\eta) F_1(\eta - y, x) d\eta, \quad v_1 = \int_0^h \chi(\eta) F_2(\eta - y, x) d\eta \quad (1.6)$$

$$F_1 = -\frac{\partial^2 r_1}{\partial y^2} + (\kappa_2^2 + \frac{\partial^2 r_2}{\partial y^2}), \quad F_2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (r_2 - r_1)$$

$$r_j = r_j(\eta - y, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_j(\alpha) |\eta - y|)}{2\gamma_j(\alpha)} e^{i\alpha x} d\alpha$$

$$\gamma_j(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_j^2} \quad (j = 1, 2)$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(\eta) \Phi_{1j}(\eta - x, y) d\eta, \quad v_2 = \sum_{j=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(\eta) \Phi_{2j}(\eta - x, y) d\eta \quad (1.7)$$

$$\Phi_{11} = \frac{1}{\mu\kappa_2^2} \left[\left(\kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) t_1 - \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2} \right], \quad \Phi_{12} = \frac{1}{\mu\kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (t_2 - t_1)$$

$$\Phi_{13} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[2 \left(\kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) t_1 - 2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2} \right]$$

$$\Phi_{14} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \left(\kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) t_1 - \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) t_2 \right] \quad (1.8)$$

$$\Phi_{21} = \Phi_{12}, \quad \Phi_{22} = \frac{1}{\mu\kappa_2^2} \left[-\frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} + \left(\kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) t_2 \right]$$

$$\Phi_{23} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[-2 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} + \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) t_2 \right]$$

$$\Phi_{24} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[-2 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} + \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) t_2 \right]$$

$$t_j = t_j(\eta - x, y) = r_j(y, \eta - x) \quad (j = 1, 2)$$

В формулах (1.6)–(1.8), в соответствии с условиями излучения [2], значения функций $\gamma_j(\alpha)$ выбираются согласно правилу

$$\gamma_j(\alpha) > 0, \quad |\alpha| > \kappa_j, \quad \gamma_j(\alpha) = -i\sqrt{\kappa_j^2 - \alpha^2}, \quad |\alpha| < \kappa_j, \quad (j = 1, 2)$$

Скачки $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1, 4}$ в разрывном решении (1.7) могут быть определены из условий (1.1). Но так как этих условий недостаточно для определения четырех скачков $\varphi_k(x)$, то необходимо привлечь еще два дополнительных условия. Эти условия могут быть получены если потребовать чтобы $u_2(x, y) = v_2(x, y) = 0$, $y < 0$. Тогда

$$[v_2] = v_2(x, +0) = \varphi_3(x), \quad [u_2] = u_2(x, +0) = \varphi_4(x) \quad (1.9)$$

Из (1.7)–(1.9) получим

$$\Phi_3(\alpha) = R(\alpha)^{-1} [\kappa_2^2 \gamma_{11}(\alpha) \Phi_1(\alpha) + (-i\alpha) B(\alpha) \Phi_2(\alpha)] \quad (1.10)$$

$$\Phi_4(\alpha) = R(\alpha)^{-1} [\kappa_2^2 \gamma_1(\alpha) \Phi_2(\alpha) - (-i\alpha) B(\alpha) \Phi_1(\alpha)]$$

$$R(\alpha) = (2\alpha^2 - \kappa_2^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_1(\alpha) \gamma_2(\alpha), \quad B(\alpha) = 2\alpha^2 - \kappa_2^2 - 2\gamma_1(\alpha) \gamma_2(\alpha)$$

где $\Phi_k(\alpha)$ — Фурье-преобразования соответствующих скачков.

После подстановки (1.10) в (1.7) найдем

$$\begin{aligned} v_2(x, y) &= -\frac{1}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1(\alpha) d_3(y, \alpha)}{R(\alpha)} \exp(i\alpha(\eta - x)) d\alpha d\eta - \\ &- \frac{1}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-i\alpha) d_2(y, \alpha)}{R(\alpha)} \exp(i\alpha(\eta - x)) d\alpha d\eta \\ u_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-i\alpha) d_1(y, \alpha)}{R(\alpha)} \exp(i\alpha(\eta - x)) d\alpha d\eta - \\ &- \frac{1}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_2(\alpha) d_4(y, \alpha)}{R(\alpha)} \exp(i\alpha(\eta - x)) d\alpha d\eta \end{aligned} \quad (1.11)$$

В (1.11) приняты обозначения

$$d_1(y, \alpha) = (2\alpha^2 - \kappa_2^2) e^{-\gamma_1 y} - 2\gamma_1 \gamma_2 e^{-\gamma_2 y}, \quad d_2(y, \alpha) = (2\alpha^2 - \kappa_2^2) e^{-\gamma_2 y} - 2\gamma_1 \gamma_2 e^{-\gamma_1 y}$$

$$d_3(y, \alpha) = (2\alpha^2 - \kappa_2^2) e^{-\gamma_1 y} - 2\alpha^2 e^{-\gamma_2 y}, \quad d_4(y, \alpha) = (2\alpha^2 - \kappa_2^2) e^{-\gamma_2 y} - 2\alpha^2 e^{-\gamma_1 y}$$

Подставим (1.5) в граничные условия (1.1). С учетом (1.3), (1.6), (1.11), придем к следующим равенствам:

$$\varphi_1(x) = -\sigma_y^+(x, +0), \quad \varphi_2(x) = -\tau_{yx}^+(x, +0) \quad (1.12)$$

$$\sigma_y^+(x, +0) = \frac{\mu}{2\pi\kappa_2^2} \int_0^h \chi(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-i\alpha) e^{-i\alpha x}}{2\gamma_1(\alpha)} d_1(\alpha, \eta) d\alpha d\eta$$

$$\tau_{yx}^+(x, +0) = \frac{\mu}{2\pi\kappa_2^2} \int_0^h \chi(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-i\alpha) e^{-i\alpha x}}{2\gamma_2(\alpha)} d_4(\alpha, \eta) d\alpha d\eta$$

Из (1.12) и (1.11) следует окончательное представление для $u_2(x, y)$ и $v_2(x, y)$ через скачок $\chi(\eta)$:

$$u_2(x, y) = \int_0^h \chi(\eta) D_1(\eta, y, x) d\eta, \quad v_2(x, y) = \int_0^h \chi(\eta) D_2(\eta, y, x) d\eta \quad (1.13)$$

$$D_j(\eta, y, x) = \frac{1}{2\pi\kappa_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{R(\alpha)} G_j(\alpha, \eta, y) d\alpha$$

$$G_1(\alpha, \eta, y) = \frac{\alpha^2}{\gamma_1} d_1(y, \alpha) d_1(\eta, \alpha) + \gamma_2 d_4(y, \alpha) d_4(\eta, \alpha)$$

$$G_2(\alpha, \eta, y) = (-i\alpha) [d_1(\eta, \alpha) d_3(y, \alpha) + d_3(\eta, \alpha) d_2(y, \alpha)]$$

2. Из (1.5), (1.6), (1.13) следует, что поле перемещений и напряжений в упругой полуплоскости полностью определяется через неизвестный скачок $\chi(\eta)$. Для его определения воспользуемся условием (1.4). После дифференцирования (1.4) примет вид

$$u_y'(\pm 0, y) = \gamma, \quad 0 \leq y \leq h \quad (2.1)$$

Очевидно, что равенства (2.1) и (1.4) эквивалентны с точностью до произвольной постоянной. Условие для определения этой постоянной может быть получено

если к (2.1) применить интегрирование по $[0, y]$ и потребовать чтобы результат совпал с (1.4). Тогда найдем

$$u(0, 0) = \delta \quad (2.2)$$

Подставим (1.5) в (2.1) и (2.2), с учетом формул (1.3), (1.6), (1.13). В результате придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^1 \varphi(\tau) [l(\tau - t) + K(\tau, t)] d\tau = \gamma + p(t), & t \in [0, 1] \\ \int_0^1 \varphi(\tau) [l_0(\tau) + K_0(\tau, 0)] d\tau = \delta_* - p_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\tau = \eta/h, \quad t = y/h, \quad \varphi(\tau) = \lambda(h\tau), \quad \delta_* = \delta/h$$

$$p(t) = c_0 \kappa_0 g_1 [\exp(-\kappa_0 g_1 t) - (2g_1 g_2 / g_3) \exp(-\kappa_0 g_2 t)]$$

$$p_0 = c_0 (1 - g_2 g_1 / g_3), \quad \kappa_0 = \kappa_2 h, \quad c_0 = c/h$$

В дальнейшем, в силу линейной зависимости решения относительно параметра c_0 , будем считать $c_0 = 1$. Ядра интегральных операторов в (2.3) определяются по формулам

$$l_0(\tau - t) = F_1(h(\tau - t), 0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\beta) \exp(i\beta \kappa_0(\tau - t)) d\beta \quad (2.4)$$

$$\lambda_\gamma = \gamma_1(\beta \kappa_2) / \kappa_2, \quad l(\tau - t) = \partial l_0(\tau - t) / \partial t, \quad L(\beta) = (\lambda_1 \lambda_2 - \beta^2) / \lambda_1$$

$$K_0(\tau, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_0(\beta, \tau, t) d\beta, \quad K(\tau, t) = \frac{\partial}{\partial t} K_0(\tau, t) \quad (2.5)$$

$$W_0(\beta, \tau, t) = A(\beta, \tau, t) / R_*(\beta), \quad A(\beta, \tau, t) = \kappa_2^2 G_2(\kappa_2 \beta, h\tau, ht)$$

$$R_*(\beta) = \kappa_2^{-4} R(\kappa_2 \beta) = (2\beta^2 - 1)^2 - 4\beta^2 \lambda_1 \lambda_2$$

Выражения (2.4), (2.5) получены из (1.6) и (1.13) подстановкой $\alpha = \kappa_2 \beta$, $y = ht$, $\eta = h\tau$, $\kappa_0 = \kappa_2 h$.

Исследуем свойства функций (2.4) и (2.5). Рассмотрим сначала функции l_0 и l_1 . Для функции $L(\beta)$ имеется асимптотическое разложение

$$L(\beta) = -\frac{1}{2} (1 + \xi^2) |\beta|^{-1} + O(|\beta|^{-3}), \quad \beta \rightarrow \infty$$

Тогда из (2.4) следует:

$$l_0(x) = -\frac{1}{2} (1 + \xi^2) \ln |x| + O(x \ln |x|), \quad l(x) = -\frac{1 + \xi^2}{2x} + l_*(x) \quad (2.6)$$

$$l_*(x) = O(x), \quad x \rightarrow 0$$

Рассмотрим теперь функцию $K(\tau, t)$. В интеграле (2.5), введя в среду затухание, перейдем к контурному интегрированию в комплексной плоскости $\beta = \sigma + i\zeta$ см. [2]. В результате получим

$$K(\tau, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ 2\pi i \frac{A(\xi_R, \tau, t)}{R_*'(\xi_R)} - \int_{L_1} \frac{A(\beta, \tau, t)}{R_*(\beta)} d\beta - \int_{L_2} \frac{A(\beta, \tau, t)}{R_*(\beta)} d\beta \right\}$$

где L_1 — разрез, проведенный из точки $\beta = \xi$, состоящий из отрезка вещественной оси $0 < \sigma < \xi$ и положительной части мнимой полуоси $\zeta > 0$. Разрез L_2 проведен

из точки $\beta = 1$ и состоит из отрезка вещественной оси $0 < \sigma < 1$ и также проходит по положительной части мнимой полуоси $\zeta > 0$.

Преобразовав интегралы по разрезам, найдем

$$K(\tau, t) = i \frac{A_t'(\xi_R, \tau, t)}{R_*'(\xi_R)} + K_1(\tau, t) + iK_2(\tau, t) + iK_3(\tau, t) \quad (2.7)$$

$$K_1(\tau, t) = \frac{\kappa_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{V_1(\zeta, \tau, t)}{R_4(\zeta)} d\zeta, \quad K_2(\tau, t) = -\frac{\kappa_0}{2\pi} \int_0^\xi \frac{V_2(\sigma, \tau, t)}{R_3(\sigma)} d\sigma$$

$$K_3(\tau, t) = -\frac{\kappa_0}{2\pi} \int_\xi^1 \frac{V_3(\sigma, \tau, t)}{R_0(\sigma)} d\sigma \quad (2.8)$$

$$R_0(\beta) = \lambda_3^{-4} + 16\beta^4 \lambda_2^{-2} \lambda_1^{-2}, \quad R_3(\beta) = \lambda_3^{-2} - 4\beta^2 \lambda_1^- \lambda_2^-$$

$$R_4(\beta) = \lambda_3^{+2} - 4\beta^2 \lambda_1^+ \lambda_2^+$$

$$\lambda_3^\pm = 2\beta^2 \pm 1, \quad \lambda_1^\pm = \sqrt{\xi^2 \pm \beta^2}, \quad \lambda_2^\pm = \sqrt{1 \pm \beta^2}$$

Функции V_j ($j = 1, 2, 3$) в интегралах (2.8) выражаются через значения на берегах разрезов $A(\beta, \tau, t)$.

Можно показать, что в (2.7) первое и третье слагаемое ограничены при $\tau, t \rightarrow 0$, а $K_2(\tau, t) = O(\tau + t)$, $\tau, t \rightarrow 0$. Исследуем поведение при $\tau, t \rightarrow 0$ функции $K_1(\tau, t)$. В интеграле из (2.8), определяющем $K_1(\tau, t)$, подынтегральная функция имеет следующее асимптотическое разложение при $\zeta \rightarrow \infty$ и $\tau, t \rightarrow 0$:

$$V_1(\zeta, \tau, t)/R_4(\zeta) = V_0(\zeta, \tau, t) + O(\zeta^{-2}), \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

$$V_0(\zeta, \tau, t) = -2\kappa_0 \sum_{k=0}^{\infty} V_{0k}(\tau, t) \frac{\sin[\zeta \kappa_0(\tau + t) + \frac{1}{2} k\pi]}{\zeta^{k-2}}$$

$$V_{00}(\tau, t) = \kappa_0^2 (1 - \xi^2) \tau t \quad (2.10)$$

$$V_{01}(\tau, t) = -1/2 \kappa_0 [(3 - \xi^2) \tau + (1 - \xi^2) t] + O((\tau + t)^2)$$

$$V_{02}(\tau, t) = (1 - \xi^2) + O(\tau + t), \quad V_{03}(\tau, t) = O(\tau + t)$$

Из (2.9), следует, что интеграл из (2.8), представляющий $K_1(\tau, t)$, является расходящимся. Для того чтобы придать ему определенный смысл выполним преобразование

$$K_1(\tau, t) = K_0(\tau, t) + K_*(\tau, t)$$

$$K_0(\tau, t) = \frac{\kappa_0}{2\pi} \int_0^\infty V_0(\zeta, \tau, t) d\zeta, \quad K_*(\tau, t) = \frac{\kappa_0}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{V_1(\zeta, \tau, t)}{R_4(\zeta)} - V_0(\zeta, \tau, t) \right] d\zeta$$

Расходящийся интеграл, определяющий функцию $K_0(\tau, t)$, может быть найден при помощи теории обобщенных функций [3]. Из (2.9), (2.10) получим

$$2\pi K_0(\tau, t) = (1 - \xi^2) \frac{\tau(t - \tau)}{(\tau + t)^3} + \frac{1 + \xi^4}{2(1 - \xi^2)(\tau + t)} + O(\tau + t) \quad (2.11)$$

$$K_*(\tau, t) = O(\tau + t)$$

Таким образом, интегральное уравнение (2.3), с учетом (2.6), (2.7), (2.11) может быть представлено в виде (ν — коэффициент Пуассона):

$$\int_0^1 \varphi(\tau) \left[\frac{1}{\tau-t} + \frac{a}{\tau+t} + b \frac{\tau(\tau-t)}{(\tau+t)^3} + B(\tau, t) + l_*(\tau-t) \right] d\tau = p_*(t), \quad 0 < t < 1 \quad (2.12)$$

$$p_*(t) = -\frac{\pi}{1+\xi^2} [\gamma + p(t)], \quad B(\tau, t) = O(1) \quad (\tau, t \rightarrow 0)$$

$$a = -\frac{1+(3-4\nu)^2}{2(3-4\nu)}, \quad b = \frac{2}{3-4\nu}$$

Уравнение вида (2.12) является сингулярным интегральным уравнением с неподвижной особенностью. В [4] доказано, что (2.12) нетерово в классе $L_1^\circ(I)$ и его индекс равен 1. При $p_* = 0$ это уравнение имеет только одно линейно независимое решение, которое имеет вид

$$\varphi(\tau) = \tau^\alpha + a_1(1-\tau)^{-1/2} + \varphi_*(\tau) \quad (2.13)$$

где $\varphi_*(\tau)$ — ограниченная при $\tau \in [0, 1]$ функция, а $-1 < \alpha < 0$ является единственным корнем трансцендентного уравнения $\cos \pi \alpha - a + b(1+\alpha)^2 = 0$. В частности, при $\nu = 0,25$, $\alpha = -0,22525$.

Согласно (2.13), приближенное решение (2.12) будем разыскивать в виде

$$\varphi(\tau) = \tau^\alpha (1-\tau)^{-1/2} \psi(\tau) \quad (2.14)$$

Для численного определения функции $\psi(\tau)$, уравнения (2.3), согласно [5], заменим системой алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n W_k^* \psi_k [L(\tau_k - t_j) + K(\tau_k, t_j)] = \gamma + p(t_j) \quad (2.15)$$

$$\sum_{k=1}^n W_k^* \psi_k [L_0(\tau_k) + K_0(\tau_k, 0)] = \delta_* - p_0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\tau_k = (1-x_k)/2 \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad t_j = (1-y_j)/2 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\psi_k = \psi(\tau_k), \quad W_k^* = 2^{-\alpha+1/2} W_k$$

где x_k — корни $P_n^{\alpha, -1/2}(x)$, y_j — корни $P_{n-1}^{1+\alpha, -1/2}(x)$, W_k — коэффициенты квадратной формулы Гаусса — Якоби с весом $\tau^\alpha (1-\tau)^{-1/2}$ (см. [6]).

После решения системы (2.15), функция $\psi(\tau)$ может быть приближена интерполяционным многочленом вида:

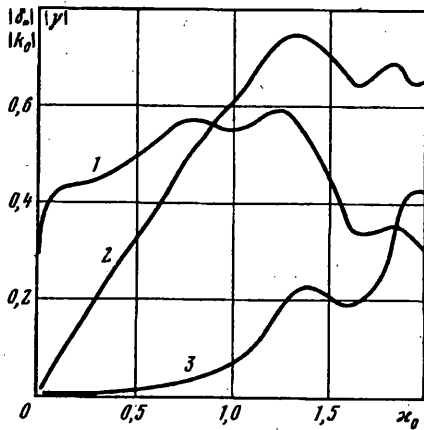
$$\psi(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \psi_k \frac{P_n^{\alpha, -1/2}(1-2\tau)}{[P_n^{\alpha, -1/2}(1-2\tau_k)]'(t-\tau_k)} \quad (2.16)$$

В правые части уравнений (2.15) входят неизвестные величины δ_* и γ , описывающие движение включения как твердого тела. Для их определения необходимо воспользоваться уравнениями движения включения

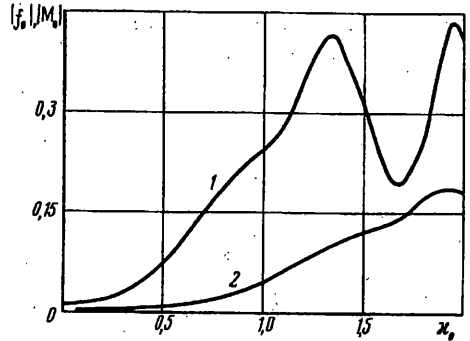
$$J_c \ddot{\epsilon} = M, \quad m \ddot{x}_c = F_x \quad (2.17)$$

где J_c — момент инерции включения, относительно оси проходящей через центр тяжести, x_c — перемещения центра тяжести, $\ddot{\epsilon}$ — угловое ускорение, M , F_x — момент и сила, действующие на включение, m — погонная масса включения. Имеют место формулы

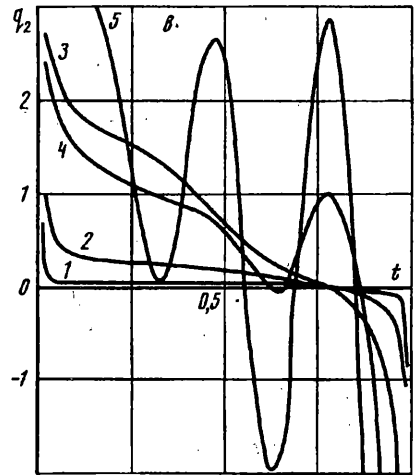
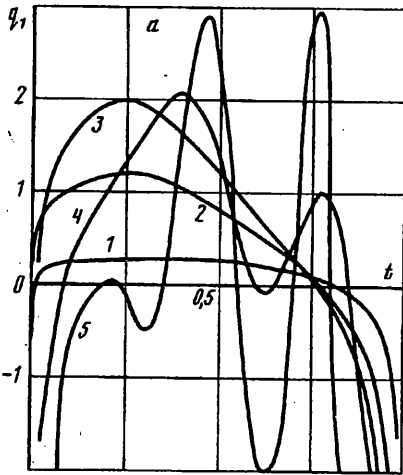
$$M = \mu h^2 M_0, \quad f_0 = \int_0^1 \varphi(\tau) d\tau, \quad F_x = \mu h^2 f_0, \quad M_0 = \int_0^1 \tau \varphi(\tau) d\tau \quad (2.18)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Из (2.17), (2.18) находим

$$m_0 \chi_0^2 (\delta_* + \gamma/2) = -f_0, \quad 1/2 m_0 \chi_0^2 \gamma = -M_0, \quad m_0 = mc_2^2 / (\mu h^2)$$

Заменив интегралы в (2.18) суммами по квадратурной формуле Гаусса — Якоби, получим

$$\delta_* + \frac{\gamma}{2} = -\frac{1}{\chi_0^2 m_0} \sum_{k=1}^n W_k^* \psi_k, \quad \gamma = -\frac{12}{\chi_0^2 m_0} \sum_{k=1}^n \tau_k W_k^* \psi_k \quad (2.19)$$

Равенства (2.19) необходимо добавить к системе (2.15).

Зная решение (2.15), легко найти напряжения в области контакта включения со средой $\sigma_x (\pm 0, ht) / \mu = \pm \varphi (t) / 2 = \pm (q_1 (t) + iq_2 (t))$, где, согласно (2.14), (2.16):

$$q_1 (t) + iq_2 (t) = -\frac{t^\alpha (1-t)^{-1/2}}{2} \sum_{k=1}^n \psi_k \frac{P_n^{\alpha, -1/2} (1-2t)}{[P_n^{\alpha, -1/2} (1-2\tau_k)]' (t-\tau_k)}$$

Напряженное состояние среды вблизи заглубленного конца включения определяется коэффициентом интенсивности напряжений [7], который находится по формуле $k = \lim (y/h - 1)^{1/2} \tau_{xy} (0, y)$ ($y \rightarrow h + 0$). Его приближенное значение через решение системы (2.15) выражается следующим образом:

$$k = \mu k_0, \quad k_0 = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \psi_k \frac{P_n^{\alpha, -1/2}(-1)}{[P_n^{\alpha, -1/2}(1 - 2\tau_k)]' (1 - \tau_k)}$$

При помощи полученного приближенного решения были проведены вычисления для следующих данных: $\nu = 0,25$, $m_0 = 1$, $c_0 = 1$, $0 < \kappa_0 \leq 2$. При этом в системе (2.15) бралось до 25 уравнений, что, как показали вычисления, достаточно для получения результатов с относительной погрешностью менее 1%.

На фиг. 1 показана зависимость от безразмерной частоты κ_0 абсолютных значений горизонтальных перемещений $|\delta_*|$ (кривая 1), угла поворота $|\gamma|$ включения (кривая 2) и коэффициента интенсивности напряжений $|k_0|$ (кривая 3). Зависимости от κ_0 абсолютных значений силы $|f_0|$ и момента $|M_0|$, действующих со стороны среды на включение, приведены на фиг. 2. Кривая 1 соответствует изменению силы, а кривая 2 — изменению момента. Для всех зависимостей характерно монотонное возрастание до определенного значения κ_0 , затем они приобретают сложный характер с наличием ряда максимумов и минимумов.

Распределение контактных напряжений $q_1(t) + iq_2(t)$ для различных значений частоты показаны на фиг. 3, а и фиг. 3, в. При этом брались следующие значения частоты: $\kappa_0 = 0,4; 0,8; 1,2; 1,6; 2$. Этим значениям соответствуют кривые 1—5. Видно, что распределение контактных напряжений существенно зависит от частоты колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов В. Г. Применение разрывных решений в плоской динамической задаче теории упругости для слоисто-однородных тел // Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: ДГУ, 1990. С. 93—97.
2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
3. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
4. Дудучава Р. В. Интегральные уравнения типа свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Тр. Тбилис. мат. ин-та АН СССР. 1979. Т. 40. 136 с.
5. Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S. Numerical solution of singular integral equation // Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Leyden: Nordhoff Intern. Publ. 1973. P. 368—425.
6. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
7. Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 520—529.

Одесса

Поступила в редакцию
12.V.1992