МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1994

УДК 539.3

© 1994 г. К. Ф. ЧЕРНЫХ

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ К ЗАДАЧЕ ЭШЕЛБИ

В основополагающих работах Эшелби [1—3] рассмотрено тело с эллиптическим включением. Материалы тела и включения считались однородными линейно-упругими с разными упругими постоянными.

Если внешние силы таковы, что с удалением от включения напряженное состояние становится однородным, то и во включении напряженное состояние однородно. В [4] показано, что этот результат остается справедливым и при произвольной анизотропии во включении и матрице. Наконец, в [5] рассмотрен случай нелинейности материала включения.

Несмотря на перечисленные глубокие исследования остались все же неясными следующие вопросы. Насколько обязательна эллиптическая форма включения? Не является ли это требование чисто аппаратным? Можно ли отказаться от линейной упругости матрицы? Каковы необходимые условия, накладываемые на напряженно-деформированное состояние матрицы требованием однородности последнего во включении?

Представляется нереальным в настоящее время получение прямых исчерпывающих ответов на поставленные вопросы прежде всего из-за невозможности получения аналитического решения соответствующей задачи в трехмерной нелинейной постановке. Частичный ответ может дать решение нелинейной плоской задачи, рассмотренной автором в его работах, подытоженных в [6, 7]. В плоской деформации эллиптическое включение заменяется его вырождением — эллиптическим цилиндром.

1. В нелинейной теории упругости широко используются комплексные преобразования [6]. Так, в прямоугольных декартовых координатах вводятся комплексные координаты

$$\zeta = \mathring{x}_1 + i\mathring{x}_2, \quad \zeta = \mathring{x}_1 - i\mathring{x}_2, \quad z = x_1 + ix_2, \quad z = x_1 - ix_2 \tag{1.1}$$

дифференцирование по ним

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathring{x}_1} - i\frac{\partial}{\partial \mathring{x}_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathring{x}_1} + i\frac{\partial}{\partial \mathring{x}_2}\right) \tag{1.2}$$

и комплексные компоненты тензоров

$$T_1 = t_{11} + t_{22} + i\,(t_{12} - t_{21}), \quad T_2 = t_{11} - t_{22} + i\,(t_{12} + t_{21})$$

$$T_3 = t_{13} + it_{23}, \quad T_4 = t_{31} + it_{32}, \quad T_5 = t_{33} \tag{1.3}$$

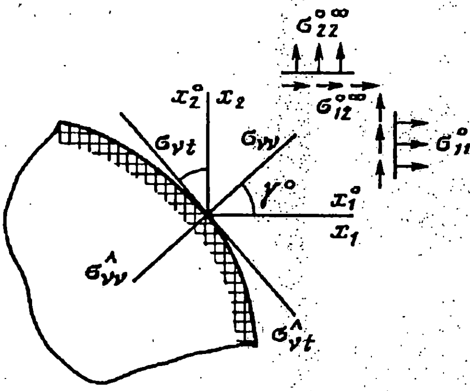
Здесь и ниже градус сопровождает величины, отнесенные к недеформированной конфигурации тела, величины же без него относятся к деформированной конфигурации.

2. Рассмотрим включение (фигура), снабжая относящиеся к нему величины. На границе включения имеют место условия сопряжения

$$\sigma_{vv}^{\vee} = \sigma_{vv}, \quad \sigma_{vt}^{\vee} = \sigma_{vt}, \quad z^{\vee} = z \tag{2.1}$$

записываемые в виде [6]:

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1\, e^{i\mathring{\gamma}} + \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2\, e^{-i\mathring{\gamma}} = -\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1^{\vee}\, e^{i\mathring{\gamma}} - \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2^{\vee}\, e^{-i\mathring{\gamma}}$$



$$\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) e^{i\gamma} - \left(\frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}\right) e^{-i\gamma} = \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^{\vee} e^{i\gamma} - \left(\frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}\right)^{\vee} e^{-i\gamma} \tag{2.2}$$

Здесь $\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_i$ — комплексные компоненты тензора номинальных напряжений, а $\partial z/\partial\zeta$, $\partial z/\partial\bar\zeta$ — комплексные компоненты градиента движения. Эти функции определяют напряженно-деформированное состояние.

Предположение об однородности напряженно-деформированного состояния включения сводится к постоянству величин $\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1^{\vee}$, $\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2^{\vee}$, $(\partial z/\partial\zeta)^{\vee}$, $(\partial z/\partial\bar\zeta)^{\vee}$.

При построении нелинейной теории трещин [7] успешно был использован упругий потенциал

$$\Phi = \sigma^* \,|\partial z/\partial\zeta|^2 + \alpha\,|\partial z/\partial\bar\zeta|^2 \tag{2.3}$$

Здесь σ^*, α — модули упругости, причем σ^* — величина предварительного всестороннего (в плоскости) растяжения.

Использование этого потенциала позволило ввести функции комплексной переменной $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\xi)$. При этом условия сопряжения (2.2) принимают вид

$$\sigma^*\Phi(\zeta)\, e^{i\gamma} + \overline{\alpha\Psi(\zeta)\, e^{i\gamma}} = -1/2\,[\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1^{\vee} e^{i\gamma} + \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2^{\vee} e^{-i\gamma}]$$

$$\Phi(\zeta)\, e^{i\gamma} - \overline{\Psi(\zeta)\, e^{i\gamma}} = \left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)^{\vee} e^{i\gamma} - \left(\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right)^{\vee} e^{-i\gamma} \tag{2.4}$$

Представим функции комплексной переменной в виде

$$\Phi(\zeta) = a_0 + \Phi_0(\zeta),\quad \Phi_0(\zeta) = a_{-2}/\zeta^2 + a_{-3}/\zeta^3 + \ldots$$

$$\Psi(\xi) = b_0 + \Psi_0(\zeta),\quad \Psi_0(\zeta) = b_{-2}/\zeta^2 + b_{-3}/\zeta^3 + \ldots \tag{2.5}$$

обеспечивающем конечность напряжений и однозначность смещений в плоскости с удаленным включением. При этом в случае отсутствия поворота на бесконечности

$$a_0 = \bar a_0 = \frac{\mathring\sigma_{11}^\infty + \mathring\sigma_{22}^\infty}{2\sigma^*},\quad b_0 = \frac{\mathring\sigma_{11}^\infty - \mathring\sigma_{22}^\infty - i2\mathring\sigma_{12}^\infty}{2\alpha} \tag{2.6}$$

где $\mathring\sigma_{ij}^\infty$ — значения условных напряжений бесконечности.

Подстановка представлений (2.5) в (2.4) приводит к граничным условиям

$$\sigma^*\Phi_0(\zeta)\, e^{i\gamma} + \overline{\alpha\Psi_0(\zeta)\, e^{i\gamma}} = -\left[\frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1^{\vee}}{2} + \sigma^* a_0\right] e^{i\gamma} -$$

$$-\left[\frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2^{\vee}}{2} + \alpha\bar b_0\right] e^{-i\gamma} \tag{2.7}$$

$$\Phi_0(\zeta)\, e^{i\gamma} - \overline{\Psi_0(\zeta)\, e^{i\gamma}} = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)^{\vee} - a_0\right] e^{i\gamma} + \left[\left(\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right)^{\vee} - \bar b_0\right] e^{-i\gamma}$$

3. Функцией $\zeta = \varkappa(\chi) = R\,(1/\chi + \varkappa_0(\chi))$ $(\varkappa_0(\chi) = c_1\chi + c_2\chi^2 + \ldots)$ отобразим внешность включения на внешность единичного круга комплексной плоскости χ. На единичной окружности последней с аффиксом σ имеем

$$\bar\sigma = \sigma^{-1},\quad \sigma = \overline{\sigma^{-1}},\quad e^{i\gamma} = \sigma\varkappa'(\sigma)/|\varkappa'(\sigma)|,\quad e^{-i\gamma} = \overline{\sigma\varkappa'(\sigma)}/|\varkappa'(\sigma)|$$

С учетом последних выражений граничные условия (2.2) принимают вид $(\Phi_0^{\vee}(\chi) = \Phi_0(\varkappa(\chi)),\ \Psi_0^{\vee}(\chi) = \Psi_0(\varkappa(\chi))$:

$$\sigma^*\Phi_0^{\vee}(\sigma)\,\sigma\varkappa'(\sigma) + \overline{\alpha\Psi_0'(\sigma)\,\sigma\varkappa'(\sigma)} =$$

$$= -\,[1/2\,\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1^{\vee} + \sigma^* a_0]\,\sigma\varkappa'(\sigma) - [1/2\,\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2^{\vee} + \alpha\bar b_0]\,\overline{\sigma\varkappa'(\sigma)} \tag{3.1}$$

$$\Phi_0^{\vee}(\sigma)\,\sigma\varkappa'(\sigma) - \overline{\Psi_0^{\vee}(\sigma)\,\sigma\varkappa'(\sigma)} =$$

$$= [(\partial z/\partial\zeta)^{\vee} - a_0]\,\sigma\varkappa'(\sigma) - [(\partial z/\partial\bar\zeta)^{\vee} - \bar b_0]\,\overline{\sigma\varkappa'(\sigma)} \tag{3.2}$$

Особенностью предложенного упругого потенциала является то, что он, отвечая нелинейной задаче, приводит к линейным разрешающим уравнениям (3.1)—(3.2). Решая последние каким-либо из известных способов и переходя с контура вовнутрь области (т. е. производя замену $\sigma \to \chi$), находим из (3.1):

$$\Phi_0^{\vee}(\chi) = \frac{1}{\sigma^*\chi^2\varkappa'(\chi)}\left\{\left[\frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1^{\vee}}{2} + \sigma^* a_0\right] - \left[\frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2^{\vee}}{2} + \alpha\bar b_0\right]\bar\varkappa_0'\left(\frac{1}{\chi}\right)\right\}$$

$$\Psi_0^{\vee}(\chi) = \frac{1}{\alpha\chi^2\varkappa'(\chi)}\left\{\left[\frac{\overline{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2^{\vee}}}{2} + \alpha b_0\right] - \left[\frac{\overline{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1^{\vee}}}{2} + \sigma^* a_0\right]\bar\varkappa_0'\left(\frac{1}{\chi}\right)\right\} \tag{3.3}$$

а из (3.2) получаем

$$\Phi_0^{\vee}(\chi) = \frac{1}{\chi^2\varkappa'(\chi)}\left\{-\left[\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)^{\vee} - a_0\right] - \left[\left(\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right)^{\vee} - \bar b_0\right]\bar\varkappa_0'\left(\frac{1}{\chi}\right)\right\}$$

$$\Psi_0^{\vee}(\chi) = \frac{1}{\chi^2\varkappa'(\chi)}\left\{-\left[\overline{\left(\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right)^{\vee}} - b_0\right] - \left[\overline{\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)^{\vee}} - a_0\right]\bar\varkappa_0'\left(\frac{1}{\chi}\right)\right\} \tag{3.4}$$

Остается, положив здесь $\chi = \varkappa^{-1}(\zeta)$, перейти на комплексную плоскость ζ и, используя зависимости [6], подсчитать интересующие нас величины.

По смыслу рассматриваемой проблемы выражения (3.3) и (3.4) должны совпадать. Здесь следует рассмотреть два случая:

а) Величина $\bar\varkappa_0'(1/\chi)$ — не постоянна. При этом требование совпадения величин (3.3) и (3.4) приводит к равенствам

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1^{\vee} = -2\sigma^*\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)^{\vee},\quad \{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2^{\vee} = -2\alpha\left(\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right)^{\vee} \tag{3.5}$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha+\sigma^*}\left[\alpha\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)^{\vee} - \frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1^{\vee}}{2}\right],\quad \bar b_0 = \frac{1}{\alpha+\sigma^*}\left[\sigma^*\left(\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right)^{\vee} - \frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2^{\vee}}{2}\right]$$

б) Величина $\bar\varkappa_0(1/\chi)$ — постоянна. При этом вместо (3.5) имеем лишь два условия

$$a_0 = \frac{1}{m(\sigma^*+\alpha)}\left\{\frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2^{\vee} - m\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1^{\vee}}{2} + \alpha\left[\left(\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right)^{\vee} + m\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)^{\vee}\right]\right\}$$

$$\bar{b}_0 = \frac{1}{m(\sigma^*+\alpha)}\left\{\frac{\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1^{\vee} - m\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2^{\vee}}{2} + \sigma^*\left[\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^{\vee} + m\left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}\right)^{\vee}\right]\right\} \quad (3.6)$$

Напомним, что здесь величины со знаком $^{\vee}$ — постоянные.

4. Рассмотрим подробнее приведенные случаи. В случае а) первые два из соотношений (3.5) показывают, что при включении произвольного вида однородность напряженно-деформированного состояния в нем имеет место лишь для определяющего уравнения строго определенного вида, зависящего к тому же (через модули σ^* и α) от закона упругости матрицы.

Случай б) отвечает эллиптическому включению ($\zeta = R(1/\chi + m\chi)$). Как усматривается из (3.6), в этом случае номинальные напряжения никак не связаны с компонентами градиента движения. Таким образом, выявляется особая роль эллиптичности включения — ее необходимость. При этом подтверждается высказанное в [5] утверждение о произвольности механических свойств материала включения. Отметим также, что в случае эллиптического включения напряженно-деформируемое состояние матрицы необходимо однородно. Путем включения в представление (2.5) положительных степеней ζ можно рассмотреть и случай «полиномиальной консервативности» [5].

Полученное решение доказывает также возможность отказаться от линейной упругости матрицы. Строго говоря, показана приемлемость геометрической нелинейности. Представляется однако, и возможность учета физической нелинейности. Здесь, конечно, требуется построить убедительный пример.

Отметим, что содержание предшествующих работ носило характер достаточности. В изложенном же в этой статье автор исходил в значительной мере из мотивов необходимости. Несмотря на оговоренные выше ограничения использованного подхода, как представляется автору, полученные результаты имеют довольно общий характер.

Автор благодарен А. А. Вакуленко, знакомство со статьей которого [5] дало толчок к изложенной выше работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eshelby E. J.* The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proc. Roy Soc. 1957. A 241. P. 376—396.
2. *Eshelby E. J.* The elastic field outside an ellipsoidal inclusion // Proc. Roy. Soc. 1959. A. 252. P. 561—569.
3. *Eshelby E. J.* Elastic inclusions and inhomogeneities // Progress in Solid Mechanics / Eds Sneddon J. N., Hill R. North-Holland, Amsterdam: 1961. V. 2. P. 89—140.
4. *Kinoshita N., Mura T.* Elastic fields of inclusion in anisotropic media // Phys. Stat. Sol. (a). 1971. V. 5. P. 759—768.
5. *Вакуленко А. А., Севастьянов И. Б.* Включение с нелинейными свойствами в упругой среде // Исследование по механике строительных конструкций и материалов. Л.: ЛИСИ. 1991. С. 8—16.
6. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах Л.: Машиностроение, 1986. 138 с.
7. *Черных Л. Ф.* Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин М.: Наука, 1992. 250 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 30.IV.1992.