

УДК 539.3

© 1994 г. Т. А. ЗАЙЦЕВА, В. И. ПОЖУЕВ

О РЕШЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКРУГОВОГО ШТАМПА

В работах, посвященных пространственным контактными задачам о вдавлении кругового кольцевого штампа, получены в основном приближенные решения [1]. Из них следует отметить [2—4]. В [2] решение получено в виде асимптотических формул для больших и малых значений некоторого безразмерного параметра, характеризующего ширину кольца. В [3] эффективно использованы тройные интегральные уравнения. При отсутствии радиальной симметрии пространственные контактные задачи для двусвязных областей оказываются несравненно сложнее и изучены значительно меньше. Использование структурного метода, в котором неопределенные компоненты структур находятся с помощью методов Бубнова — Галеркина и Ритца, позволило получить приближенные решения для некоторых двусвязных штампов, обладающих центральной симметрией [5]. Приближенное решение задачи для односвязных и двусвязных штампов, близких в плане к круговому, получено в [6, 7] с использованием функций Грина. В [8] предлагается вариант метода возмущений, основанный на использовании вариационных формул и позволяющий получить асимптотические разложения решений пространственных контактных задач со сложной односвязной формой площадки контакта.

В публикуемой работе применяется вариант метода возмущений, основанный на использовании разложения по малому параметру потенциала простого слоя, распределенного по двусвязной области. Предложенный метод позволяет свести задачу о давлении плоского штампа, в плане занимающего область в форме некругового кольца, к последовательности аналогичных задач для штампа в форме кругового кольца, что позволяет использовать решения, известные для кольцевого кругового штампа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о давлении на однородное и изотропное упругое полупространство $x_3 \geq 0$ жесткого цилиндрического штампа, имеющего в плане форму некругового кольца, с плоским основанием. Основание штампа считается абсолютно гладким, поэтому принимается, что касательные напряжения σ_{13} и σ_{23} отсутствуют по всей плоскости $x_3 = 0$:

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \text{при } x_3 = 0 \quad (1.1)$$

Нормальные напряжения отсутствуют на плоскости $x_3 = 0$ вне области Ω соприкосновения штампа с полупространством. В точках $x(x_1, x_2, 0)$ области Ω упругая среда полупространства подвергается действию сжимающей нагрузки $p(x)$, так что

$$\sigma_{33}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \Omega \\ -p(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

Краевое условие в случае плоского штампа для вертикального перемещения точек области Ω , которое выражается через неизвестные величины, определяющие перемещения штампа, сводится к двумерному интегральному уравнению первого рода для искомого распределения нормального давления $p(x)$:

$$\delta - \beta_2 x_1 + \beta_1 x_2 = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \iint_{\Omega} \frac{p(y) dy}{|x - y|} \quad (1.3)$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, δ — поступательное

перемещение штампа параллельно оси x_3 , β_1, β_2 — проекции вектора поворота штампа. Неизвестные величины β_1, β_2 определяются из уравнений равновесия штампа

$$P = \iint_{\Omega} p(x) dx, \quad M_1 = \iint_{\Omega} x_2 p(x) dx, \quad M_2 = \iint_{\Omega} x_1 p(x) dx \quad (1.4)$$

в которых P, M_1, M_2 — главный вектор и главные моменты приложенных к штампу сил.

2. Сведение к последовательности задач для кругового кольца. Рассмотрим случай, когда уравнения линий Γ_1 и Γ_2 , ограничивающих Ω , область контакта штампа с полупространством, могут быть представлены в виде следующих функций:

$$\rho_1 = a(1 + f(\varepsilon, \theta)), \quad \rho_2 = b(1 + f(\varepsilon, \theta)) \quad (a < b, \varepsilon < 1) \quad (2.1)$$

где ρ, θ — полярные координаты, $x_1 = \rho \cos \theta, x_2 = \rho \sin \theta, f(\varepsilon, \theta)$ — непрерывная и однозначная функция, такая, что может быть представлена рядом по степеням ε , который имеет вид

$$f(\varepsilon, \theta) = \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \dots \quad (2.2)$$

Штамп вдавлируется в полупространство вертикальной силой Q . Так как уравнения линий (2.1), ограничивающих область Ω , зависят от малого параметра ε , то, очевидно, и искомое распределение нормальных давлений $p(\rho, \theta)$ зависит от ε . Решение уравнения (1.3) ищем в виде

$$p(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\rho, \theta) \varepsilon^k \quad (2.3)$$

Введем новые переменные (R, φ) , связанные со старыми (ρ, θ) следующими зависимостями:

$$\rho = R(1 + f(\varepsilon, \theta)), \quad \theta = \varphi \quad (2.4)$$

Здесь $f(\varepsilon, \theta)$ определяется выражением (2.2); при этом область Ω , ограниченная линиями (2.1), перейдет в круговое кольцо D , ограниченное окружностями $R = a, R = b$.

В новых переменных решение (2.3) уравнения (1.3) представим в виде ряда по степеням ε :

$$p(\rho(R, \varphi, \varepsilon), \varphi) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} P_k(R, \varphi) \varepsilon^k \quad (2.5)$$

Из зависимостей (2.4), (2.2) следует, что $\rho = R$ при $\varepsilon = 0$. Учитывая это, получим выражения для $P_k(R, \varphi)$ при $k = 0, 1, 2$, необходимые в первых приближениях, которые имеют вид

$$P_0(R, \varphi) = p_0(R, \varphi) \quad (2.6)$$

$$P_1(R, \varphi) = p_1(R, \varphi) + p_0'(R, \varphi) R f_1(\varphi) \quad (2.7)$$

$$P_2(R, \varphi) = p_2(R, \varphi) + p_0''(R, \varphi) R f_2(\varphi) + p_1'(R, \varphi) R f_1(\varphi) + 0,5 p_0'''(R, \varphi) R^2 f_1^2(\varphi) \quad (2.8)$$

Штрих обозначает производную по переменной R . Интеграл, входящий в уравнение (1.3), представим в виде разложения по степеням ε :

$$U = \iint_{\Omega} \frac{p(\rho, \theta)}{r} ds = \sum_{k=0}^{\infty} U_k \varepsilon^k \quad (2.9)$$

$$r^2 = |x - y|^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0); \quad (\rho_0, \theta_0) \in \Omega \quad (2.10)$$

Так как подынтегральная функция в интеграле (2.9) обращается в бесконечность в точке (ρ_0, θ_0) , то при нахождении производных для разложения (2.9), нужно сначала исключить эту точку из области Ω . Для этого вырежем из Ω точку (ρ_0, θ_0) кругом радиуса α .

Входящие в выражение (2.9) производные являются производными по параметру ε от двойного интеграла, у которого не только подынтегральная функция зависит от этого параметра, но и уравнения границы зависят от ε . Производя дифференцирование по параметру ε и учитывая, что уравнения границы области с выброшенной точкой зависят от параметра [9], получим, переходя к пределу при α стремящемся к 0 и $\varepsilon = 0$:

$$U_0 = \iint_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{r} ds \quad (2.11)$$

$$U_1 = \iint_D \frac{P_1(\rho, \theta)}{r} ds + \left(1 - \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}\right) \iint_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{r} f_1(\theta) ds \quad (2.12)$$

$$U_2 = \iint_D \frac{P_2(\rho, \theta)}{r} ds + \left(1 - \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}\right) \iint_D \frac{P_1(\rho, \theta)}{r} f_1(\theta) ds + \quad (2.13)$$

$$+ \left(1 - \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}\right) \iint_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{r} f_2(\theta) ds + \rho_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho_0^2} \iint_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{2r} f_1^2(\theta) ds$$

Неизвестное поступательное перемещение штампа δ и проекции вектора поворота штампа β_1 и β_2 также запишем в виде рядов по степеням ε :

$$\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \varepsilon^k, \quad \beta_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{1k} \varepsilon^k, \quad \beta_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k} \varepsilon^k \quad (2.14)$$

Затем в уравнениях (1.4) представим в виде рядов по степеням ε интегралы, входящие в эти уравнения.

Подставляя разложения (2.14), а также (2.9) с учетом (2.11)–(2.13) в уравнения (1.3), (1.4) и приравнявая выражения при одинаковых степенях ε , получим следующие системы уравнений для определения $P_k(\rho, \theta)$, δ_k , β_{1k} , β_{2k} :

$$\frac{\delta_k' 2\pi G}{1 - \nu} = \iint_D \frac{P_k(\rho, \theta)}{r} ds + \Phi_k(P_0, P_1, \dots, P_{k-1}) \quad (2.15)$$

$$Q_k = \iint_D P_k(\rho, \theta) ds + F_k(P_0, P_1, \dots, P_{k-1})$$

$$\delta_k' = \delta_k + \beta_{1k} \rho \sin \theta - \beta_{2k} \rho \cos \theta$$

$$M_{1k} = \iint_D P_k(\rho, \theta) \rho \sin \theta ds + V_k(P_0, P_1, \dots, P_{k-1}) \quad (2.16)$$

$$M_{2k} = \iint_D P_k(\rho, \theta) \rho \cos \theta ds + W_k(P_0, P_1, \dots, P_{k-1}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Выпишем выражения для функций Φ_k , F_k , V_k , W_k при $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = L_1(P_0), \quad \Phi_2 = L_1(P_1) + L_2(P_0)$$

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 2 \iint_D P_0(\rho, \theta) f_1(\theta) ds$$

$$F_2 = \iint_D (2P_1(\rho, \theta) f_1^2(\theta) + 2P_0(\rho, \theta) f_2(\theta) + P_0(\rho, \theta) f_1^2(\theta)) ds$$

$$V_0 = 0, \quad V_1 = \int \int_D P_0(\rho, \theta) 3f_1(\theta) \rho \sin \theta ds$$

$$V_2 = \int \int_D 3(P_1(\rho, \theta) f_1(\theta) + P_0(\rho, \theta) f_2(\theta) + P_0(\rho, \theta) f_1''(\theta)) \rho \sin \theta ds \quad (2.17)$$

$$W_0 = 0, \quad W_1 = \int \int_D P_0(\rho, \theta) 3f_1(\theta) \rho \cos \theta ds$$

$$W_2 = \int \int_D 3(P_1(\rho, \theta) f_1(\theta) + P_0(\rho, \theta) f_2(\theta) + P_0(\rho, \theta) f_1''(\theta)) \rho \cos \theta ds$$

$$L_1(P_0) = \left(1 - \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}\right) \int \int_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{r} f_1(\theta) ds \quad (2.18)$$

$$L_2(P_0) = \left(1 - \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}\right) \int \int_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{r} f_2(\theta) ds + \rho_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho_0^2} \int \int_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{2r} f_1''(\theta) ds$$

где D — круговое кольцо, $a \leq \rho \leq b$.

Таким образом, при определении поступательного перемещения штампа δ , проекций вектора поворота β_1, β_2 (2.14) и функции $p(\rho, \theta)$ (2.3), характеризующей распределение нормального давления под штампом, которые являются решением задачи (1.3), (1.4) для области Ω , получили последовательность аналогичных задач (2.15), (2.16) для кругового кольца D .

3. Штамп формы эллиптического кольца в плане. Рассмотрим штамп, занимающий в плане область, контур которой ограничен двумя эллипсами Γ_1, Γ_2 с уравнениями в полярной системе координат, соответственно

$$\rho_1^2 = \frac{a^2(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}, \quad \rho_2^2 = \frac{b^2(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}, \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{a_1^2}{a^2} = 1 - \frac{b_1^2}{b^2} \quad (3.1)$$

где ε — эксцентриситет эллипсов, a, b — фокальные, a_1, b_1 — малые полуоси эллипсов. В этом случае функция $f(\varepsilon, \theta)$ в уравнениях (2.1), (2.2) имеет вид

$$f(\varepsilon, \theta) = -0,5\varepsilon^2 \sin^2 \theta - 0,125\varepsilon^4 (4 - 3 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta - \dots \quad (3.2)$$

Штамп вдавливается силой Q , линия действия которой проходит через центр эллипсов. В нулевом приближении при определении функции, характеризующей распределение давления, (2.5) и поступательного перемещения штампа δ (2.14), когда $\varepsilon = 0$, учитывая (2.17), из системы (2.15) и (2.16) получаем в случае $k=0$ следующие уравнения:

$$\frac{\delta_0 2\pi G}{1 - \nu} = \int \int_D \frac{P_0(\rho)}{r} ds \quad (3.3)$$

$$Q = \int \int_D P_0(\rho) ds \quad (3.4)$$

Для решения полученных уравнений (3.3), (3.4) воспользуемся решением задачи о вдавливании кругового кольцевого штампа в упругое полупространство [4], которое в данном случае обозначим:

$$P_0(\rho) = p_{00}(\rho) \quad (3.5)$$

$$p_{l,m}(\rho) = \frac{1}{2\pi b} \sum_{k=0}^{\infty} \left[x_{2k}^{(l,m)} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{2k} + y_{2k+3}^{(l,m)} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{2k+3} \right] \quad (3.6)$$

$$x_{2k}^{(l,m)} = \sum_{n=0}^3 C_{lm}^{(n)} \sum_{\rho=0}^{\infty} \alpha_{\rho k}^{(n)} \left(\frac{a}{b}\right)^{\rho}; \quad y_{2k+3}^{(l,m)} = \sum_{n=0}^3 C_{lm}^{(n)} \sum_{\rho=0}^{\infty} \beta_{\rho k}^{(n)} \left(\frac{a}{b}\right)^{\rho} \quad (3.7)$$

$$C_{00}^{(1)} = C_{00}^{(2)} = C_{00}^{(3)} = 0$$

Коэффициенты $\alpha_{pk}^{(n)}$, $\beta_{pk}^{(n)}$ определяются из следующих рекуррентных соотношений:

$$\alpha_{pk}^{v(n)} = \frac{2}{\pi} \sum_{q=0}^{E((p-3)/2)} \frac{\beta_{p-2q-3,q}^v}{2q+2k+3}, \quad \beta_{pk}^{v(n)} = \frac{2}{\pi} \sum_{q=0}^{E(p/2)} \frac{\alpha_{p-2q,q}^v}{2q+2k+3} \quad (p=3, 4, \dots; k=0, 1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

$$\alpha_{pk}^{v(n)} = \frac{2k!!}{(2k+1)!!} \alpha_{pk}^{(n)}, \quad \beta_{pk}^{v(n)} = \frac{2k!!}{(2k+1)!!} \beta_{pk}^{(n)} \quad (3.9)$$

$$\alpha_{0k}^{v(0)} = \frac{2}{\pi(2k+1)}, \quad \beta_{0k}^{v(0)} = \frac{\alpha_{00}^{v(0)}}{\pi(2k+3)}, \quad \beta_{1k}^{(0)} = \alpha_{1k}^{(0)} = \alpha_{2k}^{(0)} = 0 \quad (3.10)$$

$$\alpha_{0k}^{(1)} = 0, \quad \beta_{0k}^{v(1)} = \frac{2}{\pi(2k+1)}, \quad \alpha_{1k}^{(1)} = \beta_{1k}^{(1)} = \alpha_{2k}^{(1)} = 0 \quad (3.11)$$

Подставляя (3.5) с учетом (3.6)–(3.10) в уравнения (3.3), (3.4), находим

$$\delta_0 = \gamma \frac{(1-\nu)Q}{4Gb}, \quad C_{00}^{(0)} = \gamma \frac{\pi Q}{2b} \quad (3.12)$$

$$\gamma^{-1} = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \frac{2}{15}\left(\frac{a}{b}\right)^5 - \frac{4}{27\pi^2}\left(\frac{a}{b}\right)^6 - \frac{23}{315}\left(\frac{a}{b}\right)^7 - \frac{28}{27\pi^2 25}\left(\frac{a}{b}\right)^8 - \dots\right) \quad (3.13)$$

Учитывая вид функции $f_1(\theta)$ (2.2) в уравнениях (3.1), (3.2) границ Γ_1 , Γ_2 , и функции $P_0(\rho)$ (3.5)–(3.7) вместе с (3.12), получаем, что в случае, когда $k=1$, уравнения (2.15), (2.16) для определения функции $P_1(\rho, \theta)$ (2.5), (2.7), описывающей контактное давление $p(\rho, \theta)$ (2.3) при ε^2 , и заглупление штампа δ_1 (2.14), имеют вид

$$\frac{\delta_1 2\pi G}{1-\nu} = \int \int_D \frac{P_1(\rho, \theta)}{r} ds - \frac{C_{00}^{(0)}}{4} + \frac{C_{00}^{(0)}}{2} \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p0}^{(0)} \left(\frac{a}{b}\right)^{p+1} \cos 2\theta_0 \quad (3.14)$$

$$O = \int \int_D P_1(\rho, \theta) ds - Q/2 \quad (3.15)$$

Решение системы уравнений (3.14), (3.15) можно представить зависимостью

$$P_1(\rho, \theta) = p_{10}(\rho) + p_{11}(\rho) \cos 2\theta \quad (3.16)$$

где $p_{10}(\rho)$ определяется выражениями (3.6), (3.7) при $i=1$, $m=0$, в которых постоянные равны:

$$C_{10}^{(0)} = 0,5C_{00}^{(0)}, \quad C_{10}^{(n)} = 0 \quad (n=1, 2, 3), \quad \delta_1 = 0,5\delta_0 \quad (3.17)$$

Второе слагаемое в решении (3.16) описывается выражениями (3.6), (3.7) при $i=1$, $m=1$, в которых постоянные $C_{11}^{(3)} = C_{11}^{(4)} = 0$, а постоянные $C_{11}^{(0)}$ и $C_{11}^{(1)}$ определяются при подстановке (3.16) в уравнение (3.14) с учетом (3.17) и представляют собой зависимости от a и b , являющиеся решением системы

$$C_{11}^{(0)} \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{p0}^{(0)} \left(\frac{a}{b}\right)^p + C_{11}^{(1)} \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{p0}^{(1)} \left(\frac{a}{b}\right)^p = 0 \quad (3.18)$$

$$C_{11}^{(0)} \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p0}^{(0)} \left(\frac{a}{b}\right)^p + C_{11}^{(1)} \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p0}^{(1)} \left(\frac{a}{b}\right)^p = -\frac{3}{4} C_{00}^{(0)} \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p0}^{(0)} \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

Для определения коэффициентов при ε^4 в разложениях (2.5), (2.14) получаем, что система уравнений (2.15), (2.16), учитывая вид функций $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ в уравнениях (3.1), (3.2), границы области Ω и функций $P_0(\rho)$ (3.5), (3.6), $P_1(\rho, \theta)$ (3.17), в случае, когда $k=2$, имеет вид

$$\frac{\delta_2 2\pi G}{1-\nu} = \int \int_D \frac{P_2(\rho, \theta)}{r} ds + A_0 + A_1 \rho_0^{-1} + A_2 \rho_0^{-2} \cos 2\theta_0 +$$

$$+ \left(-\frac{1}{40} A_2 \rho_0^{-2} + A_3 \rho_0^3 + A_4 \rho_0^{-4} \right) \cos 4\theta_0 \quad (3.19)$$

$$O = \int \int_D P_2(\rho, \theta) ds - 7Q/16 \quad (3.20)$$

$$A_0 = -15C_{00}^{(0)}/64 + C_{10}^{(0)}/8, \quad A_1 = a^2 C_{10}^{(1)}/(4b), \quad A_2 = a^3 y_{2,0+3}^{(0,0)}/(2b) \quad (3.21)$$

$$A_3 = -4x_{2,1}^{(1,0)}/35, \quad A_4 = (a^5/b) (2y_{2,1+3}^{(1,0)}/7 + y_{2,1+3}^{(0,0)}/14)$$

Функцию $P_2(\rho, \theta)$, являющуюся решением уравнений (3.19), (3.20) ищем в виде

$$P_2(\rho, \theta) = p_{20}(\rho) + p_{21}(\rho) \cos 2\theta + p_{22}(\rho) \cos 4\theta \quad (3.22)$$

В данном выражении функции $p_{20}(\rho)$, $p_{21}(\rho)$, $p_{22}(\rho)$ описываются зависимостью (3.6) при $i=2$ и $m=0, 1, 2$, соответственно. Постоянные, входящие в выражения (3.6), (3.7), равны

$$C_{20}^{(0)} = 3C_{00}^{(0)}/8 - C_{11}^{(0)}/4, \quad C_{20}^{(1)} = -C_{11}^{(1)}/4, \quad C_{21}^{(0)} = C_{11}^{(0)} \quad (3.23)$$

$$C_{21}^{(1)} = C_{11}^{(1)}, \quad C_{20}^{(2)} = C_{20}^{(3)} = C_{21}^{(2)} = C_{21}^{(3)} = 0$$

$$\delta_2 = (9C_{00}^{(0)}/64 - C_{11}^{(0)}/8) (1-\nu)/(\pi G) \quad (3.24)$$

Содержащиеся в функции $p_{zz}(\rho)$ коэффициенты $\alpha_{\rho k}^{(n)}$, $\beta_{\rho k}^{(n)}$ определяются рекуррентными соотношениями (3.8) с учетом (3.9), в которых начальные данные при $n=0, 1$ определяются выражениями (3.10), (3.11), а при $n=2, 3$ начальные данные имеют вид

$$\alpha_{0k}^{(2)} = \frac{(2k+1)!!}{\pi 2k!! (2k-1)}, \quad \beta_{0k}^{(2)} = \frac{2(2k+1)!! \alpha_{00}^{(2)}}{\pi 2k!! (2k+3)}, \quad \alpha_{1k}^{(2)} = \beta_{1k}^{(2)} = \alpha_{1k}^{(2)} = 0 \quad (3.25)$$

$$\alpha_{0k}^{(3)} = 0, \quad \beta_{0k}^{(3)} = \frac{(2k+1)!!}{\pi 2k!! (2k-1)}, \quad \alpha_{1k}^{(3)} = \beta_{1k}^{(3)} = \alpha_{2k}^{(3)} = \beta_{2k}^{(3)} = 0 \quad (3.26)$$

Постоянные $C_{22}^{(i)}$ ($i=0, 1, 2, 3$) в третьем слагаемом выражения (3.22) определяются при подстановке (3.22) в уравнение (3.19) и представляют собой зависимости от a и b , являющиеся решением системы, состоящей из четырех уравнений и аналогичной системе (3.18).

Воспользовавшись найденными выражениями для функций $P_k(\rho, \theta)$ (3.5), (3.6), (3.16), (3.22) из соотношений (2.6)–(2.8) определяем коэффициенты $P_k(\rho, \theta)$ разложения искомой функции $p(\rho, \theta)$ (2.3), характеризующей распределение давления под штампом.

4. Пример. В качестве примера вычислим контактное давление и заглубление штампа, ограничиваясь в разложении (2.4) четвертой степенью ε включительно. Вычисления проведем, когда полуоси эллипса, являющегося наружным контуром штампа в плане, в два раза больше соответствующих полуосей эллипса, являющегося внутренним контуром, т. е. $b=2a$. На наружном контуре штампа в плане зафиксируем точку с координатами (ρ_{r_2}, θ_*) . Через эту точку проведем луч из начала координат. Он пересечет внутренний контур области контакта Ω в точке с координатами (ρ_{r_1}, θ_*) . При определении контактного давления $p(\rho, \theta)$ в точках (ρ, θ_*) этого луча получаем, что выражение $p(\rho, \theta_*)$ (2.3) принимает вид (2.5), в котором соотношения a к ρ и ρ к b заменяются

соответственно на соотношения ρ_{Γ_1} к ρ и ρ к ρ_{Γ_2} и при $b = 2a$ выражаются зависимостями

$$p(\rho, \theta_*) = P_0 + \varepsilon^2 P_1 + \varepsilon^4 P_2 \quad (4.1)$$

$$P_0 = \frac{Q}{2\pi b^2} \sigma_0, \quad P_1 = \frac{Q}{2\pi b^2} [0,5\sigma_0 + (0,004741\sigma_0 - 0,1692\sigma_1) \cos 2\theta_*] \quad (4.2)$$

$$P_2 = \frac{Q}{2\pi b^2} [0,3738\sigma_0 + 0,04280\sigma_1 + (0,004741\sigma_0 - 0,1692\sigma_1) \cos 2\theta_* + (-0,0003617\sigma_0 - 0,02174\sigma_1 - 0,0004997\sigma_2 - 0,06466\sigma_3) \cos 4\theta_*]$$

$$\sigma_i = \frac{\pi}{2} \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_{\Gamma_2}} \right)^{2k} \alpha_{pk}^{(i)} + \left(\frac{\rho_{\Gamma_1}}{\rho} \right)^{2k+3} \beta_{pk}^{(i)} \right] \left(\frac{a}{b} \right)^p \quad (4.3)$$

Коэффициенты $\alpha_{pk}^{(n)}$ определяются из рекуррентных соотношений (3.8), (3.9) с начальными данными (3.10), (3.11), (3.25) и (3.26).

При вычислении давлений в точках близких к границе области контакта Ω в выражениях для σ_i (4.3) можно выделить особенности:

$$\sigma_i = \gamma \left\{ \frac{1}{(1 - \rho^2/\rho_{\Gamma_2}^2)^{1/2}} \left(\frac{a}{b} \right)^3 f_i \left(\frac{\rho}{\rho_{\Gamma_2}}, \beta_{pk} \right) + \right. \quad (4.4)$$

$$\left. + \frac{1}{(1 - \rho_{\Gamma_1}^2/\rho^2)^{1/2}} \left(\frac{\rho_{\Gamma_1}}{\rho} \right)^3 f_i \left(\frac{\rho_{\Gamma_1}}{\rho}, \alpha_{pk} \right) - \left(\frac{a}{b} \right)^3 \left(\frac{\rho}{\rho_{\Gamma_2}} \right) g_i \left(\frac{\rho}{\rho_{\Gamma_2}}, \beta_{pk} \right) - g_i \left(\frac{\rho_{\Gamma_1}}{\rho}, \alpha_{pk} \right) \right\}$$

$$f_i(t, \alpha_{pk}) = \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^m \alpha_{pk}^{(i)} \left(\frac{a}{b} \right)^p \frac{2k!!}{(2k+1)!!} + B_i + C_i(1-t^2) \quad (4.5)$$

$$g_i(t, \alpha_{pk}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{pk}^{(i)} \left(\frac{a}{b} \right)^{2k+p} t^{-2k} \left(\arcsin t - t(1-t^2)^{1/2} \sum_{q=0}^k \frac{2q!!}{(2q+1)!!} t^{2q} + D_i \right)$$

При этом сумма $R_{mn}(\rho)$ отброшенных членов в выражении (4.4) не превосходит величины получаемой из зависимости

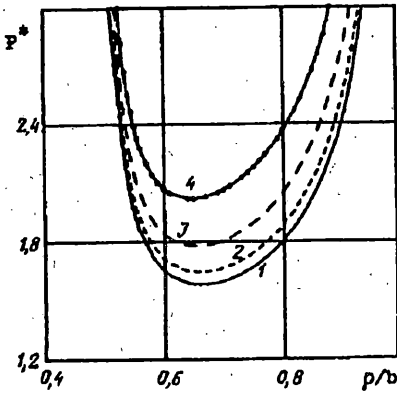
$$R_{mn}(\rho) \leq \gamma \frac{\arcsin(a/b)}{(a/b)(1-a/b)(1-a^2/b^2)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{(1 - \rho^2/\rho_{\Gamma_2}^2)^{1/2}} \left(\frac{a}{b} \right)^3 \left[\beta_{m+1,0} \left(\frac{a}{b} \right)^{m+1} + \beta_{0,n+1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2n+2} \right] - \frac{1}{(1 - \rho_{\Gamma_1}^2/\rho^2)^{1/2}} \left(\frac{\rho_{\Gamma_1}}{\rho} \right) \left[\alpha_{m+1,0} \left(\frac{a}{b} \right)^{m+1} + \alpha_{0,n+1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2n+2} \right] \right\} \quad (4.6)$$

Зависимость между силой Q и глубиной вдавливания штампа δ получим из выражений (2.14), (3.12), (3.17) и (3.24):

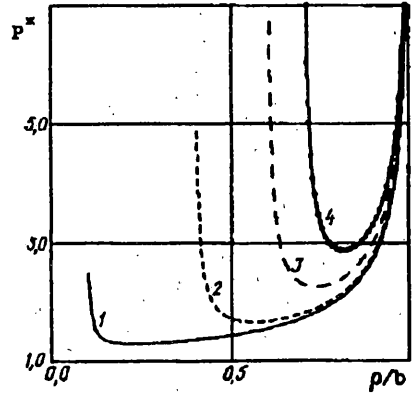
$$\delta = \frac{1-\nu}{\pi G} \frac{\pi Q}{2b\gamma^{-1}} [1 + 0,5\varepsilon^2 + \varepsilon^4 (9/64 - C_{11}^{(0)}/(8C_{00}^{(0)}))] + o(\varepsilon^6) \quad (4.7)$$

На фиг. 1 линиями 1, 2, 3, 4 соответственно представлены графики распределения нормального давления $P^* = 2\pi b^2 p(\rho, \theta)/Q$ под подошвой штампа при $b = 2a$ вдоль оси Ox ($\theta = 0$) для $\varepsilon = 0,0; 0,3; 0,5; 0,7$, найденные по формуле (4.1). При этом давления при $\varepsilon = 0$ для кругового кольца отличаются от полученных в [3] меньше, чем на 0,5%.

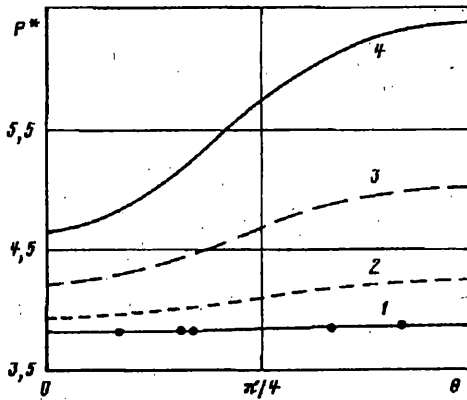
Графики распределения нормальных давлений P^* для эллиптических кольцевых штампов различной ширины приведены на фиг. 2, где линиями 1, 2, 3,



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

4, представлены графики нормальных давлений P^* под штампом вдоль оси Ox ($\theta = 0$) для отношений a к b 0,1; 0,4; 0,6; 0,7 соответственно ($\varepsilon = 0,6$).

На фиг. 3 приведены графики распределения нормальных давлений под подошвой штампов в точках линии, проходящей от внутренней границы штампа на расстоянии 0,02 ширины эллиптического кольца, т. е. в точках, для которых $\rho = 0,51\rho_{\Gamma_2}$, когда полуоси внешнего граничного эллипса в два раза больше соответствующих полуосей внутреннего граничного эллипса ($b = 2a$). Линиями 1, 2, 3, 4, соответственно представлены графики распределения нормальных давлений P^* для $\varepsilon = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$. Из приведенных графиков видно, что с увеличением эксцентриситета ε нормальные давления под подошвой штампов растут быстрее вдоль меньшей оси эллипсов, ограничивающих в плане штамп. При $\varepsilon = 0,8$ нормальные давления в точках $\rho = 0,51\rho_{\Gamma_2}$ при $\theta = \pi/2$ (на меньшей оси) почти на 37% превышают нормальные давления при $\theta = 0$ (на большей оси).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Развитие теории контактных задач в СССР/Под ред. Галина Л. А. М.: Наука, 1976. 493 с.
2. Александров В. М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство//Известия АН СССР. МТТ. 1967. № 4. С. 108—116.
3. Бородачев Н. М., Бородачева Ф. Н. Вдавливание кольцевого штампа в упругое полупространство//Известия АН СССР. МТТ. № 4. 1966. С. 158—161.

4. *Ройтман А. Б., Шишканова С. Ф.* Вдавливание неплоского кольцевого штампа в упругое полупространство//Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 4. С. 35—41.
5. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 235 с.
6. *Мартыненко М. Д.* Некоторые пространственные задачи теории упругости//В кн.: Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971. С. 78—85.
7. *Мартыненко М. Д.* Смешанные задачи теории потенциала и некоторые контактные задачи для полупространства//Докл. АН УССР. Сер. А. 1969. № 10. С. 885—888.
8. *Бородачев Н. М.* Метод возмущений для смешанных пространственных задач теории упругости со сложной линией раздела краевых условий//ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 628—634.
9. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
10. *Моссаковский В. И., Качаловская Н. Е., Голикова С. С.* Контактные задачи математической теории упругости. Киев: Наук. думка, 1985. 175 с.
11. *Пожуев В. И., Зайцева Т. А.* Вдавливание штампа в форме некругового кольца под действием центральной силы//Тр. I Всес. конф. Технологические проблемы прочности несущих конструкций. 1991. Т. 2. С. 138—143.

Запорожье

Поступила в редакцию
20.10.1992