МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1994

УДК 534.1

© 1994 г. Л. Д. АКУЛЕНКО, С. В. НЕСТЕРОВ

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ОСЦИЛЛЯТОРА ПОД ПОВЕРХНОСТЬЮ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Исследуются плоские движения линейного осциллятора, перемещаемого с постоянной скоростью горизонтально под поверхностью тяжелой идеальной жидкости. На основе [1] в первом приближении Хэвелока построено самосогласованное интегродифференциальное с разностным ядром [2] уравнение относительных колебаний. Ставится и изучается задача предельного поведения гибридной системы в зависимости от введенных безразмерных параметров в предположении слабого взаимодействия колебаний осциллятора и поверхностных волн. Обнаружены области значений параметров, приводящих к неограниченному росту амплитуды колебаний (параметрический резонанс).

1. Построение модели и постановка задачи. Рассматриваются движения гибридной колебательной системы, представленной на фиг. 1. Предположим, что в однородной жидкости на заданной фиксированной глубине h вдоль оси x перемещается твердое тело C (цилиндр), связанное с точкой S линейной упругой пружиной, жесткость которой равна λ. Точка S движется вдоль этой оси с постоянной скоростью U. Для упрощения картина движения считается плоской. Невозмущенное состояние движения состоит в том, что тело C и точка S движутся с постоянной скоростью U, а установившееся волновое сопротивление идеальной тяжелой жидкости уравновешивается силами упругости (пружина растянута).

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ тело смещено на некоторое малое расстояние s^0 относительно указанного положения равновесия. Скорость поступательного движения остается равной U, т. е. относительно точки S скорость равна нулю. Требуется найти последующее (при $t > 0$) относительное движение тела $s(t)$ с учетом реакции излучаемых им поверхностных гравитационных волн. Заметим, что на основе известной зависимости $s(t)$ относительно просто определяются кинематические и динамические характеристики движения жидкости [1] (потенциал скоростей, распределения давлений, возвышение жидкости и др.).

Для дальнейшего исследования сделаем следующие упрощающие предположения:

1) Рассматриваются только горизонтальные перемещения твердого тела вдоль оси x, параллельной X;

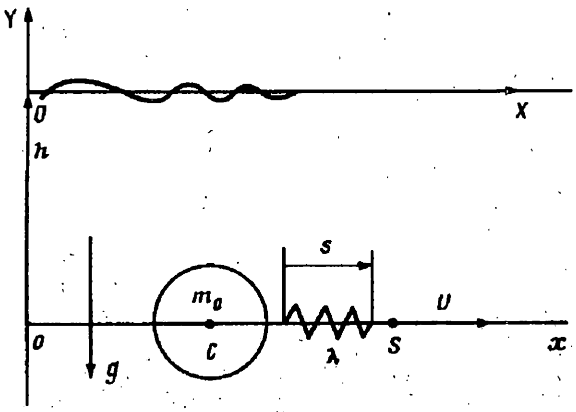
2) Тело представляет собой круговой цилиндр, диаметр $2r$ которого значительно меньше длины, так что торцевыми эффектами можно пренебречь (плоская картина);

3) Глубина h погружения цилиндра значительно больше его радиуса r ($h \gg r$);

4) Жидкость является неограниченной идеальной и несжимаемой (на ее частицы действует сила тяготения, ускорение которой g);

5) Движение жидкости потенциально и происходит с малой амплитудой, т. е. используется линейная теория волн для вычисления сил, действующих на тело [1, 2].

Чтобы составить уравнение движения цилиндра относительно равномерно движущейся системы координат (точки S), вычислим силы, действующие на



Фиг. 1

твердое тело со стороны жидкости и пружины. Для определения гидродинамических сил, обусловленных излучением поверхностных гравитационных волн, используем подход, развитый Л. Н. Сретенским [1]. Вводя безразмерные переменные и параметры, получим интегродифференциальную задачу Коши

$$\ddot{s} + s = -\varepsilon\gamma_1^2\gamma_2 \left\{ \int_0^t \dot{s}(\tau) K_1(t-\tau)\, d\tau - \int_0^t [s(t) - s(\tau)] K_2(t-\tau)\, d\tau \right\}$$

$$s(0) = s^\circ = 1, \quad \dot{s}(0) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $s = s(t)$ — неизвестная переменная (нормированное на s° отклонение цилиндра от равновесного положения $(s/s^\circ \to s)$). Аргумент $t \geq 0$ — безразмерное время, определяемое соотношением $\Omega t \to t$, где Ω — размерная величина, имеющая размерность частоты и равная

$$\Omega = (\lambda/m^* l)^{1/2}, \quad m^* = m_0 + \pi r^2 \rho \tag{1.2}$$

где λ — коэффициент упругости линейной пружины, m^*, m_0 — приведенная и собственная погонные массы цилиндра соответственно, ρ — объемная плотность жидкости, l — длина цилиндра ($l >> r$). Введенные в (1.1) безразмерные параметры ε, γ_1, γ_2 имеют определенный механический смысл. Они определяются как отношения размерных параметров и равны соответственно

$$\varepsilon = (2r/h)^2 (\pi r^2 \rho/m^*), \quad 0 < \varepsilon << 1 \tag{1.3}$$

$$\gamma_1 = U/h\Omega \geq 0, \quad \gamma_2 = gh/U^2 > 0, \quad \gamma_{1,2} \sim 1$$

Параметр ε характеризует слабое влияние излучаемых волн на относительные колебания цилиндра; параметр γ_2 есть число Фруда [1], величина γ_1 — отношение скоростей. Отметим, что разностные ядра $K_{1,2}(\theta)$, $\theta = t - \tau$ интегральных операторов в (1.1) зависят также от параметров γ_1, γ_2 следующим образом:

$$K_1(\theta) = \int_0^\infty \mu^2 e^{-2\mu} \cos(\mu\gamma_1\theta) \cos(\gamma_1 \sqrt{\mu\gamma_2}\, \theta)\, d\mu \tag{1.4}$$

$$K_2(\theta) = \gamma_1 \int_0^\infty \mu^3 e^{-2\mu} \sin(\mu\gamma_1\theta) \cos(\gamma_1 \sqrt{\mu\gamma_2}\, \theta)\, d\mu$$

Здесь μ — безразмерное волновое число, изменяющееся непрерывным образом, $0 \leq \mu < \infty$ [1].

Отметим, что при $U = 0$ параметр $\gamma_1 = 0$ и ядро $K_2(\theta) \equiv 0$, причем величина $\gamma = \gamma_1^2\gamma_2 = g/h\Omega^2 > 0$ и не зависит от U. Таким образом, в случае неподвижной точки S получим задачу (1.1), в которой ядро $K_1(\theta)$ зависит от одного параметра γ. С точностью до числового множителя при K_1 этот случай совпадает с исследованным авторами [2], где рассмотрены вертикальные затухающие колебания линейного осциллятора вблизи поверхности жидкости. При помощи разработанного численно-аналитического подхода установлена существенная чрезвычайно резкая зависимость затухания колебаний от числа γ; при малых ε экстремальное значение близко к $\gamma^* = 2/3$. Это соответствует внутреннему резонансу между колебаниями цилиндра и волнами в жидкости.

Наличие ядра K_2 в (1.1) может кардинально изменить картину горизонтальных колебаний перемещаемого осциллятора. По сравнению со случаем $U = 0$ анализ решения значительно усложняется. Большой интерес в теоретическом и прикладном аспектах представляет исследование возможности существования незатухающих колебательных движений и определение областей соответствующих значений параметров γ_1, γ_2.

Следует отметить, что на возможность потери устойчивости относительного положения равновесия осциллятора, движущегося с постоянной скоростью и взаимодействующего с гравитационными волнами, было указано в ряде работ, см. [3, 4] и др. Обнаруженный посредством вычисления энергетических характеристик колебаний осциллятора эффект неустойчивости и его физической интерпретации назван «радиационной неустойчивостью». Предлагаемый в данной работе подход основан на строгом асимптотическом анализе задачи (1.1). Он позволяет провести глобальный анализ предельного поведения системы, определить области параметрической неустойчивости, а также построить полную картину развития нестационарного колебательного процесса при помощи аналитического и численного подходов, аналогичного развитому в [7].

2. Приближенный анализ. При $\varepsilon = 0$ система (1.1) совершает гармонические колебания: $s_0(t) = \cos t$, излучение волн при этом не происходит. Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало, тогда движение цилиндра $s(t, \varepsilon)$ будет слабо отличаться от $s_0(t)$ для $t \sim 1$. Представляет интерес исследование эволюции системы на интервале времени $t \sim 1/\varepsilon$, на котором происходит существенное изменение амплитуды и фазы колебаний [2]. Для этой цели применим к интегродифференциальному уравнению (1.1) асимптотическую процедуру метода усреднения (разделения медленных и быстрых переменных) [5, 6]. Введем оскулирующие переменные типа Ван дер Поля a, b по формулам

$$s = a\cos t + b\sin t, \quad \dot{s} = -a\sin t + b\cos t \tag{2.1}$$

Дифференцируя замену (2.1) в силу системы (1.1), для a, b получим стандартную задачу [7]:

$$\dot{a} = \varepsilon\gamma L[t, a, b]\sin t, \quad a(0) = a^\circ = 1 \tag{2.2}$$

$$\dot{b} = -\varepsilon\gamma L[t, a, b]\cos t, \quad b(0) = b^\circ = 0$$

$$L[t, a, b] \equiv \int_0^t [-a(\tau)\sin\tau + b(\tau)\cos\tau]\, K_1(t-\tau)\, d\tau -$$

$$-\int_0^t \{[a(t)\cos t + b(t)\sin t] - [a(\tau)\cos\tau + b(\tau)\sin\tau]\} K_2(t-\tau)\, d\tau$$

Здесь L — линейный интегральный оператор от $a(t)$, $b(t)$ типа Вольтерры, который, однако, не является разностным. Он представляет собой правую часть уравнения (1.1) (с точностью до множителя $-\varepsilon\gamma = -\varepsilon\gamma_1^2\gamma_2$). Параметр γ введен для сокращения и удобства записи. Приведем систему (2.2) к интегральным уравнениям, используя формулу повторного интегрирования, аналогично [7]. Получим систему интегральных уравнений

$$a(t) = a^\circ + \varepsilon\gamma \int_0^t [\lambda_a^s(t, \tau)\, a(\tau) + \lambda_b^s(t, \tau)\, b(\tau)]\, d\tau \tag{2.3}$$

$$b(t) = b^\circ - \varepsilon\gamma \int_0^t [\lambda_a^c(t, \tau)\, a(\tau) + \lambda_b^c(t, \tau)\, b(\tau)]\, d\tau$$

Для коэффициентов матричного ядра интегрального оператора в (2.3) имеем представления

$$\lambda_{a,b}^{s,c}(t, \tau) = p_{a,b}^{s,c}(t, \tau) + q_{a,b}^{s,c}(t, \tau) + r_{a,b}^{s,c}(\tau) \equiv$$

$$\equiv \lambda_{a,b}^{*a,c}(\delta, \tau), \quad \delta = t - \tau \tag{2.4}$$

$$p_a^{s,c}(t, \tau) = -P_{s,c}(t, \tau)\sin\tau, \quad p_b^{s,c} = P_{s,c}(t, \tau)\cos\tau$$

$$q_a^{s,c}(t, \tau) = Q_{s,c}(t, \tau)\cos\tau, \quad q_b^{s,c}(t, \tau) = Q_{s,c}(t, \tau)\sin\tau$$

$$r_a^{s,c}(\tau) = R_{s,c}(\tau)\cos\tau, \quad r_b^{s,c}(\tau) = R_{s,c}(\tau)\sin\tau$$

Коэффициенты $P_{s,c}$, $Q_{s,c}$, $R_{s,c}$ выражаются через ядра K_1, K_2 (1.4) (в виде интегралов от известных функций)

$$P_{s,c}(t, \tau) = \int_\tau^t K_1(\theta - \tau) \begin{Bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix} d\theta \tag{2.5}$$

$$Q_{s,c}(t, \tau) = \int_\tau^t K_2(\theta - \tau) \begin{Bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix} d\theta,$$

$$R_{s,c}(\tau) = \begin{Bmatrix} \sin\tau \\ \cos\tau \end{Bmatrix} \int_0^\tau K_2(\tau - \theta)\, d\theta$$

Таким образом, коэффициенты $\lambda_{a,b}^{s,c}(t, \tau)$ (2.4) представляются крайне громоздкими и сложными выражениями аргументов t, τ и параметров γ, β ($\beta = \gamma_1$) вида

$$\begin{Bmatrix} \sin\tau \\ \cos\tau \end{Bmatrix} \int_0^\infty \Lambda_{a,b}^{s,c}(\beta, \gamma, \mu, \delta, \tau)\, d\mu, \quad \delta = t - \tau$$

Здесь функции $\Lambda_{a,b}^{s,c}$ в свою очередь определяются через квадратуры от тригонометрических выражений типа (2.5).

Дальнейшее изучение линейной системы (2.3) связано с усреднением коэффициентов $\lambda_{a,b}^{*s,c}(\delta, \tau)$ по τ и поведением этих средних как функций аргумента t при $t \to \infty$ и параметров γ, $\beta > 0$. В результате усреднения для этих коэффициентов получим выражения вида

$$\langle\lambda_a^{*s}\rangle_\tau = -\langle\lambda_b^{*c}\rangle_\tau \equiv \sigma(\beta, \gamma, \delta), \quad \langle\lambda_a^{*c}\rangle_\tau = \langle\lambda_b^{*s}\rangle_\tau \equiv \nu(\beta, \gamma, \delta) \tag{2.6}$$

Функция $\varepsilon\gamma\sigma I$ имеет смысл диссипативной компоненты матричного ядра $\varepsilon\gamma(\langle\lambda_{a,b}^{*s,c}\rangle_\tau)$, $\varepsilon\gamma\nu J$ — упругой добавки. Здесь I — единичная матрица, а J — симплектическая единица. Для σ, ν — получим представления

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_0^\infty [-p_c(\mu, \delta) + \beta\mu q_s(\mu, \delta)]\, \mu^2 e^{-2\mu} d\mu \tag{2.7}$$

$$\nu = \frac{1}{2} \int_0^\infty [p_s(\mu, \delta) + \beta\mu q_c(\mu, \delta)]\, \mu^2 e^{-2\mu} d\mu + \frac{1}{2} \zeta(\beta, \gamma)$$

$$p_{c,s} = \int_0^\delta \cos \beta\mu\xi \cos \sqrt{\gamma\mu}\, \xi \begin{Bmatrix} \cos \xi \\ \sin \xi \end{Bmatrix} d\xi$$

$$q_{c,s} = \int_0^\delta \sin \beta\mu\xi \cos \sqrt{\gamma\mu\xi} \begin{Bmatrix} \cos \xi \\ \sin \xi \end{Bmatrix} d\xi, \quad \zeta = \left\langle \int_0^\infty d\mu \int_0^\tau K_2(\theta)\, d\theta \right\rangle_\tau$$

Зависимость $p_{c,s}$, $q_{c,s}$ от параметров β, γ в (2.7) для сокращения записи не указывается. Таким образом, усредненная по τ система (2.3) оказывается стационарной, т. е. ее ядро является разностным, причем оно обладает определенной структурой с механическим содержанием:

$$a(t) = a^\circ + \varepsilon\gamma \int_0^t [\sigma(\beta, \gamma, \delta)\, a(\tau) + \nu(\beta, \gamma, \delta)\, b(\tau)]\, d\tau \tag{2.8}$$

$$b(t) = b^\circ + \varepsilon\gamma \int_0^t [-\nu(\beta, \gamma, \delta)\, a(\tau) + \sigma(\beta, \gamma, \delta)\, b(\tau)]\, d\tau$$

Как установлено выше, матричное ядро представляет линейную комбинацию единичной и симплектической матриц с коэффициентами $\varepsilon\gamma\sigma$ и $\varepsilon\gamma\nu$ соответственно. Аналогичная (2.8) система была получена [7] и исследована асимптотическими методами при $\varepsilon > 0$ достаточно малом и $t \sim 1/\varepsilon$.

3. Асимптотическое исследование колебаний. Введем медленное время $\theta = \varepsilon t$ в системе (2.8); тогда получим

$$a(\theta) = a^\circ + \gamma \int_0^\theta [\sigma(\beta, \gamma, \Delta)\, a(\vartheta) + \nu(\beta, \gamma, \Delta)\, b(\vartheta)]\, d\vartheta$$

$$b(\theta) = b^\circ + \gamma \int_0^\theta [-\nu(\beta, \gamma, \Delta)\, a(\vartheta) + \sigma(\beta, \gamma, \Delta)\, b(\vartheta)]\, d\vartheta$$

$$\Delta = (\theta - \vartheta)\varepsilon^{-1}, \quad \Delta \sim \varepsilon^{-1}, \quad \theta, \vartheta \sim 1 \tag{3.1}$$

Предельное (асимптотическое) поведение системы (3.1) при $\varepsilon \to 0$ описывается уравнениями с постоянной матрицей

$$a_*(\theta) = a^\circ + \int_0^\theta [\sigma^*(\beta, \gamma)\, a_*(\vartheta) + \nu^*(\beta, \gamma)\, b_*(\vartheta)]\, d\vartheta \tag{3.2}$$

$$b_*(\theta) = b^\circ + \int_0^\theta [-\nu^*(\beta, \gamma)\, a_*(\vartheta) + \sigma^*(\beta, \gamma)\, b_*(\vartheta)]\, d\vartheta$$

$$\sigma^* = \gamma\langle\sigma\rangle = \gamma \lim_{\Delta\to\infty} \sigma(\beta, \gamma, \Delta), \quad \nu^* = \gamma\langle\nu\rangle = \gamma \lim_{\Delta\to\infty} \nu(\beta, \gamma, \Delta)$$

Система (3.2) эквивалентна системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_*' = \sigma^* a_* + \nu^* b_*, \quad a_*(0) = a^\circ, \quad (') \equiv (d/d\theta)$$

$$b_*' = -\nu^* a_* + \sigma^* b_*, \quad b_*(0) = b^\circ, \quad 0 \le \theta \le \Theta \tag{3.3}$$

Заметим, что коэффициент σ^* имеет смысл коэффициента линейной диссипации в медленном времени θ, а ν^* — добавки к частоте. Характеристические показатели $k_{1,2}$ системы (3.3) равны $k_{1,2} = \sigma^* \pm i\nu^*$. Как установлено, в случае неподвижного осциллятора ($U = 0$) [2] или поплавка [7], величина $\sigma^* < 0$, т. е. их колебания затухают, что очевидно. Если скорость $U > 0$ значительна, т. е. число β также достаточно велико, то анализ величины $\sigma^*(\beta, \gamma)$ (3.2) согласно (2.7) показывает, что существует область значений параметров β, γ, для которой $\sigma^*(\beta, \gamma) > 0$, т. е. имеет место неустойчивость: экспоненциальное (в медленном времени θ) нарастание амплитуды колебаний. Эта так называемая «радиационная неустойчивость» [3, 4] движения осциллятора имеет своим механизмом параметрическую раскачку, обусловленную резонансным взаимодействием колебаний и волн, обусловленных перемещением осциллятора.

Переходим к вычислению и анализу функции $f(\beta, \gamma, \delta)$ при $\delta \to \infty$, которая связана с $\sigma(\beta, \gamma, \delta)$ (2.7) соотношением

$$\sigma(\beta, \gamma, \delta) = -(\gamma/8) f(\beta, \gamma, \delta), \quad \sigma^* = -(\gamma/8) f^* \tag{3.4}$$

$$f(\beta, \gamma, \delta) = \sum_{j=1}^{4} f_j(\beta, \gamma, \delta), \qquad f_j(\beta, \gamma, \delta) = \int_0^\infty \varphi_j(\beta, \mu) \frac{\sin \lambda_j(\beta, \gamma, \mu)\, \delta}{\lambda_j(\beta, \gamma, \mu)}\, d\mu$$

$$\varphi_{1,2} = (1 + \beta\mu)\mu^2 e^{-2\mu}, \quad \lambda_{1,2} = 1 + \beta\mu \pm \sqrt{\gamma\mu}$$

$$\varphi_{3,4} = (1 - \beta\mu)\mu^2 e^{-2\mu}, \quad \lambda_{3,4} = 1 - \beta\mu \pm \sqrt{\gamma\mu}$$

Таким образом, требуется исследовать поведение функций f, f_j ($j = 1, 2, 3, 4$) при $\delta \to \infty$. Значительный интерес представляет проблема определения значений β, γ, для которых $f^* = 0$ (граница области неустойчивости), $f^* < 0$ (область экспоненциальной неустойчивости) или $f^* > 0$ (область экспоненциальной устойчивости, аналогичная случаям [2, 7]). Отметим, что несобственные интегралы (3.4) для функций f_j относятся к так называемым интегралам Фурье [8]. Исследование асимптотического поведения выражений f_j при $\delta \to \infty$ весьма затруднено, поскольку подынтегральные функции имеют устранимые особенности для тех значений $\mu > 0$, для которых $\lambda_j = 0$. В литературе [8—10] известна асимптотика выражений вида (3.4), в которых имеет место интегрируемая особенность, т. е. знаменатель λ_j обращается в нуль как функция с оценкой $O(|\mu - \mu_*|^\varkappa)$, где $0 < \varkappa < 1$. Как следует из выражений λ_j (3.4), эти функции имеют оценки $O(|\mu - \mu_*|)$ для $j = 3, 4$ и $O(|\mu - \mu_*|^\varkappa)$, $\varkappa = 1, 2$ для $j = 2$. Такие особенности заведомо неинтегрируемы; поэтому требуется дополнительное исследование несобственных интегралов f_j при $\delta \to \infty$ с учетом устранимости этих особенностей.

Рассмотрим более детально функции $\lambda_j(\beta, \gamma, \mu)$ в зависимости от μ, где β, γ — параметры семейства. Для фиксированных β, γ качественное поведение приведено на фиг. 2. Таким образом, $\lambda_1 \neq 0$ для всех $\mu \geq 0$; функции $\lambda_{3,4}$, точнее уравнения $\lambda_{3,4}(\beta, \gamma, \mu) = 0$, имеют простые корни $\mu_{3,4}$, соответственно равные следующим величинам:

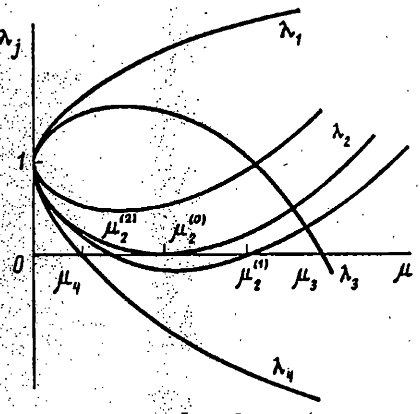
$$\mu_{3,4} = \mu_{3,4}(\beta, \gamma) \equiv [\pm \gamma^{1/2} + (\gamma + 4\beta)^{1/2}]^2 (2\beta)^{-2}, \quad \mu_3 > \mu_4 > 0 \tag{3.5}$$

Функция λ_2 в нуль не обращается при $\gamma < 4\beta$ ($U < 4g\Omega^{-1}$); это условие не зависит от параметра h. Уравнение $\lambda_2(\beta, \gamma, \mu) = 0$ имеет два простых корня $\mu_2^{(1,2)}(\beta, \gamma)$ при $\gamma > 4\beta$ ($U > 4g\Omega^{-1}$) или один двукратный корень $\mu_2^{(0)}(\beta)$ при $\gamma = 4\beta$ ($U^* = 4g\Omega^{-1}$), равные соответственно

$$\mu_2^{(1,2)} = \mu_2^{(1,2)}(\beta, \gamma) \equiv [\gamma^{1/2} \pm (\gamma - 4\beta)^{1/2}]^2 (2\beta)^{-2} \tag{3.6}$$

$$\mu_2^{(0)} = \mu_2^{(0)}(\beta) \equiv \gamma(2\beta)^{-2} = \beta^{-1} = 4\gamma^{-1} \quad (\gamma = 4\beta)$$

Напомним, что в случаях простых корней $\mu_* = \mu_2^{(1,2)}$, $\mu_{3,4}$ асимптотика зна-



Фиг. 2

менателя $\lambda_{2,3,4}$ имеет вид $\lambda_{2,3,4} = O(|\mu - \mu_*|)$; в случае двукратного корня $\mu_* = \mu_2^{(0)}$ функция $\lambda = O((\mu - \mu_*)^2)$.

Для исследования асимптотики интегралов f_j (3.4) при $\delta \to \infty$ воспользуемся стандартными приемами замены переменной интегрирования и интегрирования по частям. В качестве аргумента интегрирования берется $\lambda_j(\beta, \gamma, \mu)$ с учетом возможности немонотонной зависимости (в случаях $j = 2, 3$). Соответствующие выкладки весьма громоздки и требуют отдельного рассмотрения. Поэтому здесь приведем только сводку результатов.

Для $f_1(\beta, \gamma, \delta)$, $f_1^*(\beta, \gamma)$ интегрированием по частям получим выражения

$$f_1(\beta, \gamma, \delta) = O(\delta^{-6}), \qquad \delta \to \infty; \qquad f_1^*(\beta, \gamma) \equiv 0 \tag{3.7}$$

Функции $f_{3,4}(\beta, \gamma, \delta)$ при $\delta \to \infty$ стремятся к пределам $f_{3,4}^*(\beta, \gamma)$, равным соответственно

$$f_{3,4}^*(\beta, \gamma) = -\pi\varphi_{3,4}(\beta, \mu_{3,4})/\lambda_{3,4}'(\beta, \gamma, \mu_{3,4})$$

$$\lambda_{3,4}'(\beta, \gamma, \mu_{3,4}) = -\beta \pm 1/2\,(\gamma/\mu_{3,4})^{1/2} \tag{3.8}$$

Здесь $\lambda_{3,4}'$ — производные $\lambda_{3,4}$ по μ. Отметим, что $\lambda_{3,4}' < 0$ в точке $\mu_* = \mu_{3,4}$, что следует из фиг. 2 и выражений (3.5), (3.8).

Асимптотика функции $f_2(\beta, \gamma, \delta)$ требует более подробного обсуждения. В области $\gamma < 4\beta$ (отсутствие корней уравнения $\lambda_2 = 0$), когда скорость U меньше критической, методом стационарной фазы [9, 10] можно показать, что

$$f_2(\beta, \gamma, \delta) = O(\delta^{-1/2}), \qquad \delta \to \infty; \qquad f_2^*(\beta, \gamma) = 0 \tag{3.9}$$

В области $\gamma > 4\beta$ (уравнение $\lambda_2 = 0$ имеет два корня), когда скорость U больше критической, аналогично построению асимптотики функций $f_{3,4}$, см. (3.8), интегрированием по частям получим выражение

$$f_2^*(\beta, \gamma) = -\pi\frac{\varphi_2(\beta, \mu_2^{(1)})}{\lambda_2'(\beta, \gamma, \mu_2^{(1)})} - \pi\frac{\varphi_2(\beta, \mu_2^{(2)})}{\lambda_2'(\beta, \gamma, \mu_2^{(2)})}$$

$$\lambda_2'(\beta, \gamma, \mu_2^{(1,2)}) = \beta - 1/2\,(\gamma/\mu_2^{(1,2)})^{1/2}. \tag{3.10}$$

Из (3.4), (3.6) и фиг. 2 следует, что $\lambda_2' > 0$ для $\mu_2 = \mu_2^{(1)} > \mu_2^{(2)}$ и $\lambda_2' < 0$ для $\mu_2 = \mu_2^{(2)} < \mu_2^{(1)}$. Рассмотрим теперь критический случай $\gamma = 4\beta$ (уравнение $\lambda_2 = 0$ имеет двукратный корень $\mu_2^{(0)}$ (3.6)), когда скорость U перемещения осциллятора равна критической $U^* = 4g\Omega^{-1}$). Тогда, устремляя в формуле (3.10) для λ_2' величины $\mu_2^{(1,2)} \to \mu_2^{(0)}$, получим $\lambda_2' = 0$. Выражение асимптотики f_2^* (3.10) становится непригодным для оценки. Применяя процедуру интегрирования по частям в интеграле $f_2(\beta, \gamma, \delta)$ при $\gamma = 4\beta$, получим искомую асимптотику

$$f_2(\beta, 4\beta, \delta) = -O(\delta^{1/2}) \to -\infty, \quad \delta \to \infty \tag{3.11}$$

Таким образом, в окрестности прямой $\gamma = 4\beta$ ($U = U^*$) колебания осциллятора заведомо неустойчивы: их амплитуда растет по экспоненциальному закону с показателем $\sigma^*\theta \sim \varepsilon t^{3/2}$. Вне этой окрестности области устойчивости или неустойчивости, а также их граница определяются, при $\varepsilon > 0$ достаточно малом, неравенствами

$$f^*(\beta, \gamma) \gtreqless 0, \qquad \beta, \gamma > 0 \tag{3.12}$$

В пределе $\beta = 0$, $\gamma > 0$ колебания пассивного осциллятора экспоненциально затухают в смысле усредненных уравнений для $t \sim 1/\varepsilon$; при $t \gg 1/\varepsilon$ асимптотика затухания колебаний является степенной [2, 7]. При достаточно малых β продольные колебания перемещающегося осциллятора будут также затухающими. Для больших β (т. е. скоростей перемещения U) могут существовать области значений (β, γ), для которых имеют место колебания с экспоненциально растущей амплитудой (в медленном времени θ), показатель которой $\sigma^*\theta \sim \varepsilon t$. Подстановка выражений (3.7)—(3.10), отвечающих значениям β, γ вне прямой $\gamma = 4\beta$, в неравенства (3.12) и определение границы области устойчивости из условия $f^*(\beta, \gamma) = 0$ связано с анализом сложной трансцендентной функции, что может быть проведено численно.

При помощи численно-аналитического подхода [7] можно также изучить характер развития колебаний, изменение частотных свойств системы, а также исследовать китематику и динамику волн. Эти вопросы требуют отдельного обстоятельного обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93—013—17594, 94—01—01368) и Международного научного фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука. 1977. 816 с.
2. *Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Нестеров С. В.* Колебания осциллятора вблизи границы раздела двух жидкостей//ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 40—50.
3. *Гапонов-Грехов А. В., Долина И. С., Островский Л. А.* Аномальный эффект Допплера и радиационная неустойчивость движения осциллятора в гидродинамике//Докл. АН СССР. 1983. Т. 268. № 4. С. 827—831.
4. *Абрамович Б. С., Мареев Е. А., Немцов Б. Е.* Неустойчивость колебаний движущегося осциллятора при излучении им поверхностных и внутренних волн//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 1. С. 168—173.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
6. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 508 с.
7. *Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Нестеров С. В., Чайковский А. А.* Численно-аналитическое исследование колебаний твердого тела на границе раздела двух жидкостей//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 59—66.
8. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962. 360 с.
9. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962. 128 с.
10. *Федорюк М. В.* Асимптотика, интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.

Москва

Поступила в редакцию 29.I.1992