МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1994

УДК 539.3

 И. А. СОЛДАТЕНКОВ

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ УЧЕТЕ КАСАТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ НА КОНТАКТЕ

В [1, 2] рассматривалась уточненная постановка контактной задачи для упругого полупространства, отличие которой от классической постановки подобной задачи [3] заключается в том, что граничное условие для нормального перемещения учитывает наличие касательного перемещения границы. Ниже в аналогичной уточненной постановке исследуется двумерная контактная задача для упругой полуплоскости.

При дальнейшем изложении материала используются следующие обозначения. Штрих у символа функции означает ее производную. Для класса (пространства) непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций используются традиционные обозначения C и C^1 соответственно. Класс функций удовлетворяющих условию Гельдера [4, 5] $|\psi(t_2) - \psi(t_1)| \le A\,|t_2 - t_1|^\lambda$, обозначается через H, а при необходимости указания параметра λ — через H^λ.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Пусть гладкий жесткий штамп, имеющий форму параболы $y = \gamma x^2$, $\gamma > 0$, симметричным образом контактирует с упругой полуплоскостью (фиг. 1), при этом трение между штампом и полуплоскостью (касательное контактное напряжение τ_{xy}) отсутствует. Тогда, если u и v — касательное и нормальное перемещения границы полуплоскости, а $p = -\sigma_y|_{y=0}$ — контактное давление штампа на полуплоскость, то [3]

$$u'(x) = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\,p(x), \quad v'(x) = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)\,d\xi}{\xi - x} \tag{1.1}$$

где $x \in (-a, a)$, $a > 0$, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона полуплоскости.

Следуя [1, 2], запишем граничное условие для нормального перемещения (условие контакта) в виде

$$v(x) = g(x + u(x)) + \text{const} \tag{1.2}$$

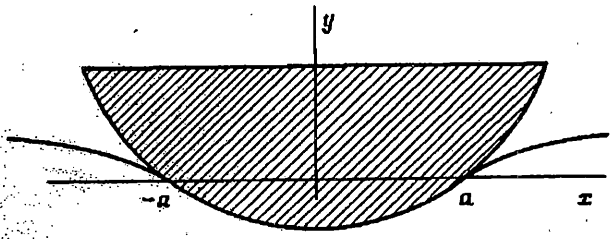
где $g(x) = \gamma x^2$ — форма штампа. Подчеркнем, что как раз в соотношении (1.2) состоит отличие рассматриваемой уточненной постановки от классической, предусматривающей использование граничного условия для нормального перемещения вида [3] $v(x) = g(x) + \text{const}$.

Задача состоит в нахождении распределения контактного давления $p(x)$ для заданного размера a области контакта, исходя из равенств (1.1) и (1.2).

Получим уравнение, определяющее искомую функцию $p(x)$. Для этого продифференцируем (1.2) по x и пренебрежем в полученном равенстве произведением uu'. В результате будем иметь

$$v'(x) = 2\gamma\,[x + u(x) + xu'(x)] \tag{1.3}$$

Если теперь с помощью соотношения (1.3) и первого равенства (1.1) исключить из второго равенства (1.1) функции $v'(x)$ и $p(x)$, то нетрудно получить следующее уравнение для u:



Фиг. 1

$$\frac{2(1-\nu)}{\pi(1-2\nu)}\int_{-a}^{a}\frac{u'(\xi)\,d\xi}{\xi-x}=2\gamma\,[x+u(x)+xu'(x)] \tag{1.4}$$

Решение $u(x)$ уравнения (1.4) определяет функцию $p(x)$ в силу первого равенства (1.1). Рассмотрим это уравнение.

Прежде всего перейдем к новой переменной $x'=x/a$ и введем функции

$$U(x')=a^{-1}u(x'a),\qquad P(x')=(1-2\nu)(1+\nu)E^{-1}p(x'a) \tag{1.5}$$

Тогда уравнение (1.4) примет вид (штрих у x' далее опускается):

$$\int_{-1}^{1}\frac{U'(t)\,dt}{t-x}=m\,[x+U(x)+xU'(x)] \tag{1.6}$$

$$x\in(-1,1),\qquad m=\pi(1-2\nu)(1-\nu)^{-1}\gamma a\in(0,\infty)$$

Заметим, что в силу первого равенства (1.1) и соотношений (1.5)

$$P(x)=-U'(x),\qquad U(x)=-\int_{0}^{x}P(t)\,dt \tag{1.7}$$

В дальнейшем будем считать, что $P(x)\in H^{\lambda}[-1,1]$ при $\lambda\in(0,1)$, и воспользуемся известной методикой обращения интеграла типа Коши [4] в левой части (1.6). В результате, учитывая (1.7), получим

$$P(x)=\frac{m}{\pi^2}(1-x^2)^{1/2}\left[\pi+\int_{-1}^{1}\frac{U(t)\,dt}{(1-t^2)^{1/2}(t-x)}-\int_{-1}^{1}\frac{tP(t)\,dt}{(1-t^2)^{1/2}(t-x)}\right] \tag{1.8}$$

при условии

$$\int_{-1}^{1}\frac{(t+U(t)-tP(t))}{(1-t^2)^{1/2}}\,dt=0$$

которое выполняется, так как в силу симметрии задачи относительно оси y функция $P(x)$ является четной, а $U(x)$ нечетной.

В уравнение (1.8) (как и в (1.6)) наряду с $P(x)$ входит функция $U(x)$, что затрудняет его анализ. В связи с этим преобразуем уравнение (1.8). Для этого введем функцию

$$G(x,t)\equiv\int_{-1}^{t}\frac{d\eta}{(1-\eta^2)^{1/2}(\eta-x)},\qquad x,t\in(-1,1)$$

так что

$$\partial G(x,t)/\partial t=[(1-t^2)^{1/2}(t-x)]^{-1} \tag{1.9}$$

$$\lim_{t\to\pm1}G(x,t)=0,\qquad x\in(-1,1) \tag{1.10}$$

так как [6]:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial\eta}{(1-\eta^2)^{1/2}(\eta - x)} = 0, \qquad x \in (-1, 1)$$

На основе равенства (1.10) подынтегральное выражение в первом интеграле (1.8) можно представить в виде $U(t)dG(x, t)$, после чего, применяя для этого интеграла процедуру интегрирования по частям, с учетом ограниченности функции $U(x)$ и равенства (1.10) нетрудно получить следующее уравнение относительно $P(x)$:

$$P(x) = \frac{m}{\pi^2}[-I(x) + J(x)] + \frac{m}{\pi}(1 - x^2)^{1/2}, \qquad x \in (-1, 1) \tag{1.11}$$

$$I(x) = (1-x^2)^{1/2} \int_{-1}^{1} \frac{tP(t)\,dt}{(1-t^2)^{1/2}(t-x)}, \qquad J(x) = (1-x^2)^{1/2} \int_{-1}^{1} G(x, t)\,P(t)\,dt$$

Уравнение (1.11) приобретает более простой вид, если перейти к переменной s:

$$s = f_1(x) \equiv \begin{cases} [1 - (1-x^2)^{1/2}]\,x^{-1}, & 0 < |x| \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

А именно из (1.11) тогда нетрудно получить

$$\varphi(s) = \frac{m}{\pi^2}[-(K^\wedge\varphi)(s) + (L^\wedge\varphi)(s)] + \frac{m}{\pi}\left(\frac{1-s^2}{1+s^2}\right), \qquad s \in (-1, 1) \tag{1.13}$$

где $\varphi(s) = P(f_2(s))$, $f_2(s) = 2s(1+s^2)^{-1}$ — функция, обратная $f_1(x)$, а линейные операторы $K^\wedge$ и $L^\wedge$ определяются следующим образом:

$$(K^\wedge\varphi)(s) \equiv I(f_2(s)) = (1-s^2) \int_{-1}^{1} \frac{2t\varphi(t)\,dt}{(1+t^2)(t-s)(1-st)} \tag{1.14}$$

$$(L^\wedge\varphi)(s) \equiv J(f_2(s)) = \int_{-1}^{1} \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \ln\left|\frac{s-t}{1-st}\right| \varphi(t)\,dt$$

Уравнение (1.6) также можно представить в виде

$$\Phi^\wedge(U')(x) \equiv -mxU'(x) + \int_{-1}^{1} \frac{U'(t)\,dt}{t-x} = m(x + U(x)) \tag{1.15}$$

Обращая интегральный оператор $\Phi^\wedge$ в левой части (1.15) по методике, изложенной в [4], получим еще одно соотношение для $P(x) = -U'(x)$:

$$P(x) = \frac{mxf(x)}{\pi^2 + (mx)^2} + \frac{Z(x)}{\pi^2 + (mx)^2} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,dt}{Z(t)(t-x)} \tag{1.16}$$

при условии

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,dt}{Z(t)} = 0 \tag{1.17}$$

$$f(x) = m(x + U(x)) = m\left(x - \int_0^x P(t)\,dt\right)$$

$$Z(x) = (1-x^2)^{\mu}(1+x)^{\tau_1}(1-x)^{\tau_2}[\pi^2 + (mx)^2]^{1/2}\exp(-w(x))$$

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{m}{\pi} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\tau_n(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{m}{\pi} - \frac{(-1)^n}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{m}{\pi}x \qquad (n = 1, 2) \tag{1.18}$$

$$w(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{m}{\pi}t - \operatorname{arctg}\frac{m}{\pi}x}{t-x}\,dt$$

Нетрудно проверить, что функция $Z(x)$ является четной, тогда как функция $f(x)$ — нечетной, в силу чего равенство (1.17) выполняется тождественно.

Соотношения (1.11) и (1.16), очевидно, эквивалентны друг другу. Первое из них имеет более простой вид и поэтому будет использовано в следующем пункте для доказательства существования решения $P(x)$ задачи. Соотношение же (1.16), как будет показано ниже, позволяет выделить регулярную часть функции $P(x)$ и будет использовано при анализе особенности $P(x)$ на концах области контакта.

2. Доказательство существования и некоторые свойства решения задачи. Введем в рассмотрение пространство $F^\lambda[-1, 1]$ определенных на отрезке $[-1, 1]$ функций такое, что $\psi(t) \in F^\lambda[-1, 1]$, если $\psi(t) \in H^\lambda[-1, 1]$ и $\psi(\pm 1) = 0$. Здесь и далее λ берется из интервала $(0, 1)$.

Условие $\psi(t) \in H^\lambda[-1, 1]$ обеспечивает для каждой функции $\psi(t)$ и параметра λ существование константы A такой, что

$$|\psi(t_2) - \psi(t_1)| / |t_2 - t_1|^\lambda \leq A$$

при любых t_1, $t_2 \in [-1, 1]$ и $t_1 \neq t_2$. Последнее неравенство в свою очередь по известной теореме [7] обеспечивает существование следующего супремума:

$$\sup_{\substack{t_1, t_2 \in [-1, 1] \\ t_1 \neq t_2}} \frac{|\psi(t_2) - \psi(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\lambda} \equiv \overline{A}[\psi, \lambda]$$

где символами ψ и λ отмечается зависимость $\overline{A}$ от функции ψ и параметра λ. Учитывая это, а также принимая во внимание существование $\max|\psi(t)|$ $(t \in [-1, 1])$ для $\psi(t) \in H^\lambda[-1, 1] \subset C[-1, 1]$ введем в $F^\lambda[-1, 1]$ норму в виде [4, 8]:

$$\|\psi\| = \max_{t \in [-1, 1]} |\psi(t)| + \overline{A}[\psi, \lambda] \tag{2.1}$$

Нетрудно проверить, что определяемая выражением (2.1) величина действительно удовлетворяет всем аксиомам нормы [9]. Кроме того, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пространство $F^\lambda[-1, 1]$ с нормой вида (2.1) является полным.

Доказательство данной теоремы можно найти в [10].

Рассмотрим свойства операторов $K^\wedge$ и $L^\wedge$ вида (1.14) на пространстве $F^\lambda[-1, 1]$. Введем функцию

$$\beta(\lambda, q) = 2(2^{1-\lambda})^2\left[\frac{1+2^\lambda}{\lambda}(1+q)^\lambda + \frac{1}{(1-\lambda)q^{1-\lambda}}\right]$$

Тогда имеют место теоремы 2 и 3, доказательства которых даны в [10].

Теорема 2. Оператор $K^\wedge$ отображает $F^\lambda[-1, 1]$ в себя и является ограниченным

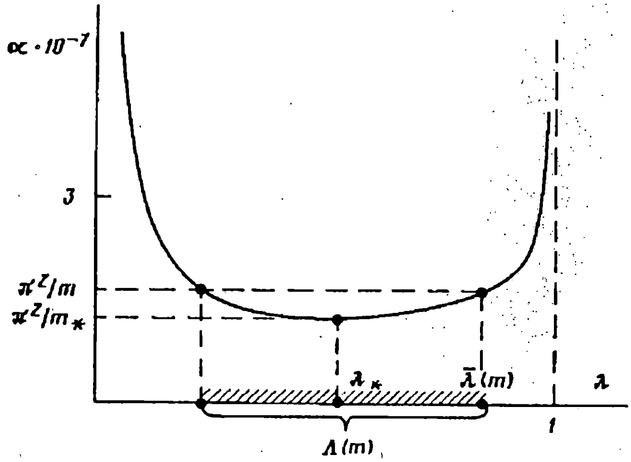
$$\|K^\wedge\psi\| \leq \alpha_1(\lambda)\|\psi\| \tag{2.2}$$

$$\psi(t) \in F^\lambda[-1, 1], \qquad \alpha_1(\lambda) = (1 + 2^\lambda)(1 + 4/2^\lambda)M_*(\lambda)$$

$$M_*(\lambda) = \min_{\substack{q \in (0, \infty) \\ r \in (0, 1)}} \max\left\{\frac{2(2^{1-\lambda})^3 r^{1-\lambda}}{1-r}, \left[1 + \frac{(2^{1-\lambda})^4}{r^{2\lambda}}\right]\beta(\lambda, q)\right\}$$

Теорема 3. Оператор $L^\wedge$ отображает $F^\lambda[-1, 1]$ в себя и является ограниченным

$$\|L^\wedge\psi\| \leq \alpha_2(\lambda)\|\psi\| \tag{2.3}$$



Фиг. 2

$\psi(t) \in F^\lambda[-1, 1]$, $\quad \alpha_2(\lambda) = (1 + 2^\lambda)(2 + 6/2^\lambda) M_*(\lambda)$

$$M_*(\lambda) = \min_{\substack{q\in(0,\,\infty)\\ r\in(0,\,1)}} \max\left\{\frac{2\,(2^{1-\lambda})^3\, r^{1-\lambda}}{1-r},\ \left[1 + 3\,(2^{1-\lambda})^4\left(\frac{1}{r^{2\lambda+1}} + \frac{2}{r^{\lambda+2}}\right)\right]\beta(\lambda, q)\right\}$$

Рассмотрим теперь оператор

$$W^\wedge = \frac{m}{\pi^2}(-K^\wedge + L^\wedge) + \frac{m}{\pi}\left(\frac{1-s^2}{1+s^2}\right) \tag{2.4}$$

позволяющий представить уравнение (1.13) в виде

$$\varphi(s) = (W^\wedge\varphi)(s) \tag{2.5}$$

В силу теорем 2 и 3 оператор $W^\wedge$ отображает $F^\lambda[-1, 1]$ в себя. Кроме того, если в $F^\lambda[-1, 1]$ ввести метрику $\rho(\psi_1, \psi_2) \equiv \|\psi_1 - \psi_2\|$, то на основе неравенств (2.2) и (2.3) для произвольных функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ из $F^\lambda[-1, 1]$ нетрудно получить

$$\rho(W^\wedge\psi_1, W^\wedge\psi_2) \le \frac{m}{\pi^2}\alpha(\lambda)\,\rho(\psi_1, \psi_2), \qquad \alpha(\lambda) = \alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda) \tag{2.6}$$

Неравенство (2.6) означает, что оператор $W^\wedge$ является сжимающим в $F^\lambda[-1, 1]$ [9], если $\lambda \in \Lambda(m)$, где $\Lambda(m)$ — множество значений λ, удовлетворяющих для заданного m неравенству

$$\alpha(\lambda) < \pi^2/m \tag{2.7}$$

Отметим, что множество $\Lambda(m)$ является связным, причем для достаточно больших m оно может быть пустым. Это следует из неравенства (2.7) и фиг. 2, на которой изображена зависимость $\alpha(\lambda)$. В дальнейшем через m_* будем обозначать верхнюю грань множества значений m, для которых $\Lambda(m)$ не является пустым.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Для каждого фиксированного $\lambda \in \Lambda(m)$ уравнение (2.5) имеет единственное решение $\varphi(s)$ в $F^\lambda[-1, 1]$, которое может быть найдено методом последовательных приближений с любым начальным приближением $\varphi^{(0)}(s) \in F^\lambda[-1, 1]$ [9].

Справедливость данного утверждения непосредственно следует из принципа сжимающих отображений [9], если принять во внимание, что пространство

$F^{\lambda}[-1,1]$ с введенной выше метрикой является полным метрическим в силу теоремы 1, а оператор $W^{\wedge}$ — сжимающим.

Утверждение 1 позволяет, задавшись некоторым $\lambda \in \Lambda(m)$ и соответствующим начальным приближением $\varphi^{(0)}(s) \in F^{\lambda}[-1,1]$, получить решение $\varphi(s) \in F^{\lambda}[-1,1]$ уравнения (2.5). Однако ввиду произвола в выборе $\lambda \in \Lambda(m)$ здесь возникает вопрос о единственности такого решения. Ниже доказывается соответствующая теорема единственности, при этом будет использовано следующее вложение:

$$F^{\lambda_2}[-1,1] \subset F^{\lambda_1}[-1,1], \qquad \lambda_1 \le \lambda_2 \tag{2.8}$$

которое имеет место, так как $H^{\lambda_2}[-1,1] \subset H^{\lambda_1}[-1,1]$, если $\lambda_1 \le \lambda_2$ [5].

Теорема 4 (единственности). При непустом множестве $\Lambda(m)$ уравнение (2.5) имеет единственное решение в $F^{\lambda}[-1,1]$ вне зависимости от $\lambda \in \Lambda(m)$, которое может быть найдено методом последовательных приближений при любом $\varphi^{(0)}(s) \in F^{\lambda}[-1,1]$. Более того, это решение лежит в $F^{\bar{\lambda}-\varepsilon}[-1,1]$, где $\bar{\lambda}(m) = \sup \Lambda(m)$, ε — сколь угодно малая величина, $\varepsilon \in (0, \bar{\lambda}(m))$.

Доказательство. В силу утверждения 1 каждому $\lambda \in \Lambda(m)$ соответствует единственное решение уравнения (2.5) в $F^{\lambda}[-1,1]$. Покажем, что различным $\lambda \in \Lambda(m)$ и соответствующим начальным приближениям $\varphi^{(0)}(s) \in F^{\lambda}[-1,1]$ отвечает одно и то же решение $\varphi(s) \in F^{\lambda}[-1,1]$ вне зависимости от $\lambda \in \Lambda(m)$.

Допустим противное: пусть существуют решения $\varphi_1(s) \in F^{\lambda_1}[-1,1]$, $\varphi_2(s) \in F^{\lambda_2}[-1,1]$, причем $\varphi_1(s) \not\equiv \varphi_2(s)$, $\lambda_1 \ne \lambda_2$. Не ограничивая общности, положим для определенности $\lambda_1 < \lambda_2$. Тогда в силу (2.8) $F^{\lambda_2}[-1,1] \subset F^{\lambda_1}[-1,1]$, т. е. $\varphi_2(s) \in F^{\lambda_1}[-1,1]$. Однако, согласно утверждению 1, решение уравнения (2.5) в $F^{\lambda_1}[-1,1]$ единственное, поэтому решение $\varphi_2(s)$ должно совпадать с решением $\varphi_1(s) \in F^{\lambda_1}[-1,1]$, а это противоречит допущению $\varphi_1(s) \not\equiv \varphi_2(s)$.

Таким образом, решение $\varphi(s) \in F^{\lambda}[-1,1]$, $\lambda \in \Lambda(m)$ единственное. Покажем, что данное решение принадлежит более узкому множеству $F^{\bar{\lambda}-\varepsilon}[-1,1]$.

Допустим противное: пусть имеется решение $\varphi(s) \in F^{\lambda_1}[-1,1]$, $\lambda_1 \in \Lambda(m)$ такое, что $\varphi(s) \overline{\in} F^{\bar{\lambda}-\varepsilon}[-1,1]$, для сколь угодно малых $\varepsilon \in (0, \bar{\lambda}(m))$, т. е. существует $\lambda_2 \in (\lambda_1, \bar{\lambda}(m))$:

$$\varphi(s) \in F^{\lambda_1}[-1,1] \setminus F^{\lambda_2}[-1,1] \tag{2.9}$$

Возьмем $\lambda_3 = (\lambda_2 + \bar{\lambda}(m))/2 \in \Lambda(m)$, которому в силу утверждения 1 отвечает решение $\varphi_3(s) \in F^{\lambda_3}[-1,1]$. Учитывая, что $\lambda_1 < \lambda_3$, на основе (2.8) будем иметь $\varphi_3(s) \in F^{\lambda_1}[-1,1]$, откуда в силу утверждения 1 получим $\varphi_3(s) \equiv \varphi(s) \in F^{\lambda_1}[-1,1]$. Однако тогда: $\varphi(s) = \varphi_3(s) \in F^{\lambda_3}[-1,1] \subset F^{\lambda_2}[-1,1]$ (так как $\lambda_2 < \lambda_3$), что противоречит (2.9). Теорема доказана.

Полученное на основе теоремы 4 решение $\varphi(s)$ уравнения (2.5) (или (1.13)) определяет безразмерное контактное давление $P(x) = \varphi(f_1(x))$. Используя выражение (1.12) для $f_1(x)$, нетрудно установить, что $Y(x) \equiv \psi(f_1(x)) \in F^{\lambda/2}[-1,1]$, если $\psi(s) \in F^{\lambda}[-1,1]$. Поэтому на основе теоремы 4 будем иметь

$$P(x) \in F^{\mu_0}[-1,1] \tag{2.10}$$

где $\mu_0(m) = \bar{\lambda}(m)/2 - \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \bar{\lambda}(m)/2)$ — сколь угодно малая величина, $m \in (0, m_*)$.

Конструктивно решение $P(x) = \varphi(f_1(x))$, построенное на основе теоремы 4, получается в виде последовательных приближений, являющихся результатом использования соответствующего метода решения уравнения (1.13). Если ввести оператор $W_0^\wedge = \pi^{-2}(-K^\wedge + L^\wedge)$, то для i-го приближения $\varphi^{(i)}(s)$ функции $\varphi(s)$ нетрудно получить выражение

$$\varphi^{(i)}(s) = \varphi_c(s) + \sum_{j=1}^{i-1} m^j (W_0^{\wedge j}\varphi_c)(s) + m^i (W_0^{\wedge i}\varphi^{(0)})(s) \tag{2.11}$$

$$\varphi_c(s) = \pi^{-1} m (1 - s^2)(1 + s^2)^{-1}$$

где $\varphi^{(0)}(s)$ — начальное приближение, а $W_0^{\wedge j}$ означает j-кратное действие оператора $W_0^\wedge$.

Заметим, что в силу неравенства (2.7) $\| m^i (W_0^{\wedge i}\varphi^{(0)})\| \to 0$ при $i \to \infty$. Поэтому из (2.11) имеем

$$\varphi(s) = \lim_{i\to\infty} \varphi^{(i)}(s) = \varphi_c(s) + \sum_{j=1}^{\infty} m^j (W_0^{\wedge j}\varphi_c)(s) \tag{2.12}$$

Согласно выражению (2.12), функции $\varphi(s)$ и $P(x)$ целиком определяются величиной $m \in (0, m_*)$, что вполне закономерно, так как m является единственным параметром исходного уравнения (1.6), а также уравнений (1.11) и (1.13). В дальнейшем (там, где это необходимо) будем указывать соответствующим аргументом зависимость рассматриваемых величин от m. Так, если обозначить $\zeta_j(s) = m^{-1}(W_0^{\wedge j}\varphi_c)(s, m)$, то из (2.12) будем иметь

$$\varphi(s, m) = \varphi_c(s, m) + \sum_{j=1}^{\infty} m^{j+1}\zeta_j(s) \tag{2.13}$$

причем

$$P(x, m) = \varphi(f_1(x), m) \tag{2.14}$$

Рассмотрим некоторые свойства $\varphi(s, m)$ и $P(x, m)$ как функций двух переменных.

Теорема 5. Пусть $D_1 \doteq [-1, 1] \times [0, m_1]$, где $m_1 \in (0, m_*)$. Тогда $\varphi(s, m)$ непрерывная на D_1 по совокупности переменных s, m.

Доказательство. Рассмотрим последовательность приближений $\varphi^{(i)}(s, m)$, $i = 0, 1, 2\ldots$ и покажем, что $\{\varphi^{(i)}(s, m)\}$ сходится к $\varphi(s, m)$ равномерно на D_1. Для простоты в качестве начального приближения $\varphi^{(0)}(s, m)$ будем использовать функцию $\varphi_c(s, m)$, так что согласно (2.11):

$$\varphi^{(i)}(s, m) = \varphi_c(s, m) + \sum_{j=1}^{i} m^j (W_0^{\wedge j}\varphi_c)(s, m) \equiv \varphi_c(s, m) + \sum_{j=1}^{i} m^{j+1}\zeta_j(s) \tag{2.15}$$

Возьмем произвольное $m \in [0, m_1]$ и положим в неравенстве (2.6) $\lambda = \lambda_*$ (фиг. 2). В результате, обозначая $\varkappa = m\alpha(\lambda_*)/\pi^2 = m/m_* < 1$, получим неравенство

$$\rho(W^\wedge\psi_1, W^\wedge\psi_2) \le \varkappa\rho(\psi_1, \psi_2) \tag{2.16}$$

в котором $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ — произвольные функции из $F^{\lambda_*}[-1, 1]$. Учитывая, что $\varphi^{(i)}(s, m) \in F^{\lambda_*}[-1, 1]$ для любых m (так как в (2.15) $\varphi_c(s, m) \in F^{\lambda_*}[-1, 1]$), на основе (2.16) нетрудно прийти к неравенству [9]:

$$\rho(\varphi^{(k)}, \varphi^{(i)}) \le \varkappa^i (1 - \varkappa)^{-1} \rho(\varphi^{(1)}, \varphi_c) \tag{2.17}$$

справедливому для произвольных i и k, $i \le k$. В свою очередь, полагая в (2.17) $k \to \infty$ $(\varphi^{(k)} \to \varphi)$ и принимая во внимание, что $\varphi^{(1)}(s, m) = \varphi_c(s, m) + m^2\zeta_1(s)$ и $\rho(\varphi, \varphi^{(i)}) \equiv \|\varphi - \varphi^{(i)}\| \ge \max_{s\in[-1,1]} |\varphi(s, m) - \varphi^{(i)}(s, m)|$, получим

$$|\varphi(s, m) - \varphi^{(i)}(s, m)| \leq \varkappa_1^i C_1, \qquad s \in [-1, 1] \tag{2.18}$$

$$\varkappa_1 = m_1/m_* < 1, \; C_1 = m_*^2 (1 - \varkappa_1)^{-1} \|\zeta_1\|$$

Правая часть неравенства (2.18), будучи независимой от $s \in [-1, 1]$ и $m \in [0, m_1]$, принимает сколь угодно малые значения при $i \to \infty$, что по определению означает равномерную сходимость $\{\varphi^{(i)}(s, m)\}$ к $\varphi(s, m)$ на D_1 [7].

Далее, из теорем 2, 3 имеем $\zeta_1(s) \in H[-1, 1] \subset C[-1, 1]$. Поэтому в силу выражения (2.15) функции $\varphi^{(i)}(s, m)$ являются непрерывными при $s, m \in D_1$, а это в совокупности с установленной выше равномерной сходимостью последовательности $\{\varphi^{(i)}(s, m)\}$ к $\varphi(s, m)$ на D_1 обеспечивает непрерывность функции $\varphi(s, m)$ при $s, m \in D_1$ [7]. Теорема доказана.

Таким образом, функция $\varphi(s, m)$ является непрерывной при $s, m \in D_* \equiv \equiv [-1, 1] \times [0, m_*)$. Отсюда следует и непрерывность функции $P(x, m)$ при x, $m \in D_*$, так как $P(x, m)$ и $\varphi(s, m)$ связаны равенством (2.14), в котором $f_1(x)$ — непрерывная функция.

Следующая теорема касается поведения функции $P(x, m)$ при $m \to 0$.

Теорема 6. Пусть $P_M(m) = \max P(x, m)$ при $x \in [-1, 1]$. Тогда $P_M(m) \to 0$ при $m \to 0$.

Доказательство. Допустим противное, т. е. пусть существует $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{m_i\}$ такие, что $m_i \to 0$ при $i \to \infty$, но $P_M(m_i) > \varepsilon$. Покажем, что это допущение противоречит вышеустановленной непрерывности функции $P(x, m)$ при $x, m \in D_*$.

Прежде всего заметим, что из (2.13) и (2.14) вытекает равенство $P(x, 0) = 0$ при $x \in [-1, 1]$.

Далее обозначим через z значение x, при котором функция $P(x, m)$ достигает максимума, если m фиксированно (т. е. $P(z, m) = P_M(m)$), и образуем последовательность $\{z_i\}$, $i = 1, 2 \ldots$, элементы z_i которой определяются из условия $P(z_i, m_i) = P_M(m_i)$. Последовательность $\{z_i\}$ ограниченная, следовательно, по теореме Больцано — Вейерштрасса из нее можно выбрать подпоследовательность $\{z_{i_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящуюся к некоторому $x_0 \in [-1, 1]$ [7], при этом в силу сделанного выше допущения $P(z_{i_k}, m_{i_k}) = P_M(m_{i_k}) > \varepsilon$.

Таким образом, получена последовательность точек $(z_{i_k}, m_{i_k}) \in D_*$, сходящаяся к точке $(x_0, 0) \in D_*$, для которой значения $P(z_{i_k}, m_{i_k})$ превышают фиксированное $\varepsilon > 0$. Данный результат, очевидно, противоречит равенству $P(x_0, 0) = 0$ и тому, что функция $P(x, m)$ непрерывна в точке $(x_0, 0)$. Теорема доказана.

3. Анализ особенности решения на концах области контакта. На основе теоремы 4 в предыдущем пункте было построено решение $P(x)$ рассматриваемой задачи. Ниже с помощью соотношения (1.16) доказывается следующее свойство $P(x)$:

$$\lim_{x \to 1} (1 - x^2)^{-\mu} P(x) = \Omega_0 \tag{3.1}$$

где Ω_0 зависит только от m и принимает положительные значения, по крайней мере при достаточно малых m. В силу четности функции $P(x)$ равенство вида (3.1) имеет место и при $x \to -1$.

Обозначим через $\bar{P}(x)$ интеграл в правой части (1.16) и введем в рассмотрение функцию $\sigma(x)$ вида

$$\sigma(x) = f(x) \, [(1 + x)^{\gamma_1} (1 - x)^{\gamma_2} (\pi^2 + (mx)^2)^{1/2} \exp(-w(x))]^{-1} \tag{3.2}$$

Тогда, учитывая выражения (1.18), получим

$$R(x) = \sigma(x) \int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1-t^2)^\mu (t-x)} + \int_{-1}^{1} \frac{(\sigma(t)-\sigma(x))\,dt}{(1-t^2)^\mu (t-x)} \equiv R_1(x) + R_2(x) \tag{3.3}$$

Первый интеграл в (3.3) берется в явном виде, так что для слагаемого $R_1(x)$ в (3.3) имеет место выражение [6]:

$$R_1(x) = \sigma(x) \left[\frac{-\pi \operatorname{ctg} \mu\pi}{(1-x^2)^\mu} + h(x) \right] \tag{3.4}$$

$$h(x) = -4^{-\mu} \frac{\Gamma(1-\mu)\,\Gamma(-\mu)}{\Gamma(1-2\mu)} {}_2F_1\left(1, 2\mu; 1+\mu; \frac{1-x}{2}\right), \quad \mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

На основе известных свойств гамма- и гипергеометрической функций из последнего выражения следует, что

$$h(1) = \lim_{x \to 1} h(x) = -4^{-\mu} \frac{\Gamma^2(-\mu)}{2\Gamma(-2\mu)} > 0 \tag{3.5}$$

Далее обозначим

$$V_1(x) = [(\pi^2 + (mx)^2)^{1/2} \exp(-w(x))]^{-1}, \qquad V_2(x) = (1+x)^{-\gamma_1}(1-x)^{-\gamma_2}$$

так что $\sigma(x) = f(x)\, V_1(x)\, V_2(x)$, и представим второе слагаемое в (3.3) в виде

$$R_2(x) = V_1(x)\, V_2(x)\, [J_1(x) + J_2(x) + J_3(x)] \tag{3.6}$$

$$J_1(x) = \int_{-1}^{1} \frac{(f(t) - f(x))\,dt}{(1-t^2)^\mu (t-x)}, \qquad J_2(x) = \frac{1}{V_1(x)} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,(V_1(t) - V_1(x))\,dt}{(1-t^2)^\mu (t-x)}$$

$$J_3(x) = \frac{1}{V_1(x)\, V_2(x)} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\, V_1(t)\,(V_2(t) - V_2(x))\,dt}{(1-t^2)^\mu (t-x)}$$

Если подставить выражения (3.4) и (3.6) для $R_1(x)$ и $R_2(x)$ в (3.3), а полученное таким образом выражение для $R(x)$ в (1.16), то в результате, учитывая, что $\operatorname{ctg} \mu\pi = m/\pi$, $Z(x) = (1-x^2)^\mu (V_1(x)\, V_2(x))^{-1}$, получим

$$P(x) = (1-x^2)^\mu\, \Omega(x) \tag{3.7}$$

$$\Omega(x) = (\pi^2 + (mx)^2)^{-1} \left[-m \frac{(1-x)^{1-\mu}}{(1+x)^\mu} f(x) + f(x)\, h(x) + \sum_{n=1}^{3} J_n(x) \right] \tag{3.8}$$

Функция $\Omega(x)$ в равенстве (3.7) зависит от $P(x)$, поэтому (3.7) представляет собой по существу уравнение для $P(x)$, эквивалентное уравнению (1.16). Однако, в отличии от (1.16), данное равенство позволяет определить особенность $P(x)$ при $x \to 1$ ввиду того, что поведение функции $\Omega(x)$ при $x \to 1$ может быть изучено на основе установленных в предыдущем пункте свойств решения $P(x)$. Рассмотрим $\Omega(x)$, для чего укажем некоторые свойства функций $f(x)$, $V_1(x)$ и $V_2(x)$, через которые выражается $\Omega(x)$.

Прежде всего, так как $P(x) \in H[-1, 1] \subset C[-1, 1]$, то по определению (1.18) функция $f(x)$ является непрерывно дифференцируемой при $x \in [-1, 1]$, т. е. $f(x) \in C^1[-1, 1]$. Можно показать, что и $V_1(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[-1, 1]$, тогда как функция $V_2(x)$ обладает этим свойством только на интервале $(-1, 1)$ из-за наличия логарифмической особенности у производной $V_2'(x)$ при $x = \pm 1$. Однако, как нетрудно установить, $V_2(x) \in H[-1, 1]$, а именно для функции $V_2(x)$ справедливо неравенство

$$|V_2(x) - V_2(t)| \le D\, |x-t|^\delta, \qquad x, t \in [0, 1]$$

$$\delta \in (0, 1), \qquad D = \frac{m}{\pi^2 \delta} \left[2\left(1 + \left(\frac{m}{\pi}\right)^2\right) + \frac{1}{1-\delta} \right]$$

Кроме того, функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ являются четными и убывают при $x \in [0, 1]$, а функция $f(x)$ является нечетной.

Пользуясь указанными свойствами функций $f(x)$, $V_1(x)$ и $V_2(x)$, а также вытекающими из (1.18) неравенствами $m(1 - P_M) \le f'(x) \le m$ ($P_M = \max P(x)$ при $x \in [-1, 1]$), можно доказать равномерную сходимость интегралов в выражениях для $J_1(x)$, $J_2(x)$, $J_3(x)$ [7] и получить соотношения:

$$J_{1,2,3}(x) \in C[-1, 1] \tag{3.9}$$

$$J_1(1) \ge \pi^{1/2} m (1 - P_M) \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(3/2 - \mu)} > 0 \tag{3.10}$$

$$J_2(1) \ge -\pi^{1/2} \left(\frac{m}{\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{m}{\pi}\right) (\pi^2 + m^2)^{1/2} \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(3/2 - \mu)} \exp\left(\frac{2m}{\pi^2}\right) \equiv B_2 < 0$$

$$J_3(1) \ge -\frac{2m}{\pi} (\pi^2 + m^2)^{1/2} \frac{D}{\delta - \mu} \exp\left(\frac{4m}{\pi^2}\right) \equiv B_3 < 0, \qquad \delta > \mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Из соотношений (3.5), (3.7)—(3.9) вытекает существование предела

$$\lim_{x \to 1} (1 - x^2)^{-\mu} P(x) = \lim_{x \to 1} \Omega(x) = \Omega(1)$$

при этом $\Omega(1)$ зависит только от m. Сопоставляя последнее равенство с (3.1), приходим к тому, что для установления свойства (3.1) достаточно положить $\Omega_0 = \Omega(1)$ и доказать положительность величины $\Omega(1)$ при достаточно малых m. Прежде чем провести соответствующее доказательство, получим необходимую для этого оценку величины $\Omega_0 \equiv \Omega(1)$.

Подставим в равенство (3.8) $x = 1$ и учтем, что $f(1) \ge m(1 - P_M)$, а для величин $h(1)$, $J_1(1)$, $J_2(1)$, $J_3(1)$ справедливы соотношения (3.5) и (3.10). В результате можно прийти к неравенству

$$\Omega_0(m) \ge (\pi^2 + m^2)^{-1} \left[m(1 - P_M(m)) \left(\frac{-4^{-\mu}\Gamma^2(-\mu)}{2\Gamma(-2\mu)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\pi^{1/2}\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(3/2 - \mu)} + B_2 + B_3 \right] \tag{3.11}$$

где аргументом m указана зависимость величин Ω_0 и P_M от m.

Теорема 7. Существует m_0 такое, что $\Omega_0(m) > 0$ при $m \in (0, m_0)$.

Доказательство. В силу теоремы 6 найдутся такие m_1 и $\Delta > 0$, что $1 - P_M(m) > \Delta$ для $m \in (0, m_1)$. При положительной разности $1 - P_M(m)$ правая часть неравенства (3.11) является положительной для достаточно малых m, так как при $m \to 0$ ($\mu \to 0$) первое слагаемое в квадратных скобках правой части (3.11), будучи положительным, имеет порядок $O(m)$, тогда как отрицательные второе и третье слагаемые — порядок $O(m^2)$. Отсюда следует существование такого m_2, что $\Omega_0(m) > 0$ для $m \in (0, m_2)$, при условии, что $1 - P_M(m) > \Delta > 0$. В итоге, выбирая $m_0 = \min[m_1, m_2]$, будем иметь $\Omega_0(m) > 0$ при $m \in (0, m_0)$. Теорема доказана.

Таким образом, при $m \in (0, m_0)$ функция $P(x)$ удовлетворяет равенству (3.1) с положительными (отличными от нуля) значениями Ω_0. Другими словами, при $x \to \pm 1$ функция $P(x)$ стремится к нулю по степенному закону с показателем $\mu = 1/2 - \pi^{-1} \operatorname{arctg}(m/\pi)$.

Представляет интерес в связи с этим сравнить поведение на концах области контакта решения $P(x)$ и решения $P_c(x) = \pi^{-1} m (1 - x^2)^{1/2}$, соответствующему классическому граничному условию [3]. Видно, что показатели степени нулевой особенности на концах области контакта решений $P(x)$ и $P_c(x)$ отличаются друг от друга на величину $\pi^{-1} \operatorname{arctg}(m/\pi)$. Кроме того, для решения $P(x)$ данный показатель зависит от m, т. е. от размера a области контакта и геометрического параметра γ штампа, тогда как для решения $P_c(x)$ показатель степени нулевой особенности на концах области контакта всегда равен $1/2$.

В заключение проведем сопоставление соотношений (2.10) и (3.1). Как показывает численная проверка, величина $\mu = 1/2 - \pi^{-1} \operatorname{arctg}(m/\pi)$ превосходит величину $\bar{\lambda}(m)/2$, а следовательно, и величину $\mu_0 = \bar{\lambda}(m)/2 - \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \bar{\lambda}(m)/2)$. Последнее означает, что пространство $F^{\mu_0}[-1, 1]$ включает в себя функции, имеющие при $x \to \pm 1$ нулевую особенность с показателем степени μ. Таким образом, свойство (3.1) решения $P(x)$ не противоречит тому, что $P(x) \in F^{\mu_0}[-1, 1]$.

На возможность определения особенности решения $P(x)$ на концах области контакта с помощью соотношения (1.16) автору было указано В. М. Александровым. Автор выражает благодарность ему за это, а также за внимание, проявленное к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галанов Б. А.* Постановка и решение некоторых уточненных задач упругого контакта двух тел//Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 6. С. 56—63.
2. *Галанов Б. А., Кривонос Ю. М.* Об учете в задаче Герца тангенциальных смещений на поверхности контакта//Вычисл. и прикл. математика. Киев: Вища шк., 1984. Вып. 53. С. 87—94.
3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
5. *Пыхтеев Г. Н.* Точные методы вычисления интегралов типа Коши. Новосибирск: Наука, 1980. 121 с.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
7. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1971. Т. 1. 599 с; 1973. Т. 2. 447 с.
8. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
10. *Солдатенков И. А.* Контактная задача для полуплоскости в уточненной постановке (учет касательного контактного перемещения). М.: 1991. 36 с. (Препринт Института проблем механики АН СССР, № 501.)

Москва

Поступила в редакцию
26.III.1992