МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1994

УДК 534.1

© 1994 г. А. С. КОВАЛЕВА

МНОГОЧАСТОТНЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЙНОМ ВОЗМУЩЕНИИ. Ч. 2. КВАЗИРЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ УЗКОПОЛОСНОМ ВОЗМУЩЕНИИ

Строится процедура разделения движений для многочастотных квазиизохронных систем при узкополосном стационарном случайном возмущении с ярко выраженной несущей частотой. Показано, что медленное движение аппроксимируется диффузионным процессом. Оценивается интервал сходимости и погрешность аппроксимации. Рассмотрен пример: устойчивость колебаний упругого маятника при случайных колебаниях точки подвеса.

1. Основные предположения и теорема сходимости. Как и в [1], исследуем динамику систем типа

$$x^{\bullet} = \varepsilon F(x, \theta, t), \quad x(t, \varepsilon) = x \in R_n \tag{1.1}$$

$$\theta^{\bullet} = \omega + \varepsilon H(x, \theta, t), \quad \theta(t, \varepsilon) = \theta \in R_m$$

$$F(x, \theta, t) = F_0(x, \theta)\, \xi(t), \quad H(x, \theta, t) = H_0(x, \theta)\, \xi(t) \tag{1.2}$$

Здесь ε — малый параметр, $\xi(t) \in R_l$ — случайный процесс, F_0, H_0 — детерминированные матрицы соответствующих размерностей с компонентами

$$F_{ir}(x, \theta) = \sum_{s=0}^{S} F_{ir}^s(x) \cos(\lambda^s, \theta + \alpha_{ir}^s) \ (i = 1, \ldots, n, \ r = 1, \ldots, l) \tag{1.3}$$

$$H_{jk}(x, \theta) = \sum_{s=0}^{S} H_{jk}^s(x) \cos(\lambda^s, \theta + \beta_{jk}^s) \ (j = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, l)$$

где (λ^s, θ) — скалярное произведение, λ^s — целочисленные векторы с компонентами $\lambda_{s1}, \ldots, \lambda_{sm}$, причем $\lambda^0 = 0$, $|\lambda^s| \neq 0$, $s \neq 0$ и $(\lambda^s, \theta) \neq (\lambda^p, \theta)$ при $p \neq s$ для всех $\theta \in R_m$. Предполагается также, что $\xi(t)$ — нормальный стационарный процесс с нулевым средним (*условие A*).

Как и в [1], предполагаем, что выполняются *условия B:* функция $F_0(x, \theta)$ равномерно непрерывна вместе с первыми и вторыми производными по x, θ; функция $H_0(x, \theta)$ непрерывна вместе с первыми производными по x, θ при $x \in R_n$, $\theta \in R_m$. Положим также, что собственные частоты ω_i $(i = 1, \ldots, m)$ удовлетворяют нерезонансному соотношению $(\lambda, \omega) \neq 0$ для любого целочисленного вектора λ.

В [1] предполагалось, что спектр возмущения достаточно гладкий и не зависит от ε. При сделанных предположениях доказывалось, что при $\varepsilon \to 0$ процесс $x(t, \varepsilon)$ слабо сходится [2] к медленному диффузионному процессу $x_0(\tau)$ — решению стохастического уравнения

$$dx_0 = b(x_0)\, d\tau + \sigma(x_0)\, dw, \quad x_0(0) = x(0, \varepsilon) = r \tag{1.4}$$

где $w(\tau)$ — l-мерный стандартный винеровский процесс, $\tau = \varepsilon^2 t$, $\tau \in [0, T]$. Показано, что вектор сноса b и матрица диффузии $a = \sigma\sigma'$ уравнения (1.4) линейно зависят от спектральных характеристик $S_\xi(\lambda^s, \omega)$ и $Z_\xi(\lambda^s, \omega)$ процесса $\xi(t)$. Здесь $S_\xi(\Omega)$ и $Z_\xi(\Omega)$ — действительная и мнимая части преобразования

$$P_\xi(\Omega) = 2\int_0^\infty K_\xi(u)\, e^{i\Omega u} du \tag{1.5}$$

где $K_\xi(u)$ — корреляционная матрица и $S_\xi(\Omega)$ — спектральная матрица процесса $\xi(t)$. Очевидно, что, если возмущение узкополосное и какая-либо из частот (λ^s, ω) совпадает с несущей частотой возмущения, то именно эта спектральная составляющая определяет динамику системы. По аналогии с детерминированными, колебания такого типа назовем квазирезонансными. Квазирезонансный эффект был выявлен ранее для некоторых конкретных типов возмущенных систем [3—5]. В работе исследуются квазирезонансные колебания для систем достаточно общего вида (1.1). Доказано, что вывод о разделении движений и сходимости медленной переменной x к медленному диффузионному процессу x_0 остается справедливым, но интервал сходимости уменьшается, а погрешность возрастает.

Рассмотрим подробно случай, когда $\xi(t)$ — скалярный процесс, имеющий одну несущую частоту (один резко выраженный пик спектральной плотности). Предположим, что спектральная плотность может быть выражена дробно-рациональной функцией

$$S_\xi(\Omega) = \frac{S_0 \prod\limits_{p=1}^{m_1} [(\Omega^2 - \lambda_p^2)^2 + 4\gamma_p^2\Omega^2]}{[(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\varepsilon n^2\Omega^2] \prod\limits_{r=1}^{m_2} [(\Omega^2 - \Omega_r^2) + 4n_r^2\Omega^2]} \tag{1.6}$$

соответствующей стационарному марковскому процессу [6]. Из (1.6) следует, что корреляционная функция $K_\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ со спектральной плотностью (1.6) оценивается как

$$|K_\xi(t)| = O(\mu^{-1}e^{-\mu n t}), \quad \mu = \varepsilon^{1/2}, \quad n > 0 \tag{1.7}$$

Таким образом, если при каком-либо значении λ^s выполняется соотношение

$$(\lambda^s, \omega) = \Omega_0 + \mu\Delta = \Omega \tag{1.8}$$

то $S_\xi(\Omega) \sim \varepsilon^{-1}$, и коэффициенты сноса и диффузии уравнения (1.4) приобретают порядок ε^{-1}. Следовательно, медленная переменная x_0 должна изменяться не со скоростью $O(\varepsilon^2)$, а со скоростью $O(\varepsilon)$. Докажем, что этот эффект имеет место.

Теорема. Пусть для системы (1.1) выполняются условия A и B и справедливы соотношения (1.6)—(1.8). Тогда при $\varepsilon \to 0$ процесс $x(t, \varepsilon)$ на интервале времени $0 \le t \le T/\varepsilon$ слабо сходится к диффузионному процессу

$$dx_0 = \beta_0(x_0)\, d\zeta + \delta_0(x_0)\, dw, \quad x_0(0) = r \tag{1.9}$$

Здесь $\zeta = \varepsilon t$, $w(\zeta)$ — стандартный l-мерный винеровский процесс, формирующийся в масштабе времени ζ.

Как и в [1], доказательство базируется на идее аппроксимации производящего оператора [7]. Пусть $x(t, \varepsilon) = x_\varepsilon(\zeta)$ — решение системы (1.1), $x_0(\zeta)$ — решение уравнения (1.9). Достаточно показать [7], что для любой функции $f(x) \in C_3$ можно построить функцию $f^\varepsilon(\zeta)$ такую, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\zeta \in [0, T]$ справедливы оценки

$$\sup_{\zeta, \varepsilon} \mathrm{M}\, |f^\varepsilon(\zeta)| < \infty, \tag{1.10}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{M}\, |f^\varepsilon(\zeta) - f(x_\varepsilon(\zeta))| = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{M}\, |L^\varepsilon f^\varepsilon(\zeta) - L^0 f(x_\varepsilon(\zeta))| = 0 \tag{1.11}$$

Здесь L^ε — производящий дифференциальный оператор [2, 7]:

$$L^\varepsilon f^\varepsilon(\zeta) = \lim_{z\to 0_+} z^{-1}\, [\mathrm{M}_\zeta f^\varepsilon(\zeta + z) - f^\varepsilon(\zeta)] \tag{1.12}$$

где $\mathrm{M}_\zeta f^\varepsilon(z)$ — условное математическое ожидание [2] процесса $f^\varepsilon(z)$, и L^0 — производящий дифференциальный оператор процесса (1.9):

$$L^0 = \beta_0{}'\partial/\partial x + \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\, \alpha_0(x)\, \partial^2/\partial x^2 \tag{1.13}$$

$\alpha_0 = \delta_0{}'\delta_0$, которому соответствует единственное решение уравнения (1.9).

Достаточно показать [5, 7], что условия (1.10), (1.11) выполняются только для усеченного процесса $x_\varepsilon^N(\zeta)$, где $\zeta \le \zeta_N = \min\{\zeta : x_\varepsilon(\zeta) \notin S_N : |x_\varepsilon| < N\}$. Иначе говоря, ζ_N — момент первого выхода процесса $x_\varepsilon(\zeta)$ на границу сферы S_N, и $x_\varepsilon^N(\zeta) = x_\varepsilon(\zeta)$ при $\zeta \le \zeta_N$.

2. Доказательство. Не нарушая общности, можем считать, что условия (1.8) выполняются для $s = 1$ и $\lambda = \lambda^1$ — вектор с компонентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \ne 0$. Обозначим

$$\lambda = \{\Lambda, \lambda_m\}, \qquad \Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}\} \tag{2.1}$$

и введем новые переменные φ, ψ по формулам [8]:

$$\psi = \{\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}\}, \qquad \varphi = (\lambda, \theta) = (\Lambda, \psi) + \lambda_m\theta_m \tag{2.2}$$

$$\theta_m = \lambda_m^{-1}\, [\varphi - (\Lambda, \psi)]$$

Систему (1.1) перепишем в виде

$$\begin{gathered} x^\bullet = \varepsilon X(x, \varphi, t) + \varepsilon Y(x, \varphi, \psi, t), \ x \in R_m \\ \varphi^\bullet = \Omega + \varepsilon\Phi(x, \varphi, t) + \varepsilon K(x, \varphi, \psi, t), \ \varphi \in R_1 \\ \psi^\bullet = \nu + \varepsilon\Psi(x, \varphi, t) + \varepsilon G(x, \varphi, \psi, t), \ \psi \in R_{m-1} \\ \Omega = (\lambda, \omega), \ \nu = \{\omega_1, \ldots, \omega_{m-1}\} \end{gathered} \tag{2.3}$$

В силу (1.2), (1.3), (2.1), (2.2) коэффициенты системы (2.3) представим в виде

$$X = X_0(x, \varphi)\, \xi(t), \quad Y = Y_0(x, \varphi, \psi)\, \xi(t) \tag{2.4}$$

и т. п. При этом коэффициенты X_0, Φ_0, Ψ_0 включают только гармоники частоты Ω. Компоненты X_i вектора X_0 и скаляр Φ_0 имеют вид

$$X_i(x, \varphi) = F_i(x)\cos(\varphi + \gamma), \quad F_i \equiv F_i^1 \tag{2.5}$$

$$\Phi_0(x, \varphi) = \Phi(x)\cos(\varphi + \eta)$$

аналогично представляется вектор Ψ_0. Параметры Φ, γ, η получают соответствующим преобразованием параметров системы (1.1).

Построим функцию f^ε и операторы L^ε и L^0 на траекториях системы (2.3). Следуя [1], ищем $f^\varepsilon(\zeta)$ в виде разложения

$$f^\varepsilon(\zeta) = f(x) + \varepsilon\, [f_1(x, \varphi, t) + g_1(x, \varphi, \psi, t)] +$$

$$+ \varepsilon^2\, [f_2(x, \varphi, t) + g_2(x, \varphi, \psi, t)] \tag{2.6}$$

где $x = x(t, \varepsilon) = x_\varepsilon(\zeta)$, $\varphi = \varphi(t, \varepsilon) = \varphi_\varepsilon(\zeta)$, $\psi = \psi(t, \varepsilon) = \psi_\varepsilon(\zeta)$ — решение системы (2.3). Коэффициенты $f_{1,2}$, $g_{1,2}$ выбираются таким образом, чтобы в области D_N: $\{x \in S_N,\ \varphi \in R_1,\ \psi \in R_{m-1},\ t \in R_1\}$ выполнялись условия (1.10), (1.11).

По аналогии с [1] положим

$$f_1(x, \varphi, t) = f_x'(x) \int_t^\infty X_0(x, \varphi + \Omega(u - t))\, M_t\xi(u)\, du \tag{2.7}$$

$$g_1(x, \varphi, \psi, t) = f_x'(x) \int_t^\infty Y_0(x, \varphi + \Omega(u - t),\ \psi + \nu(u - t))\, M_t\xi(u)\, du$$

Оценим слагаемые f_1, g_1. Для нормального процесса имеем [2]:

$$M_t\xi(u) = \xi(t)\,\chi(u - t),\quad \chi(u) = K_\xi(u)/\sigma_\xi^2,\quad t \le u \tag{2.8}$$

где $K_\xi(u)$ — корреляционная функция, σ_ξ^2 — дисперсия процесса $\xi(t)$. Следовательно

$$f_1(x, \varphi, t) = f_x'(x) \int_0^\infty X_0(x, \varphi + \Omega u)\,\chi(u)\, du\, \xi(t) \tag{2.9}$$

Из (1.6), (2.8), (2.9) и условий B вытекает, что в области D_N:

$$M\,|f_1(x, \varphi, t)| \le C_{1N}\,|P_\xi(\Omega)|\, M\,|\xi(t)|\,\sigma_\xi^{-2} \tag{2.10}$$

где $P_\xi(\Omega)$ — преобразование (1.5). Из (1.6)—(1.8) имеем

$$|P_\xi(\Omega)| \sim \varepsilon^{-1},\quad \sigma_\xi^2 = K_\xi(0) \sim \mu^{-1}, \tag{2.11}$$

$$M\,|\xi(t)| \le \sigma_\xi \sim \mu^{1/2},\quad \mu = \varepsilon^{1/2}$$

т. е. в области D_N:

$$M\,|f_1| \le \varepsilon^{-1}\mu^{1/2}C_{2N},\quad M\,|\varepsilon f_1| \le \mu^{1/2}C_{2N} \tag{2.12}$$

В свою очередь, функция g_1 включает только нерезонансные составляющие, т. е. в рассматриваемой области

$$M\,|g_1| \le C_{3N}\sigma_\xi^{-2}\, M\,|\xi(t)| \le C_{4N}\mu^{1/2},\quad M\,|\varepsilon g_1| \le \varepsilon\mu^{1/2}C_{4N} \tag{2.13}$$

Здесь и ниже C_{jN} — постоянные, не зависящие от ε, но зависящие от размеров области D_N.

Для построения функции f_2 и оператора L^0 вычислим оператор $L^\varepsilon f^\varepsilon(\zeta)$. Из (2.6), (2.7) имеем

$$L^\varepsilon f^\varepsilon(\zeta) = \varepsilon\,(Q_1 + Q_2 + P_1 + P_2 + J + L_t f_2 + L_t g_2) \tag{2.14}$$

$$Q_1 = f_{1x}'X,\quad Q_2 = f_{1\varphi}\Phi,\quad P_1 = f_{1x}'Y,\quad P_2 = f_{1\varphi}K \tag{2.15}$$

$$J = g_{1x}'(X + Y) + g_{1\varphi}(\Phi + K) + g_{1\psi}'(\psi + G)$$

где все слагаемые вычисляются в точке (x, φ, ψ, t), L_t — производящий дифференциальный оператор, действующий по переменной t, т. е.

$$L_t f(x, \varphi, t) = \lim_{\Delta\to 0_+} \Delta^{-1}\,[M_t f(x(t + \Delta, \varepsilon),\ \varphi(t + \Delta, \varepsilon), t + \Delta) -$$

$$- f(x(t, \varepsilon),\ \varphi(t, \varepsilon), t)] = \varepsilon L^\varepsilon f(x_\varepsilon(\zeta), \varphi_\varepsilon(\zeta), \zeta/\varepsilon) \tag{2.16}$$

Оценим оператор J. Из (2.5), (2.8), (2.13) следует, что

$$M\,|J(x, \varphi, \psi, t)| \le \mu^{1/2}\, J_{1N}\, M\,|\xi(t)| \le J_{2N} \tag{2.17}$$

т. е. слагаемое εJ можно рассматривать как остаточный член. Функции f_2, g_2 построим таким образом, чтобы выполнялись условия (1.10), (1.11). По аналогии с [1] запишем

$$f_2(x,\varphi,t)=\sum_{j=1}^{2}\int_t^{\infty}[M_tQ_j(x,\varphi+\Omega(u-t),u)-\bar{q}_j(x)]\,du \tag{2.18}$$

$$g_2(x,\varphi,\psi,t)=\sum_{j=1}^{2}\int_t^{\infty}[M_tP_j(x,\varphi+\Omega(u-t),\psi+\nu(u-t),u)-\bar{p}_j(x)]\,du$$

$$\bar{q}_j(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}q_j(x,\varphi)\,d\varphi,\quad q_j=MQ_j \tag{2.19}$$

$$\bar{p}_j(x)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}p_j(x,\varphi,\psi)\,d\psi=0,\quad p_j=MP_j$$

Независимость функций q_j, p_j от t доказывается так же, как в [1]. Равенство $\bar{p}_j=0$ вытекает из того, что функции X_0, Y_0 и X_0, K_0 не включают одинаковых частотных составляющих.

Для оценки функции f_2 представим (2.18) в виде [1]:

$$f_2(x,\varphi,t)=\sum_{j=1}^{2}[I_j(x,\varphi,t)+S_j(x,\varphi)] \tag{2.20}$$

$$I_j(x,\varphi,t)=\int_t^{\infty}[M_tQ_j(x,\varphi+\Omega(u-t),u)-q_j(x,\varphi+\Omega(u-t))]\,du \tag{2.21}$$

$$S_j(x,\varphi)=\int_0^{\infty}[q_j(x,\varphi+\Omega u)-\bar{q}_j(x)]\,du$$

В свою очередь

$$M_tQ_1(x,\theta,u)-q_1(x,\theta)= \tag{2.22}$$

$$=\int_u^{\infty}[f_x'(x)F_0^{\cdot}(x,\theta+\Omega(z-u))]_x\,[M_t\xi(u)\,\xi(z)-K_\xi(z-u)]\,dzF_0'(x,\theta)$$

Учитывая, что для нормального стационарного процесса справедливо равенство [2]:

$$M_t\xi(u)\,\xi(z)-K_\xi(z-u)=-\sigma_\xi^2\chi^2(u-t)\,\chi(z-u),\quad t\le u\le z \tag{2.23}$$

получим, что в области D_N слагаемое I_1 оценивается как

$$M\,|I_1(x,\varphi,t)|\le I_{1N}\sigma_\xi^2\int_0^{\infty}\chi^2(u)\,du\int_0^{\infty}|\chi(z)|\,dz\le$$

$$\le I_{1N}\sigma_\xi^2\int_0^{\infty}e^{-2\mu n u}du\int_0^{\infty}e^{-\mu n z}dz\le\mu^{-3}I_{2N}=\varepsilon^{-2}\mu I_{2N} \tag{2.24}$$

Точно также

$$M\,|I_2(x,\varphi,t)|\le\varepsilon^{-2}\mu I_{3N} \tag{2.25}$$

где I_{jN} ($j=1,\ldots 3$) — постоянные, не зависящие от ε. Оценка слагаемых S_j проводится так же, как в детерминированном методе усреднения [8]. С учетом спектральных свойств функций Q_j получим, что в области D_N:

$$|S_j(x,\varphi)|\le k_{jN}\,|P_\xi(\Omega)|\le\varepsilon^{-1}K_{jN} \tag{2.26}$$

Здесь $P_\xi(\Omega)$ — функция (1.5), k_{jN}, K_{jN} — постоянные, не зависящие от ε. С учетом полученных оценок будем иметь (x, φ, $t\in D_N$):

$$\mathrm{M}\,|f_2(x,\varphi,t)|\le\varepsilon^{-2}\mu F_{2N},\qquad \mathrm{M}\,|\varepsilon^2 f_2(x,\varphi,t)|\le\mu F_{2N} \tag{2.27}$$

где F_{2N} — постоянная, не зависящая от ε. Очевидно, что оценка функции g_2 по крайней мере не хуже (2.27).

Из (2.12), (2.13), (2.27) следует, что при достаточно малых ε условия (1.10) выполняются для усеченного процесса $x_\varepsilon^N(\zeta)\in D_N$. Покажем, что в области D_N выполняется условие (1.11). Из (2.14), (2.18) имеем

$$L^\varepsilon f^\varepsilon(\zeta)=\varepsilon\,[\overline{q}_1(x)+\overline{q}_2(x)]+\varepsilon J(x,\varphi,\psi,t)+\varepsilon^2R(x,\varphi,\psi,t) \tag{2.28}$$

$$R=(f_2+g_2)_x{}'(X+Y)+g_{2\psi}{}'(\Psi+G)+(f_2+g_2)_\varphi(\Phi+K) \tag{2.29}$$

и, в соответствии с (2.15), (2.19) и с учетом [1]:

$$\overline{q}_1(x)=\beta_1{}'(x)f_x(x)+\tfrac12\operatorname{Tr}\alpha(x)f_{xx}(x),\qquad \overline{q}_2(x)=\beta_2{}'(x)f_x(x) \tag{2.30}$$

$$\beta_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\infty X_{0x}(x,\varphi+\Omega u)\,X_0(x,\varphi)\,K_\xi(u)\,du \tag{2.31}$$

$$\beta_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\infty X_{0\varphi}(x,\varphi+\Omega u)\,\Phi_0(x,\varphi)\,K_\xi(u)\,du,$$

$$\alpha(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\infty}^\infty X_0(x,\varphi+\Omega u)\,X_0{}'(x,\varphi)\,K_\xi(u)\,du$$

Таким образом

$$L^\varepsilon f^\varepsilon(\zeta)=\varepsilon Lf(x)+\varepsilon J(x,\varphi,\psi,t)+\varepsilon^2R(x,\varphi,\psi,t) \tag{2.32}$$

где производящий оператор

$$Lf(x)=\beta'(x)f_x(x)+\tfrac12\operatorname{Tr}\alpha(x)f_{xx}(x),\quad \beta=\beta_1+\beta_2 \tag{2.33}$$

и остаточный член R также может рассматриваться как оператор, действующий на f. Оценка R в области D_N вытекает из (2.11), (2.27):

$$\mathrm{M}\,|\varepsilon^2R(x,\varphi,\psi,t)|\le\mu R_{1N}\,\mathrm{M}\,|\xi(t)|\le\mu^{1/2}R_{2N} \tag{2.34}$$

где R_{1N}, R_{2N} — постоянные, не зависящие от ε. Из (2.17), (2.34) следует, что условие (2.11) справедливо, если в области D_N равномерно относительно x существуют пределы

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\beta=\beta_0,\quad \lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\alpha=\alpha_0 \tag{2.35}$$

и оператор (1.13) с коэффициентами (2.35) — невырожденный.

Покажем, что пределы (2.35) существуют. Из (2.5), (2.31) имеем (ср. [1]):

$$\alpha_{ij}(x)=\tfrac12F_i(x)\,F_j(x)\,S_\xi(\Omega) \tag{2.36}$$

$$\beta_{1i}(x)=\frac14\sum_{j=1}^n\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}F_j(x)\,[S_\xi(\Omega)\cos(\gamma-\eta)-Z_\xi(\Omega)\sin(\gamma-\eta)] \tag{2.37}$$

$$\beta_{2i}(x)=-\tfrac14F_i(x)\,\Phi(x)\,[S_\xi(\Omega)\sin(\gamma-\eta)+Z_\xi(\Omega)\cos(\gamma-\eta)]$$

Здесь индексы i, j обозначают соответствующие компоненты матрицы α и векторов β, F. Согласно (1.6)—(1.8), величина $S_\xi(\Omega)\sim\varepsilon^{-1}$, т. е. коэффициенты α_0, β_0 представимы в виде (2.35).

Таким образом, для процесса $x_\varepsilon^N(\zeta)$ имеем (равенство понимается в слабом смысле (1.13)):

$$L^\varepsilon f^\varepsilon(\zeta) = L^0 f(x_\varepsilon^N(\zeta)) + \mu^{1/2}\ldots \tag{2.38}$$

где L^0 — оператор (1.13) с коэффициентами (2.35)—(2.37). Если оператор L^0 невырожденный и ему соответствует единственное решение уравнения (1.9), то теорема справедлива.

3. Замечания. *1*). Рассмотрим более конкретную ситуацию оценки функционала $M_{0,r}\varphi(x(t,\varepsilon))$, $\varphi(x)\in C_4$. В нерезонансном случае справедлива оценка [1, 5] (при $\varepsilon\to 0$, $t\in[0, T/\varepsilon^2]$):

$$|M_{0,r}\varphi(x(t,\varepsilon)) - M_{0,r}\varphi(x_0(\tau))| \le C\varepsilon \tag{3.1}$$

Здесь $\tau=\varepsilon^2 t$, $x_0(\tau)$ — решение уравнения (1.4), C, T — постоянные, не зависящие от ε.

Повторяя соответствующие рассуждения [1, 5] и используя (2.13), (2.27), (2.36) получим, что в квазирезонансном случае справедлива более слабая оценка (при $\varepsilon\to 0$, $t\in[0, T_1/\varepsilon]$):

$$|M_{0,r}\varphi(x(t,\varepsilon)) - M_{0,r}\varphi(x_0(\zeta))| \le C_1\varepsilon^{1/4} \tag{3.2}$$

Здесь $\zeta=\varepsilon t$, $x_0(\zeta)$ — диффузионный процесс с оператором (1.13), C_1, T_1 — постоянные, не зависящие от ε.

2). Если возмущенная система имеет вид

$$x^\cdot = \varepsilon F(x,\theta,t) + \varepsilon G(x,\theta),\quad \theta^\cdot = \omega + \varepsilon H(x,\theta,t) + \varepsilon D(x,\theta) \tag{3.3}$$

где периодические функции G, D имеют структуру (1.3) и обладают достаточной гладкостью по своим переменным, то утверждение теоремы остается в силе, но коэффициент сноса принимает вид $\beta_0+\overline{G}$:

$$\overline{G}(x) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi} G(x,\theta)\,d\theta \tag{3.4}$$

3). Если $\xi(t)$ — l-мерный процесс с «резонансными» компонентами $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ и т. д., то коэффициенты X, Φ, Ψ должны включать только указанные компоненты процесса $\xi(t)$.

4. Колебания маятника на упругом подвесе при случайной горизонтальной вибрации основания. В [1] показано, что в системе такого типа возникают эффекты, аналогичные комбинационным резонансам, и условия устойчивости системы определяются значениями спектральной плотности возмущения на частотах комбинационных резонансов. Исследуем движение системы при узкополосном возмущении, несущая частота которого совпадает с одной из частот комбинационного резонанса.

Пренебрегая диссипацией и считая возмущение малым, запишем уравнения движения в стандартной форме [1]:

$$R_1^\cdot = -\varepsilon\omega_1^{-1}\xi(t)R_2\cos\theta_2\sin\theta_1,\quad R_2^\cdot = -\varepsilon\omega_2^{-1}\xi(t)(1-R_1\cos\theta_1)\sin\theta_2 \tag{4.1}$$

$$\theta_1^\cdot = \omega_1 - \varepsilon(\omega_1 R_1)^{-1}\xi(t)R_2\cos\theta_2\cos\theta_1 \tag{4.2}$$

$$\theta_2^\cdot = \omega_2 - \varepsilon(\omega_2 R_2)^{-1}\xi(t)(1-R_1\cos\theta_1)\cos\theta_2$$

Здесь приняты обозначения из [1]: R_j, θ_j, ω_j — амплитуды, фазы и частоты упругих ($j=1$) и угловых ($j=2$) колебаний подвеса, $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним с спектральной плотностью $S(\omega)$.

Из (4.1) с учетом результатов [1] следует, что квазирезонансные эффекты возникают, если несущие частоты возмущения совпадают с $\omega_1 \pm \omega_2$ или с ω_2. В [1] доказано, что при достаточно больших значениях $S(\omega_1 - \omega_2)$ система неустойчива (в среднеквадратичном). Исследуем динамику системы в случае, если несущая частота $\Omega = \omega_1 + \omega_2$, т. е.

$$S(\Omega) = S(\omega_1 + \omega_2) = \varepsilon^{-1} S_0(\Omega) \gg S(\omega_1 - \omega_2) \tag{4.3}$$

Тогда (4.1) можно переписать в виде (2.3) ($\varphi = \theta_1 + \theta_2$, $\psi = \theta_1$):

$$R_1^{\bullet} = -\varepsilon (2\omega_1)^{-1} \xi(t) R_2 \sin\varphi + \varepsilon Y_1(x, \varphi, \psi, t), \tag{4.4}$$

$$R_2^{\bullet} = \varepsilon (2\omega_2)^{-1} \xi(t) R_1 \sin\varphi + \varepsilon Y_2(x, \varphi, \psi, t)$$

$$\varphi^{\bullet} = \Omega - \varepsilon\xi(t) [(2\omega_1 R_1)^{-1} R_2 - (2\omega_2 R_2)^{-1} R_1] \cos\varphi + \varepsilon K(x, \varphi, \psi, t)$$

$$\psi^{\bullet} = \omega_1 + \varepsilon\Psi(x, \varphi, t) + \varepsilon G(x, \varphi, \psi, t)$$

Из (2.36)—(2.38), (4.4) следует, что при $\varepsilon \to 0$ процесс $\{R_1, R_2\}$ слабо сходится к медленному диффузионному процессу $\{r_1, r_2\}$, удовлетворяющему уравнениям

$$dr_1 = (\eta r_1 + \alpha_1 r_2^2/(2r_1))\, d\zeta + \sigma_{11} d\omega_1 + \sigma_{12} d\omega_2 \tag{4.5}$$

$$dr_2 = (\eta r_2 + \alpha_2 r_1^2/(2r_2))\, d\zeta + \sigma_{21} d\omega_1 + \sigma_{22} d\omega_2$$

$$\eta = -S(\omega_1 + \omega_2)/(8\omega_1\omega_2), \quad \alpha_j = S(\omega_1 + \omega_2)/(8\omega_j^2)$$

где компоненты матрицы диффузии a_{ij} определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{2} \sigma_{ik}\sigma_{jk} = a_{ik} \tag{4.6}$$

$$a_{11} = \alpha_1 r_2^2, \quad a_{22} = \alpha_2 r_1^2, \quad a_{12} = a_{21} = -\eta r_1 r_2$$

Очевидно, что выражения (4.5), (4.6) совпадают с соответствующими соотношениями [1] при $S(\omega_1 - \omega_2) \ll S(\omega_1 + \omega_2)$.

Обозначим $\mu_j = \mathrm{M} r_j^2$. Из теоремы и условия (3.2) следует, что при достаточно малых ε и при $0 \le t \le T_1/\varepsilon$

$$|\mathrm{M} R_j^2(t, \varepsilon) - \mu_j^2(\zeta)| \le C_1 \varepsilon^{1/4} \tag{4.7}$$

Уравнения для функций $\mu_j(\zeta)$ принимают вид (ср. [1]):

$$d\mu_1/d\zeta = 2\eta\mu_1 + 2\alpha_1\mu_2, \quad d\mu_2/d\zeta = 2\eta\mu_2 + 2\alpha_2\mu_1 \tag{4.8}$$

Характеристическое уравнение системы (4.8) записывается в виде $(p - 2\eta)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = 0$. Отсюда следует

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -(2\omega_1\omega_2)^{-1} S(\omega_1 + \omega_2) < 0 \tag{4.9}$$

Из (4.7), (4.9) вытекает, что на интервале времени $O(\varepsilon^{-1})$ дисперсии амплитуд колебаний остаются в малой окрестности неасимптотически устойчивого решения системы (4.8). Поскольку система (4.8) устойчива не экспоненциально, то этот результат не распространяется на интервал $t \in [0, \infty)$ [7], т. е. можно говорить только о стабилизации системы на конечном интервале времени.

Аналогично можно показать, что при $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ система неустойчива, а при $\Omega = \omega_2$ возбуждаются только угловые колебания подвеса, а упругими колебаниями можно пренебречь.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 93—012—00874.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ковалева А. С.* Многочастотные системы при стационарном случайном возмущении. 1. Нерезонансные колебания//Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 44—52.
2. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. 431 с.
3. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
4. *Диментберг М. Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. М.: Наука, 1989. 175 с.
5. *Ковалева А. С.* Управление колебательными и виброударными системами. М.: Наука, 1990. 256 с.
6. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.
7. *Kushner H. J.* Approximation and weak convergence methods for random processes, with applications to stochastic systems theory. Cambridge, MA: The MIT Press, 1984. 269 p.
8. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.XII.1991