

УДК 539.3

© 1994 г. Ф. М. ДЕТИНКО

СМЕШАННАЯ ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ДИСКА

Изучается упругое равновесие кольцевого диска при смешанных краевых условиях. Сначала строится матрица перехода и функция Грина для решения с периодом $2\pi/N$ ($N \geq 2$). После выделения особенности задача сводится к определению контактного давления из интегрального уравнения первого рода. Давление ищется в виде ряда по полиномам Чебышева, коэффициенты которого находятся из бесконечной системы уравнений. Приводится сравнение с некоторыми результатами, полученными по теории тонкого кольца.

Применение полиномов Чебышева для решения контактных задач теории упругости описано в [1].

1. Матрица перехода для кольцевого диска. Перемещения в плоской задаче теории упругости могут быть выражены формулами

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) - 2mB_r, \quad u_\theta = \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - 2mB_\theta \quad (1.1)$$

где для плоской деформации $m = 2(1 - \nu)$, для плоского напряженного состояния $m = 2/(1 + \nu)$; ν — коэффициент Пуассона. Здесь и ниже перемещения и радиальная координата отнесены к характерному (наружному или внутреннему) радиусу диска, а напряжения — к удвоенному модулю сдвига $2G$. Функции B_r, B_θ находятся из уравнений

$$\Delta B_r - r^{-2}B_r = 2r^{-2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}, \quad \Delta B_\theta - r^{-2}B_\theta = -2r^{-2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \quad (1.2)$$

Компоненты периодического периода $2\pi/N$ решения уравнений (1.2) можно искать в виде

$$B_r = B_n(r) \cos \lambda_n \theta, \quad B_\theta = A_n(r) \sin \lambda_n \theta, \quad \lambda_n = nN \quad (n = 1, 2, \dots)$$

где в соответствии с (1.2):

$$B_n'' + r^{-1}B_n' - (\lambda_n^2 + 1)r^{-2}B_n - 2\lambda_n r^{-2}A_n = 0 \quad (1.3)$$

$$A_n'' + r^{-1}A_n' - (\lambda_n^2 + 1)r^{-2}A_n - 2\lambda_n r^{-2}B_n = 0$$

По уравнениям (1.1) теперь находятся перемещения

$$u_r = [rB_n' + (1 - 2m)B_n] \cos \lambda_n \theta, \quad u_\theta = -(\lambda_n B_n + 2mA_n) \sin \lambda_n \theta$$

а по закону Гука — напряжения

$$\sigma_r = [-(m + 1)B_n' + (\lambda_n^2 + m - 1)r^{-1}B_n + \lambda_n m r^{-1}A_n] \cos \lambda_n \theta$$

$$\sigma_\theta = [(m - 1)B_n' - (\lambda_n^2 + m + 1)r^{-1}B_n - \lambda_n(m + 2)r^{-1}A_n] \cos \lambda_n \theta$$

$$\tau = -[\lambda_n(B_n' - m r^{-1}B_n) + m(A_n' - r^{-1}A_n)] \sin \lambda_n \theta$$

При записи этих уравнений вторая производная от B_n заменена в силу уравнений (1.3). Вводя функции $F_1 = A_n + B_n$, $F_2 = A_n - B_n$ складывая и вычитая уравнение (1.3), получаем для F_1 и F_2 два независимых уравнения

$$F_1'' + r^{-1}F_1' - (\lambda_n + 1)^2 r^{-2}F_1 = 0$$

$$F_2'' + r^{-1}F_2' - (\lambda_n - 1)^2 r^{-2}F_2 = 0$$

Эти уравнения имеют четыре линейно независимых решения r^{λ_n+1} , $r^{-(\lambda_n+1)}$, r^{λ_n-1} , $r^{-(\lambda_n-1)}$. Более удобно использовать их линейные комбинации, положив

$$F_1 = 2(C_3 f_1 + C_4 f_2), \quad F_2 = 2(C_3 f_3 + C_4 f_4)$$

$$f_1(r) = (r^{\lambda_n-1} + r^{-\lambda_n+1})/2, \quad f_2(r) = (r^{\lambda_n-1} - r^{-\lambda_n+1})/2$$

$$f_3(r) = (r^{\lambda_n+1} + r^{-\lambda_n-1})/2, \quad f_4(r) = (r^{\lambda_n+1} - r^{-\lambda_n-1})/2$$

Для этих функций выполняются равенства $f_2(1) = f_4(1) = 0$, что упрощает нахождение постоянных из краевых условий. Производные от функций $f(r)$ выражаются через сами функции равенствами $f_1' = (\lambda_n - 1)r^{-1}f_2$, $f_2' = (\lambda_n - 1)r^{-1}f_1$, $f_3' = (\lambda_n + 1)r^{-1}f_4$, $f_4' = (\lambda_n + 1)r^{-1}f_3$. Перемещения и напряжения теперь записываются в виде

$$u_r = U_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(r) \cos \lambda_n \theta, \quad u_\theta = V_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(r) \sin \lambda_n \theta \quad (1.4)$$

$$\sigma_r = R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos \lambda_n \theta, \quad \sigma_\theta = S_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n(r) \cos \lambda_n \theta$$

$$\tau = Y_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(r) \sin \lambda_n \theta$$

Определив постоянные C_k ($k = 1, 2, 3, 4$) из начальных условий $U_n(1) = U_n^0$, $V_n(1) = V_n^0$, $R_n(1) = R_n^0$, $Y_n(1) = Y_n^0$, запишем решение в матричной форме

$$W(r) = A(r) w^0, \quad w^0 = 1/2 [R_n^0, Y_n^0, U_n^0, V_n^0]^T / m \quad (1.5)$$

$$W(r) = [U_n(r), V_n(r), rR_n(r), rY_n(r), rS_n(r)]^T$$

где верхний индекс T означает транспонирование матрицы. Матрица A имеет следующие компоненты:

$$a_{11}(r) = \frac{\lambda_n + 2(m-1)}{\lambda_n - 1} f_2 - \frac{\lambda_n - 2(m-1)}{\lambda_n + 1} f_4$$

$$a_{12}(r) = f_3 - f_1 + (2m-1) \left(\frac{f_2}{\lambda_n - 1} - \frac{f_4}{\lambda_n + 1} \right)$$

$$a_{13}(r) = (\lambda_n + m) f_1 - (\lambda_n - m) f_3 + (2-m)(f_2 - f_4)$$

$$a_{14}(r) = (m-1)(f_1 - f_3) - (\lambda_n - 1 + m) f_2 + (\lambda_n + 1 - m) f_4$$

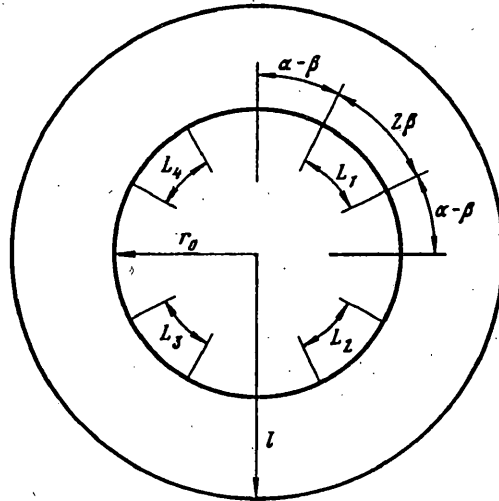
$$a_{21}(r) = f_1 - f_3 + (2m-1) \left(\frac{f_2}{\lambda_n - 1} - \frac{f_4}{\lambda_n + 1} \right)$$

$$a_{22}(r) = \frac{(2m - \lambda_n)}{\lambda_n - 1} f_2 + \frac{(2m + \lambda_n)}{\lambda_n + 1} f_4$$

$$a_{23}(r) = (m+1)(f_1 - f_3) + (\lambda_n + 1 - m) f_2 - (\lambda_n - 1 + m) f_4$$

$$a_{24}(r) = (m - \lambda_n) f_1 + (m + \lambda_n) f_3 + m(f_4 - f_2)$$

$$a_{31}(r) = (\lambda_n + m) f_1 - (\lambda_n - m) f_3 + (m-2)(f_2 - f_4)$$



Фиг. 1

$$a_{32}(r) = (m+1)(f_1 - f_3) - (\lambda_n + 1 - m)f_2 + (\lambda_n - 1 + m)f_4$$

$$a_{33}(r) = (\lambda_n - 1)(\lambda_n + 2)f_2 - (\lambda_n + 1)(\lambda_n - 2)f_4$$

$$a_{34}(r) = (\lambda_n^2 - 1)(f_3 - f_1) + (\lambda_n - 1)f_2 - (\lambda_n + 1)f_4$$

$$a_{41}(r) = (m-1)(f_1 - f_3) + (\lambda_n - 1 + m)f_2 - (\lambda_n + 1 - m)f_4$$

$$a_{42}(r) = (m - \lambda_n)f_1 + (m + \lambda_n)f_3 + m(f_2 - f_4)$$

$$a_{43}(r) = (\lambda_n^2 - 1)(f_1 - f_3) + (\lambda_n - 1)f_2 - (\lambda_n + 1)f_4$$

$$a_{44}(r) = \lambda_n(\lambda_n + 1)f_4 - \lambda_n(\lambda_n - 1)f_2$$

$$a_{51}(r) = (2 - m - \lambda_n)f_1 + (2 - m + \lambda_n)f_3 + m(f_4 - f_2)$$

$$a_{52}(r) = (m-1)(f_3 - f_1) + (\lambda_n - 1 - m)f_2 - (\lambda_n + 1 + m)f_4$$

$$a_{53}(r) = 2(\lambda_n + 1)f_3 - 2(\lambda_n - 1)f_1 - \lambda_n(\lambda_n - 1)f_2 + \lambda_n(\lambda_n + 1)f_4$$

$$a_{54}(r) = (\lambda_n - 1)^2 f_1 - (\lambda_n + 1)^2 f_3 + (\lambda_n - 1)f_2 - (\lambda_n + 1)f_4$$

2. Смешанная задача. Ниже рассматривается задача о диске, на дугах L_s ($s = 1, 2 \dots N$) боковой поверхности которого задано радиальное перемещение и нулевое касательное напряжение, а остальная поверхность свободна. Все дуги равны и равноудалены друг от друга.

Для построения функций Грина приложим в центрах дуг L_s сосредоточенные радиальные единичные силы (фиг. 1). Отсчитывая угол от точки приложения силы и разложив нагрузку в ряд Фурье, запишем краевые условия задачи в виде:

$$\sigma_r(1, \theta) = r(1, \theta) = \tau(r_0, \theta) = 0$$

$$\sigma_r(r_0, \theta) = \frac{1}{\alpha r_0} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \lambda_n \theta \right), \quad \alpha = \pi/N$$

Элементы вектора w° в (1.5) найдутся из уравнений

$$R_n^\circ = Y_n^\circ = 0, \quad a_{43}(r_0) U_n^\circ + a_{44}(r_0) V_n^\circ = 0$$

$$a_{33}(r_0) U_n^\circ + a_{34}(r_0) V_n^\circ = 2m/\alpha \quad (2.1)$$

а решение Ляме, соответствующее постоянной по углу нагрузке, определим непосредственно

$$V_0 = Y_0 = 0, \quad U_0 = \frac{1}{r_0^2 - 1} \frac{r r_0}{2\alpha} (m - 1 + r^{-2})$$

$$R_0 = \frac{1}{r_0^2 - 1} \frac{r_0}{2\alpha} (1 - r^{-2}), \quad S_0 = \frac{1}{r_0^2 - 1} \frac{r_0}{2\alpha} (1 + r^{-2})$$

Из (2.1) находим

$$U_n^0 = a_{44}(r_0) 2m / (D\alpha), \quad V_n^0 = -a_{43}(r_0) 2m / (D\alpha)$$

$$D = a_{33}(r_0) a_{44}(r_0) - a_{34}(r_0) a_{43}(r_0)$$

и по (1.5) коэффициенты Фурье для радиального перемещения на поверхности $r = r_0$ будут равны

$$U_n(r_0) = 2m [a_{13}(r_0) U_n^0 + a_{14}(r_0) V_n^0] = b_n / \alpha$$

$$b_n = (a_{13}(r_0) a_{44}(r_0) - a_{14}(r_0) a_{43}(r_0)) / D$$

Возвращаясь к задаче со смешанными краевыми условиями

$$\sigma_r(1, \theta) = \tau(1, \theta) = \tau(r_0, \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$u_r(r_0, \theta) = \delta(\theta) \quad \theta \in L, \quad \sigma_r(r_0, \theta) = 0 \quad \theta \notin L,$$

обозначим через $q(\theta)$ неизвестное радиальное давление на дугах L . Краевое условие для перемещения приводит к интегральному уравнению относительно этого давления

$$\delta(\theta) = \int_{-\beta}^{\beta} \left[U_0(r_0) + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \lambda_n(\theta - \theta_0) \right] q(\theta_0) d\theta_0 \quad (2.2)$$

Можно показать, что $\lim b_n \lambda_n = \varepsilon m$ при $n \rightarrow \infty$, где $\varepsilon = 1$ при $r_0 > 1$, $\varepsilon = -1$ при $r_0 < 1$. Полагая $b_n = c_n + \varepsilon m / \lambda_n$ и учитывая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n(\theta - \theta_0)}{\lambda_n} = -\frac{\alpha}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi}{2\alpha}(\theta - \theta_0) \right|$$

перепишем (2.2) в виде

$$\alpha [\beta^{-1} \delta(\theta) - Q U_0(x_0)] = \int_{-1}^1 \left[K_1(x, x_0) - \frac{\varepsilon m \alpha}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi \beta}{2\alpha} \frac{\pi \beta}{2\alpha} (x - x_0) \right| \right] q(x_0) dx_0 \quad (2.3)$$

$$x = \frac{\theta}{\beta}, \quad K_1(x, x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \beta \lambda_n(x - x_0), \quad Q = \int_{-1}^1 q(x_0) dx_0$$

Следуя [1], заменим

$$\ln \left| 2 \sin \frac{\pi \beta}{2\alpha} (x - x_0) \right| = \ln |x - x_0| + \ln \left| \frac{2 \sin 1/2 \pi \beta (x - x_0) / \alpha}{x - x_0} \right|$$

и будем искать давление в виде ряда по полиномам Чебышева

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{s=0}^{\infty} d_s T_s(x) \quad (2.4)$$

Учитывая симметричность давления, удержим только четные полиномы $s = 0, 2, \dots$. Подставляя (2.4) в (2.3), получим равенства

$$\alpha [\beta^{-1} \delta(x) - \pi d_0 U_0(x_0)] = \sum_{s=0}^{\infty} d_s F_s(x) + \varepsilon \alpha m \left[d_0 \ln 2 + \sum_{s=2}^{\infty} d_s s^{-1} T_s(x) \right]$$

$$F_s(x) = \int_{-1}^1 \frac{K(x, x_0)}{\sqrt{1-x_0^2}} T_s(x_0) dx_0 \quad (2.5)$$

$$K(x, x_0) = K_1(x, x_0) - \frac{\varepsilon \alpha m}{\pi} \ln \left| \frac{2 \sin 1/2 \pi \beta (x - x_0) / \alpha}{(x - x_0)} \right|$$

Умножая (2.5) на $T_j(x) dx / \sqrt{1-x^2}$ ($j = 0, 2 \dots$), интегрируя и учитывая ортогональность полиномов Чебышева, приходим к бесконечной системе для коэффициентов d_s :

$$\varepsilon \alpha d_j + \sum_{s=0} B_{sj} d_s = g_j \quad (j = 0, 2 \dots) \quad (2.6)$$

$$a_0 = \ln 2 + \frac{\varepsilon \pi}{m} U_0(r_0), \quad a_j = \frac{1}{2j} \quad (j = 2, 4 \dots)$$

$$B_{sj} = \frac{1}{\pi \alpha m} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(x, x_0) \frac{T_j(x) T_s(x_0)}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-x_0^2}} dx dx_0,$$

$$g_j = \frac{1}{\pi \beta m} \int_{-1}^1 \delta(x) \frac{T_j(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Напомним, что $\varepsilon = -1$, $r_0 < 1$ при смешанных условиях на внутренней поверхности диска. Учитывая, что

$$\int_{-1}^1 \frac{T_s(x)}{\sqrt{1-x^2}} \cos \beta x dx = \pi (-1)^{s/2} J_s(\beta)$$

где $J_s(\beta)$ — функция Бесселя первого рода, и пользуясь квадратурной формулой

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} f(x_k), \quad x_k = \cos t_k, \quad t_k = \frac{2k-1}{2n_1} \pi \quad (2.7)$$

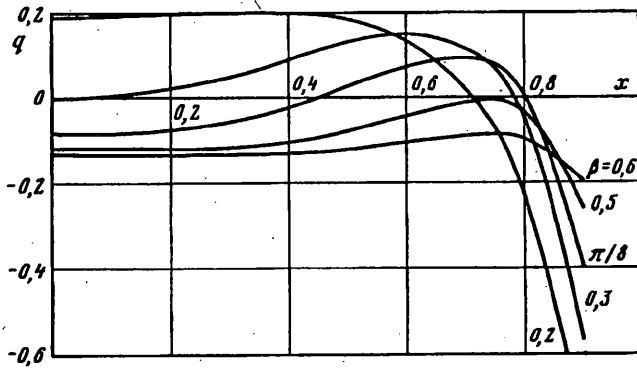
запишем выражение для вычисления B_{sj} в виде

$$B_{sj} = B_{sj1} + B_{sj2}, \quad B_{sj1} = \frac{\pi}{\alpha m} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{s/2} (-1)^{j/2} C_n J_s(\beta \lambda_n) J_j(\beta \lambda_n)$$

$$B_{sj2} = \frac{1}{n_1^2} \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_1} \ln \left| \frac{2 \sin 1/2 \pi \beta (x_k - x_l) / \alpha}{x_k - x_l} \right| \cos(st_k) \cos(st_l)$$

3. Численные результаты. Все расчеты были выполнены для случая плоской деформации при значениях параметров $\nu = 1/4$ ($m = 3/2$), $\alpha = \pi/4$. Заданное радиальное перемещение δ принималось постоянным. Число удерживаемых слагаемых в суммах (1.4) и (2.7) было принято равным 20, так как при увеличении этого числа до 30 уточнение в величине давлений и напряжений не превышало 1%.

На фиг. 2 показано распределение давления $q(x)$ для тонкостенного диска при $r_0 = 0,9$ и различных углах охвата β . При $\beta \leq 0,2$ давление отрицательно только вблизи концов дуг L_s . Вблизи середины этих дуг давление положительно, что, при односторонних связях, свидетельствует об отрыве тел друг от друга.



Фиг. 2

При $\beta \geq 0,3$ в середине возникает и развивается еще одна зона контакта, а при $\beta \geq 0,5$ отрыва не возникает.

Окружные напряжения в точке $x = 1$ наружной поверхности диска приведены ниже (вторая строка):

β	0,2	0,3	$\pi/8$	0,5	0,6	$\pi/4$
$\sigma_c(1, \beta)/\delta$	2,62	3,05	3,02	2,38	1,68	1,28
$\epsilon_c(1, \beta)/\delta$	3,05	3,91	4,05	3,20	2,17	1,32

Качественно та же картина зон контакта и отрыва получается в рамках теории тонкого кольца. Не приводя деталей, изложим основные результаты. Приложив на концах дуг L , сосредоточенные силы, можно убедиться, что при $\beta < \beta_0$ радиальный прогиб между силами больше, чем под силами. Выбрав силы по заданному прогибу, удовлетворим условиям контакта при односторонних связях.

При увеличении β прогиб в середине дуг L , начинает уменьшаться и при некотором $\beta = \beta_0$ становится равным прогибу под силами. В середине дуг возникают новые сосредоточенные силы. При $\beta = \beta_1 > \beta_0$ кривизна в этих точках обращается в нуль и от нее развивается зона сплошного контакта с постоянным давлением и сосредоточенными силами на концах.

Для тонкого кольца (без учета деформаций сдвига) при $N = 4$ упомянутые углы получаются равными $\beta_0 = 0,36$, $\beta_1 = 0,41$.

При двусторонних связях задачу можно решить, приложив на концах дуг L сосредоточенные радиальные силы и моменты и считая давление в зоне контакта постоянным. Вычисленные таким образом окружные напряжения по теории тонкого кольца приведены в выводе в третьей строке σ_c . Из сравнения с точным решением видно, что при наличии острых углов совпадение напряжений хуже, чем в [1] для штампов с круглым основанием. Это отмечалось в [2] на другом примере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк З. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
2. Detinko F. M. The axisymmetric contact problem for a cylindrical shell//Int. J. of Eng. Sci. 1986. V. 24. № 6. P. 963—969.

Орландо, США

Поступила в редакцию
3.II.1992