МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1994

УДК 531.391

© 1994 г. Ю. Н. ЧЕЛНОКОВ

КВАТЕРНИОННОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА: УРАВНЕНИЯ ОШИБОК, ЗАКОНЫ И АЛГОРИТМЫ КОРРЕКЦИИ (СТАБИЛИЗАЦИИ)

Рассматриваются нормальные и осцилляторные кватернионные формы уравнений ошибок (уравнений возмущенного движения) кинематической задачи управления ориентацией твердого тела, предлагаются кватернионные законы стабилизации программного движения твердого тела, обеспечивающие коррекцию возмущенного движения по угловому положению и угловой скорости и приводящие к линейным (без линеаризации), стационарным и инвариантным относительно программного движения уравнениям ошибок системы управления ориентацией твердого тела, предлагаются алгоритмы бесплатформенных инерциальных систем управления ориентацией подвижных объектов и систем управления угловым движением роботов-манипуляторов.

Работа является продолжением [1].

1. Уравнения возмущенного движения. Построение корректирующего (стабилизирующего) управления ориентацией твердого тела (уравнений возмущенного движения). Для получения уравнений ошибок введем ошибку ориентации и ошибки по угловой скорости и угловому ускорению твердого тела.

Квантернион λ, характеризующий действительную ориентацию твердого тела, в соответствии со схемой поворотов (1.1) [1] и правилом сложения кватернионов, определенных своими компонентами в одном каком-то базисе (в данном случае в инерциальном базисе ξ), может быть представлен в виде

$$\lambda = \mu \circ \lambda^\circ \tag{1.1}$$

а в соответствии с правилом сложения собственных кватернионов [2] (кватернионов, каждый из которых своими компонентами в своем базисе, преобразуемом этим кватернионом) — в виде, отличающемся от (1.1) порядком кватернионных множителей

$$\lambda = \lambda^\circ \circ \mu^* \tag{1.2}$$

В формуле (1.1) фигурирует квантернион ошибки ориентации μ (квантернион рассогласования, характеризующий отклонение действительного углового положения твердого тела X от требуемого программного Z), определенный своими компонентами в инерциальном базисе ξ, а в формуле (1.2) — кватернион ошибки ориентации μ^*, определенный своими компонентами в связанном базисе X (а, следовательно, и в программном базисе Z). Кватернионы μ и μ^* связаны равенствами $\mu = \lambda^\circ \circ \mu^* \circ \bar{\lambda}^\circ$, $\mu^* = \bar{\lambda}^\circ \circ \mu \circ \lambda^\circ$.

В соответствии с (1.1), (1.2) кватернионы μ и μ^* находятся по формулам

$$\mu = \lambda \circ \bar{\lambda}^\circ \tag{1.3}$$

$$\mu^* = \bar{\lambda}^\circ \circ \lambda \tag{1.4}$$

Отметим, что нормы кватернионов ошибок ориентации μ и μ^* равны норме кватерниона λ:

$$\|\mu\| = \|\mu^*\| = \|\lambda\| = \lambda^2 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

Отметим также, что ошибка по угловому положению твердого тела вводится нами в соответствии с (1.3) или (1.4) не аддитивным образом, как это принято в теории возмущений, а с помощью операции кватернионного умножения. Такое введение ошибки по угловому положению соответствует математическому описанию сложения конечных поворотов в кватернионной форме (как известно, сложению конечных поворотов соответствует не сумма, а произведение кватернионов) и позволяет наиболее эффективно использовать достоинства кватернионного описания углового движения в рассматриваемой задаче управления ориентацией твердого тела.

Кватернионы $\boldsymbol{\omega}_X$, $\boldsymbol{\omega}_\xi$ действительной абсолютной угловой скорости и кватернионы $\boldsymbol{\varepsilon}_X$, $\boldsymbol{\varepsilon}_\xi$ действительного абсолютного углового ускорения твердого тела представим в следующем виде:

$$\boldsymbol{\omega}_X = \omega_0 + \sum_{k=1}^{3} (\omega_{Z_k}^\circ + \delta\omega_{vX_k})\, \mathbf{i}_k = \boldsymbol{\omega}_Z^\circ + \delta\boldsymbol{\omega}_X \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\xi = \omega_0 + \sum_{k=1}^{3} (\omega_{\xi_k}^\circ + \Delta\omega_{v\xi_k})\, \mathbf{i}_k = \boldsymbol{\omega}_\xi^\circ + \Delta\boldsymbol{\omega}_\xi \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_X = \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{3} (\varepsilon_{Z_k}^\circ + \delta\varepsilon_{vX_k})\, \mathbf{i}_k = \boldsymbol{\varepsilon}_Z^\circ + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_X \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\xi = \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{3} (\varepsilon_{\xi_k}^\circ + \Delta\varepsilon_{v\xi_k})\, \mathbf{i}_k = \boldsymbol{\varepsilon}_\xi^\circ + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_\xi \tag{1.8}$$

В соответствии с (1.5)—(1.8) кватернионы ошибок по угловой скорости и угловому ускорению могут быть введены либо с помощью формул

$$\delta\boldsymbol{\omega}_X = \boldsymbol{\omega}_X - \boldsymbol{\omega}_Z^\circ, \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon}_X = \boldsymbol{\varepsilon}_X - \boldsymbol{\varepsilon}_Z^\circ \tag{1.9}$$

либо с помощью формул

$$\Delta\boldsymbol{\omega}_\xi = \boldsymbol{\omega}_\xi - \boldsymbol{\omega}_\xi^\circ, \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_\xi = \boldsymbol{\varepsilon}_\xi - \boldsymbol{\varepsilon}_\xi^\circ \tag{1.10}$$

Векторы ошибок $\delta\omega_v$ и $\delta\varepsilon_v$ по угловой скорости и угловому ускорению, соответствующие кватернионам (1.9), вводятся с помощью задания из проекций

$$\delta\omega_{vX_k} = \omega_{vX_k} - \omega_{Z_k}^\circ, \quad \delta\varepsilon_{vX_k} = \varepsilon_{vX_k} - \varepsilon_{Z_k}^\circ \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1.11}$$

в связанной системе координат X, а векторы ошибок $\Delta\omega_v$ и $\Delta\varepsilon_v$ по угловой скорости и угловому ускорению, соответствующие кватернионам (1.10), вводятся с помощью задания их проекций

$$\Delta\omega_{v\xi_k} = \omega_{v\xi_k} - \omega_{\xi_k}^\circ, \quad \Delta\varepsilon_{v\xi_k} = \varepsilon_{v\xi_k} - \varepsilon_{\xi_k}^\circ \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1.12}$$

в абсолютной системе координат ξ.

Замечание 1. Вводимые в соответствии с (1.12) скалярные ошибки $\Delta\omega_{v\xi_k}$ и $\Delta\varepsilon_{v\xi_k}$ по угловой скорости и угловому ускорению являются проекциями векторных разностей $\Delta\boldsymbol{\omega}_v = \boldsymbol{\omega}_v - \boldsymbol{\omega}^\circ$ и $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_v = \boldsymbol{\varepsilon}_v - \boldsymbol{\varepsilon}^\circ$ на оси абсолютной системы координат ξ, в то время как вводимые в соответствии с (1.11) скалярные ошибки $\delta\omega_{vX_k}$ и $\delta\varepsilon_{vX_k}$ по угловой скорости и угловому ускорению не являются проекциями указанных векторных разностей на оси связанной системы координат X.

Используя кинематические уравнения движения твердого тела (1.2), (1.4), (1.5), (1.6) [1] и соотношения (1.1)—(1.8), получим нормальные формы уравнений ошибок системы управления ориентацией твердого тела (уравнений возмущенного движения) в различных кватернионных переменных.

Уравнения в переменных μ, $\delta\omega_X$:

$$\delta\omega_X^{\bullet} = \delta\varepsilon_X \tag{1.13}$$

$$2\mu^{\bullet} = \lambda \circ \delta\omega_X \circ \bar{\lambda}^{\circ}(t) = \mu \circ \lambda^{\circ}(t) \circ \delta\omega_X \circ \bar{\lambda}^{\circ}(t)$$

$$\delta\omega_X = \omega_0 + \delta\omega_{vX}, \quad \delta\varepsilon_X = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon_{vX}$$

Уравнения в переменных μ^*, $\delta\omega_X$:

$$\delta\omega_X^{\bullet} = \delta\varepsilon_X \tag{1.14}$$

$$2\mu^{*\bullet} = \mu^* \circ \delta\omega_X + \mu^* \circ \omega_Z^{\circ}(t) - \omega_Z^{\circ}(t) \circ \mu^*$$

Уравнения в переменных μ^*, $\Delta\omega_\xi$:

$$\Delta\omega_\xi^{\bullet} = \Delta\varepsilon_\xi \tag{1.15}$$

$$2\mu^{*\bullet} = \bar{\lambda}^{\circ}(t) \circ \Delta\omega_\xi \circ \lambda = \bar{\lambda}^{\circ}(t) \circ \Delta\omega_\xi \circ \lambda^{\circ}(t) \circ \mu^*$$

$$\Delta\omega_\xi = \omega_0 + \Delta\omega_{v\xi}, \quad \Delta\varepsilon_\xi = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_{v\xi}$$

Уравнения в переменных μ, $\Delta\omega_\xi$:

$$\Delta\omega_\xi^{\bullet} = \Delta\varepsilon_\xi, \quad 2\mu^{\bullet} = \Delta\omega_\xi \circ \mu + \omega_\xi^{\circ}(t) \circ \mu - \mu \circ \omega_\xi^{\circ}(t) \tag{1.16}$$

Уравнения ошибок (1.13), (1.16) используют в качестве переменной кватернион ошибки ориентации μ, определенный своими компонентами в инерциальном базисе, а уравнения (1.14), (1.15) — кватернион ошибки ориентации μ^*, определенный своими компонентами в связанном базисе. В уравнениях ошибок (1.13), (1.14) фигурируют кватернионы ошибок по угловой скорости и угловому ускорению $\delta\omega_X$ и $\delta\varepsilon_X$, определяемые равенствами (1.9), а в уравнениях (1.15), (1.16) — кватернионы ошибок по угловой скорости и угловому ускорению $\Delta\omega_\xi$ и $\Delta\varepsilon_\xi$, определяемые равенствами (1.10). Уравнения (1.14) ((1.16)) используют кватернионные переменные μ^*, $\delta\omega_X$ (μ, $\Delta\omega_\xi$), определенные своими компонентами в одном базисе X (ξ), а уравнения (1.13) ((1.15)) — кватернионные переменные μ, $\delta\omega_X$ (μ^*, $\Delta\omega_\xi$), определенные своими компонентами в разных базисах (соответственно в ξ (X) и X (ξ)). Уравнения (1.13), (1.15) содержат кватернион $\lambda^{\circ}(t)$ программной ориентации твердого тела, в то время как уравнения (1.14), (1.16) — кватернион программной угловой скорости $\omega_Z^{\circ}(t)$ или $\omega_\xi^{\circ}(t)$.

Замечание 2. Многообразие возможных форм уравнений ошибок не исчерпывается уравнениями (1.13)—(1.16). Для всех приведенных уравнений характерна общая черта: первое уравнение (уравнение для переменной $\delta\omega_X$ или $\Delta\omega_\xi$), имеет простую (диагональную) структуру, в то время как структура второго уравнения (уравнения для переменной μ или μ^*) существенно сложнее. Вместе с тем существуют уравнения ошибок другой структуры, когда простую структуру имеет второе уравнение, а первое уравнение имеет более сложную структуру. Так, если вместо отображений $\delta\omega_X$, $\delta\varepsilon_X$ кватернионов ошибок по угловой скорости и угловому ускорению на связанный базис X использовать отображения $\delta\omega_\xi$, $\delta\varepsilon_\xi$ этих кватернионов на инерциальный базис ξ, то вместо уравнений (1.13) будем иметь следующие уравнения:

$$\delta\omega_\xi^\bullet = \tfrac{1}{2}(\omega_\xi \circ \delta\omega_\xi \circ \delta\omega_\xi \circ \omega_\xi) + \delta\varepsilon_\xi, \quad 2\mu^\bullet = \delta\omega_\xi \circ \mu \tag{1.17}$$

$$\delta\omega_\xi = \lambda \circ \delta\omega_X \circ \lambda^{-1}, \quad \omega_\xi = \lambda \circ \omega_X \circ \lambda^{-1}, \quad \delta\varepsilon_\xi = \lambda \circ \delta\varepsilon_X \circ \lambda^{-1}$$

Уравнениям ошибок (1.15) соответствуют уравнения аналогичной структуры, использующие отображения $\Delta\omega_X$ и $\Delta\varepsilon_X$ кватернионов ошибок по угловой скорости и угловому ускорению на связанный базис

$$\Delta\omega_X^\bullet = \tfrac{1}{2}(\Delta\omega_X \circ \omega_X - \omega_X \circ \Delta\omega_X) + \Delta\varepsilon_X \tag{1.18}$$

$$2\mu^{*\bullet} = \mu^* \circ \Delta\omega_X, \quad \Delta\omega_X = \lambda^{-1} \circ \Delta\omega_\xi \circ \lambda = \omega_X - (\mu^*)^{-1} \circ \omega_Z^\circ \circ \mu^*$$

$$\Delta\varepsilon_X = \lambda^{-1} \circ \Delta\varepsilon_\xi \circ \lambda = \varepsilon_X - (\mu^*)^{-1} \circ \varepsilon_Z^\circ \circ \mu^*$$

Выбор той или иной формы уравнений ошибок зависит от конкретно решаемой задачи. Так, в [3] показано, что для решения кинематической задачи управления ориентацией твердого тела по угловой скорости в связанной системе координат (для построения вектора угловой скорости коррекции $\delta\omega_{kvX}$ в связанной системе координат X) удобно использовать второе уравнение (1.13) или эквивалентное ему второе уравнение (1.17). Аналогично можно показать, что для решения кинематической задачи управления ориентацией твердого тела по угловой скорости в абсолютной системе координат (для построения вектора угловой скорости коррекции $\Delta\omega_{kv\xi}$ в абсолютной системе координат ξ) наиболее удобно второе уравнение (1.15) или второе уравнение (1.18).

Анализ показывает, что для построения вектора корректирующего углового ускорения в связанной системе координат (управления $\delta\varepsilon_{kvX}$) наиболее удобны уравнения ошибок (1.13) или уравнения (1.16), а для построения вектора корректирующего углового ускорения в абсолютной системе координат (управления $\Delta\varepsilon_{kv\xi}$) наиболее удобны уравнения ошибок (1.15) или уравнения (1.14).

Дифференцируя вторые уравнения (1.13) по времени и учитывая первое уравнение (1.13) и вторые уравнения (1.2), (1.5) [1], получим уравнение для кватерниона ошибки ориентации μ в осцилляторной форме, использующей отображения кватернионов ошибок по угловой скорости и угловому ускорению $\delta\omega$ и $\delta\varepsilon$ на связанный базис X:

$$2\mu^{\bullet\bullet} = \lambda \circ [\tfrac{1}{2}(\omega_X \circ \delta\omega_X - \delta\omega_X \circ \delta\omega_Z^\circ) + \delta\varepsilon_X] \circ \bar{\lambda}^\circ \tag{1.19}$$

$$\omega_X \circ \delta\omega_X - \delta\omega_X \circ \omega_Z^\circ = \omega_Z^\circ(t) \circ \delta\omega_X - \delta\omega_X \circ \omega_Z^\circ(t) + \delta\omega_X \circ \delta\omega_X$$

Дифференцируя по времени второе уравнение (1.15) и учитывая первое уравнение (1.15) и вторые уравнение (1.4), (1.6) [1], получим уравнение для кватерниона ошибки ориентации μ^* в осцилляторной форме, использующей отображения кватернионов ошибок по угловой скорости и угловому ускорению $\Delta\omega$ и $\Delta\varepsilon$ на инерциальный базис ξ:

$$2\mu^{*\bullet\bullet} = \bar{\lambda}^\circ \circ [\tfrac{1}{2}(\Delta\omega_\xi \circ \omega_\xi - \omega_\xi^\circ \circ \Delta\omega_\xi) + \Delta\varepsilon_\xi] \circ \lambda \tag{1.20}$$

$$\Delta\omega_\xi \circ \omega_\xi - \omega_\xi^\circ \circ \Delta\omega_\xi = \Delta\omega_\xi \circ \omega_\xi^\circ(t) - \omega_\xi^\circ(t) \circ \Delta\omega_\xi + \Delta\omega_\xi \circ \Delta\omega_\xi$$

Уравнения (1.19) и (1.20) также могут быть получены из уравнений (1.16) и (1.14).

Осцилляторные формы уравнений ошибок, соответствующие нормальным формам (1.17) и (1.18), имеют вид

$$2\mu^{\cdot\cdot} = (\tfrac{1}{2}(\omega_\xi \circ \delta\omega_\xi - \delta\omega_\xi \circ (\omega_\xi - \delta\omega_\xi)) + \delta\varepsilon_\xi) \circ \mu \tag{1.21}$$

$$2\mu^{*\cdot\cdot} = \mu^* \circ (\tfrac{1}{2}(\Delta\omega_x \circ \omega_x - \omega_x^\circ \circ \Delta\omega_x) + \Delta\varepsilon_x) \tag{1.22}$$

2. Корректирующее (стабилизирующее) управление. Построение законов корректирующего (стабилизирующего) управления проводим, используя уравнения ошибок системы управления ориентацией твердого тела (уравнения возмущенного движения) (1.19), (1.20). Величины $\delta\varepsilon_x$ и $\Delta\varepsilon_\xi$, фигурирующие в уравнениях ошибок, рассматриваются нами в рамках поставленной задачи управления в качестве внешнего воздействия, приложенного к объекту управления. Это внешнее воздействие складывается из управляющего (корректирующего) воздействия $\delta\varepsilon_{kx}$ или $\Delta\varepsilon_{k\xi}$ и из возмущающего воздействия $\delta\varepsilon^*_{vx}$ или $\Delta\varepsilon^*_{v\xi}$:

$$\delta\varepsilon_x = \delta\varepsilon_{kx} + \delta\varepsilon^*_{vx}, \quad \Delta\varepsilon_\xi = \Delta\varepsilon_{k\xi} + \Delta\varepsilon^*_{v\xi}$$

Пренебрегая в дальнейшем возмущающим воздействием, будем полагать, что

$$\delta\varepsilon_x = \delta\varepsilon_{kx} = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon_{vkx}, \quad \Delta\varepsilon_\xi = \Delta\varepsilon_{k\xi} = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_{vk\xi} \tag{2.1}$$

Законы корректирующего управления будем формировать таким образом, чтобы уравнения (1.19) и (1.20) для кватернионов ошибок ориентации μ и μ^* принимали (с учетом равенства (2.1)) вид стандартных форм (2.2) и (2.3) соответственно:

$$2\mu^{\cdot\cdot} + \mathbf{k} \circ \mu^{\cdot} + \mathbf{l} \circ (\mu - 1) = 0 \tag{2.2}$$

$$2\mu^{*\cdot\cdot} + \mu^{*\cdot} \circ \mathbf{k}^* + (\mu^* - 1) \circ \mathbf{l}^* = 0 \tag{2.3}$$

где $\mathbf{k}, \mathbf{k}^*$ и $\mathbf{l}, \mathbf{l}^*$ – кватернионные константы (кватернионные коэффициенты (параметры) законов коррекции).

Сопоставляя уравнения ошибок (1.19) и (1.20) с выбранными стандартными формами (2.2) и (2.3), получим следующие законы коррекции

$$\delta\varepsilon_x = \delta\varepsilon_{kx} = -\tfrac{1}{2}(\omega_x \circ \delta\omega_x - \delta\omega_x \circ \omega_z^\circ(t)) - \lambda^{-1} \circ (\mathbf{k} \circ \mu^{\cdot} + \mathbf{l} \circ (\mu - 1)) \circ \lambda^\circ(t) \tag{2.4}$$

$$\Delta\varepsilon_\xi\ \Delta\varepsilon_{k\xi} = -\tfrac{1}{2}(\Delta\omega_\xi \circ \omega_\xi - \omega_\xi^\circ(t) \circ \Delta\omega_\xi) - \lambda^\circ(t) \circ (\mu^{*\cdot} \circ \mathbf{k}^* + (\mu^* - 1) \circ \mathbf{l}^*) \circ \lambda^{-1} \tag{2.5}$$

Преобразуя (2.4) и (2.5) с учетом (1.3), (1.5), (1.13) и (1.4), (1.8), (1.15), находим

$$\delta\varepsilon_{kx} = \tfrac{1}{2}((\delta\omega_v)^2 - \omega_0^2) - \omega_0\delta\omega_{vx} - \omega_{vx} \times \delta\omega_{vx} - \lambda^{-1} \circ (\tfrac{1}{2}\mathbf{k} \circ \lambda \circ \delta\omega_x + \mathbf{l} \circ (\lambda - \lambda^\circ(t))) \tag{2.6}$$

$$\omega_{vx} = \omega_z^\circ(t) + \delta\omega_{vx}, \quad \delta\omega_x = \omega_0 + \delta\omega_{vx}, \quad \delta\omega_v = |\delta\omega_v|$$

$$\Delta\varepsilon_{k\xi} = \tfrac{1}{2}((\Delta\omega_v)^2 - \omega_0^2) - \omega_0\Delta\omega_{v\xi} - \Delta\omega_{v\xi} \times \omega_\xi^\circ(t) - (\tfrac{1}{2}\Delta\omega_\xi \circ \lambda \circ \mathbf{k}^* + (\lambda - \lambda^\circ(t)) \circ \mathbf{l}^*) \circ \lambda^{-1} \tag{2.7}$$

В отображениях на инерциальный и связанный базисы законы коррекции (2.6) и (2.7) принимают вид

$$\delta\varepsilon_{k\xi} = \lambda \circ \delta\varepsilon_{kx} \circ \lambda^{-1} = \tfrac{1}{2}((\delta\omega_v)^2 - \omega_0^2) - \omega_0\delta\omega_{v\xi} - \omega_{v\xi} \times \delta\omega_{v\xi} - \tfrac{1}{2}\mathbf{k} \circ \delta\omega_\xi - \mathbf{l} \circ (1 - \mu^{-1}) \tag{2.8}$$

$$\omega_{V\xi} = \lambda \circ \omega_{VX} \circ \lambda^{-1}, \quad \delta\omega_{V\xi} = \lambda \circ \delta\omega_{VX} \circ \lambda^{-1}, \quad \delta\omega_{\xi} = \omega_0 + \delta\omega_{V\xi}$$

$$\Delta\varepsilon_{kX} = \lambda^{-1} \circ \Delta\varepsilon_{k\xi} \circ \lambda = 1/2\,((\Delta\omega_V)^2 - \omega_0^2) - \omega_0\Delta\omega_{VX} - \Delta\omega_{VX} \times \omega_X^{\circ} -$$

$$- 1/2\,\Delta\omega_X \circ \mathbf{k}^* - (1 - \mu^{*-1}) \circ \mathbf{l}^* \tag{2.9}$$

$$\Delta\omega_{VX} = \lambda^{-1} \circ \Delta\omega_{V\xi} \circ \lambda, \quad \omega_X^{\circ} = \lambda^{-1} \circ \omega_{\xi}^{\circ}(t) \circ \lambda, \quad \Delta\omega_X = \omega_0 + \Delta\omega_{VX}$$

Законы коррекции (2.8) и (2.9) могут быть также получены из сопоставления уравнений ошибок (1.21) и (1.22) со стандартными формами (2.2) и (2.3).

Отметим, что формирование кватернионных законов коррекции в виде (2.6) ((2.8)) или (2.7) ((2.9)), приводящем к стандартной кватернионной форме уравнений ошибок (2.2) или (2.3), возможно лишь для кватернионов корректирующих управлений $\delta\varepsilon_k$, $\Delta\varepsilon_k$, имеющих ненулевые скалярные части. Этим объясняется необходимость введения в рассмотрение кватернионов действительной абсолютной угловой скорости и действительного абсолютного углового ускорения твердого тела, а также кватернионов ошибок по угловой скорости и угловому ускорению с ненулевыми скалярными частями.

Составляющие корректирующих управлений (2.6)—(2.9), не содержащие кватернионных коэффициентов коррекции $\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}^*$) и $\mathbf{l}$ ($\mathbf{l}^*$), носят компенсационный характер: они обеспечивают компенсацию соответствующих половинных разностей произведений кватернионов угловых скоростей и ошибок по угловой скорости, фигурирующих в уравнениях ошибок (1.19)—(1.22). Составляющие, содержащие кватернионную константу $\mathbf{l}$ или $\mathbf{l}^*$, обеспечивают позиционную коррекцию возмущенного движения (коррекцию по угловому положению), а составляющие, содержащие кватернионную константу $\mathbf{k}$ или $\mathbf{k}^*$, — коррекцию по угловой скорости. Наиболее наглядно это видно из формул (2.8) и (2.9) для отображений корректирующих управлений $\delta\varepsilon_k$ и $\Delta\varepsilon_k$ на инерциальный ξ и связанный X базисы.

Для построения и реализации алгоритмов коррекции в общем случае наиболее удобны законы коррекции в виде (2.6) или (2.7). Удобство это определяется видом имеющейся информации об угловом положении и угловой скорости твердого тела, вырабатываемой датчиками первичной информации системы управления, а также принципами технической реализации законов управления с помощью исполнительных устройств. Представление корректирующих управлений в виде (2.8) или (2.9) удобно для построения алгоритмов коррекции в частном случае, указанном ниже, а также оказывается полезным для анализа свойств кинематического управления.

Рассмотрим возможные упрощения предлагаемых законов коррекции. В случае, когда программная угловая скорость $\omega^{\circ}(t) = 0$, ошибки по угловой скорости $\delta\omega_V$ и $\Delta\omega_V$ равны действительной абсолютной угловой скорости твердого тела: $\delta\omega_V = \Delta\omega_V = \omega_V$, векторные произведения $\omega_V \times \delta\omega_V = 0$, $\Delta\omega_V \times \omega^{\circ} = 0$, кватернион программной ориентации $\lambda^{\circ}(t) = \lambda^{\circ} = \mathrm{const}$, а корректирующие управления $\delta\varepsilon_k$ и $\Delta\varepsilon_k$ имеют одинаковый смысл. В этом случае законы коррекции (2.6)—(2.9) принимают вид

$$\delta\varepsilon_{kX} = 1/2\,(\omega_V^2 - \omega_0^2) - \omega_0\omega_{VX} - \lambda^{-1} \circ (1/2\mathbf{k} \circ \lambda \circ \omega_X + \mathbf{l} \circ (\lambda - \lambda^{\circ})) \tag{2.10}$$

$$\Delta\varepsilon_{k\xi} = 1/2\,(\omega_V^2 - \omega_0^2) - \omega_0\omega_{V\xi} - (1/2\omega_{\xi} \circ \lambda \circ \mathbf{k}^* + (\lambda - \lambda^{\circ}) \circ \mathbf{l}^*) \circ \lambda^{-1} \tag{2.11}$$

$$\delta\varepsilon_{k\xi} = 1/2\,(\omega_V^2 - \omega_0^2) - \omega_0\omega_{V\xi} - 1/2\,\mathbf{k} \circ \omega_{\xi} - \mathbf{l} \circ (1 - \mu^{-1}) \tag{2.12}$$

$$\Delta\varepsilon_{kX} = 1/2\,(\omega_V^2 - \omega_0^2) - \omega_0\omega_{VX} - 1/2\,\omega_X \circ \mathbf{k}^* - (1 - \mu^{*-1}) \circ \mathbf{l}^* \tag{2.13}$$

В этом частном случае для построения и реализации алгоритмов коррекции наиболее удобны законы коррекции в виде (2.12) или (2.13).

Для скалярных коэффициентов коррекции k и l соотношения (2.10) и (2.13), (2.11) и (2.12) совпадают, а законы коррекции (2.6)—(2.9) принимают следующий вид ($k^* = k$, $l^* = l$):

$$\delta\varepsilon_{kX} = \tfrac{1}{2}\left((\delta\omega_v)^2 - \omega_0^2 - k\omega_0\right) - (\omega_0 + \tfrac{1}{2}k)\,\delta\omega_{vX} - \omega_{vX} \times \delta\omega_{vX} - l\,(1 - \mu^{*-1}) \tag{2.14}$$

$$\Delta\varepsilon_{k\xi} = \tfrac{1}{2}\left((\Delta\omega_v)^2 - \omega_0^2 - k\omega_0\right) - (\omega_0 + \tfrac{1}{2}k)\,\Delta\omega_{v\xi} - \Delta\omega_{v\xi} \times \omega_\xi^\circ(t) - l\,(1 - \mu^{-1}) \tag{2.15}$$

$$\delta\varepsilon_{k\xi} = \tfrac{1}{2}\left((\delta\omega_v)^2 - \omega_0^2 - k\omega_0\right) - (\omega_0 + \tfrac{1}{2}k)\,\delta\omega_{v\xi} - \omega_{v\xi} \times \delta\omega_{v\xi} - l\,(1 - \mu^{-1})$$

$$\Delta\varepsilon_{kX} = \tfrac{1}{2}\left((\Delta\omega_v)^2 - \omega_0^2 - k\omega_0\right) - (\omega_0 + \tfrac{1}{2}k)\,\Delta\omega_{vX} - \Delta\omega_{vX} \times \omega_X^\circ - l\,(1 - \mu^{*-1})$$

Для построения алгоритмов коррекции в случае скалярных k и l наиболее удобны законы коррекции в виде (2.14) или (2.15).

Отметим, что значения коэффициентов (параметров) коррекции $\mathrm{k}\,(\mathrm{k}^*)$ и $\mathrm{l}\,(\mathrm{l}^*)$, фигурирующих в законах коррекции, определяются исходя из требуемых качественных и количественных характеристик процесса коррекции возмущенного движения. Это определение проводится на основе анализа уравнений ошибок (2.2) или (2.3) и имеющихся ограничений на максимально допустимые угловые скорости и ускорения. Уравнения (2.2) и (2.3) являются кватернионными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами, инвариантными относительно программного движения. Уравнение (2.2) исследовалось в [3], где построено его общее решение для случая различных корней кватернионного характеристического уравнения, установлены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости частного решения $\mu = 1$, соответствующего невозмущенному (программному) движению твердого тела, рассмотрены отдельные вопросы выбора коэффициентов коррекции k и l. Уравнение (2.3) простым сопряжением приводится к виду (2.2), поэтому не требует отдельного рассмотрения.

3. Алгоритмы управления. Рассмотрим алгоритмы формирования управления ориентацией твердого тела, реализующие законы коррекции (2.14) и (2.15). Для бесплатформенной инерциальной системы управления ориентацией твердого тела вектор управления ε_v (вектор требуемого абсолютного углового ускорения) необходимо формировать в связанной системе координат X. Поэтому необходимо использовать соотношения (1.5), (1.7), первое соотношение (2.1) и закон коррекции (2.14). Алгоритм формирования вектора управления ε_{vX} по информации бесплатформенной инерциальной системы ориентации состоит в последовательном выполнении следующих операций.

По измеренному вектору ω_{vX} абсолютной угловой скорости вращения твердого тела находим нормированный кватернион λ^+, характеризующий действительную ориентацию твердого тела в инерциальной системе координат ξ. Для этого численно интегрируем на бортовом вычислителе в реальном масштабе времени кватернионное кинематическое уравнение

$$2\,(\lambda^+)^{\cdot} = \lambda^+ \circ \omega_{vX}(t) \tag{3.1}$$

являющееся линейным нестационарным дифференциальным уравнением.

Вычисляем тензор λ ненормированного кватерниона λ действительной ориентации твердого тела и скалярную часть ω_0 кватерниона ω_X действительной абсолютной угловой скорости вращения твердого тела, интегрируя в реальном масштабе времени систему двух скалярных дифференциальных уравнений

$$\lambda^{\boldsymbol{\cdot}} = 1/2\, \omega_0 \lambda \tag{3.2}$$

$$\omega_0^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{1}{2}\left((\delta\omega_v)^2 - \omega_0^2 - k\omega_0\right) + \frac{l}{\lambda}\,\mathrm{sgal}\,(\bar{\lambda}^+ \circ \lambda^\circ(t)) - l$$

$$(\delta\omega_v)^2 = |\omega_{vx}(t) - \omega_z^\circ(t)|^2 = |\delta\omega_{vx}|^2$$

Начальные условия интегрирования системы уравнений (3.2): $\lambda(t_0) = 1$, $\omega_0(t_0) = 0$.

Вычисляем проекции вектора требуемого абсолютного углового ускорения ε_v твердого тела на оси связанной системы координат X по формуле

$$\varepsilon_{vx} = \varepsilon_z^\circ(t) - \omega_{vx}(t) \times \delta\omega_{vx} - (\omega_0 + 1/2 k)\,\delta\omega_{vx} + \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{vect}\,(\bar{\lambda}^+ \circ \lambda^\circ(t)),$$

$$\delta\omega_{vx} = \omega_{vx}(t) - \omega_z^\circ(t) \tag{3.3}$$

В уравнениях (3.2), (3.3) $\bar{\lambda}^+$ – кватернион сопряженный λ^+, sgal $(\cdot)$, vect $(\cdot)$ – скалярная и векторная части кватерниона $(\cdot)$.

Фигурирующие в уравнениях (3.2), (3.3) кватернион λ° программной ориентации твердого тела, кватернион ω_z° программной угловой скорости, кватернион ε_z° программного углового ускорения вычисляются в случае построения программного углового движения в виде плоского эйлерова разворота по формулам (3.6), (3.8), (3.10), (3.13), (3.15) [1].

Замечание 3. Для формирования вектора управления ε_{vx} вместо алгоритма (3.1)—(3.3) может быть использован другой алгоритм, состоящий из уравнений

$$2\lambda^{\boldsymbol{\cdot}} = \lambda \circ \omega_x, \quad \omega_x = \omega_0 + \omega_{vx}(t) \tag{3.4}$$

$$\omega_0^{\boldsymbol{\cdot}} = 1/2\left((\delta\omega_v)^2 - \omega_0^2 - k\omega_0\right) + l\,\mathrm{sgal}\,(\lambda^{-1} \circ \lambda^\circ(t)) - l \tag{3.5}$$

$$\varepsilon_{vx} = \varepsilon_z^\circ(t) - \omega_{vx}(t) \times \delta\omega_{vx} - (\omega_0 + 1/2 k)\,\delta\omega_{vx} + l\,\mathrm{vect}\,(\lambda^{-1} \circ \lambda^\circ(t)) \tag{3.6}$$

Алгоритм (3.4)—(3.6) в отличие от алгоритма (3.1)—(3.3) использует в качестве переменной состояния ненормированный кватернион λ действительной ориентации твердого тела. Уравнения (3.4), (3.5) образуют единую систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений относительно переменных λ и ω_0, поэтому должны интегрироваться совместно. Уравнение же (3.1) не зависит от (3.2), поэтому интегрируется в алгоритме (3.1)—(3.3) независимо от уравнений (3.2). С вычислительной точки зрения алгоритм (3.1)—(3.3) имеет преимущество перед алгоритмом (3.4)—(3.6).

Замечание 4. Правая часть второго уравнения (3.2) (уравнения (3.5)) и выражение для разности $\varepsilon_{vx} - \varepsilon_z^\circ(t)$, определяемое соотношением (3.3) ((3.6)), получены выделением скалярной и векторной частей в кватернионном законе коррекции (2.14).

Рассмотрим алгоритмы управления угловым движением манипулятора по абсолютному угловому положению и абсолютной угловой скорости выходного звена манипулятора. Для простоты рассмотрим трехзвенный манипулятор с вращательными сочленениями. С основанием манипулятора свяжем абсолютную систему координат ξ, а с выходным звеном манипулятора (схватом) — систему координат X. Вдоль осей вращения звеньев манипулятора направим координатные оси $X_1'' = \xi_1$, X_2', X_3 систем координат X'', X', X, связанных со звеньями манипулятора. Углы относительных поворотов звеньев вокруг этих осей обозначим соответственно через α, β, γ. Ориентация выходного звена манипулятора в системе координат ξ характеризуется кватернионом

$$\lambda^{+} = \left(\cos\frac{\alpha}{2} + \mathrm{i}_1 \sin\frac{\alpha}{2}\right) \circ \left(\cos\frac{\beta}{2} + \mathrm{i}_2 \sin\frac{\beta}{2}\right) \circ \left(\cos\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}_3 \sin\frac{\gamma}{2}\right) \qquad (3.7)$$

где $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \mathrm{i}_3$ – орты гиперкомплексного пространства.

Проекции вектора ω_V абсолютной угловой скорости вращения выходного звена манипулятора на оси систем координат X и ξ имеют вид

$$\omega_{VX_1} = \alpha^{\cdot} \cos\beta \cos\gamma + \beta^{\cdot} \sin\gamma, \quad \omega_{VX_2} = -\alpha^{\cdot} \cos\beta \sin\gamma + \beta^{\cdot} \cos\gamma \qquad (3.8)$$

$$\omega_{VX_3} = \alpha^{\cdot} \sin\beta + \gamma^{\cdot}$$

$$\omega_{V\xi_1} = \alpha^{\cdot} + \gamma^{\cdot} \sin\beta, \quad \omega_{V\xi_2} = \beta^{\cdot} \cos\alpha - \gamma^{\cdot} \sin\alpha \cos\beta \qquad (3.9)$$

$$\omega_{V\xi_3} = \beta^{\cdot} \sin\alpha + \gamma^{\cdot} \cos\alpha \cos\beta$$

Угловые ускорения относительных вращений звеньев манипулятора могут быть представлены в виде (3.10) или (3.11):

$$\alpha^{\cdot\cdot} = (\cos\beta)^{-1} (\varepsilon_{VX_1} \cos\gamma - \varepsilon_{VX_2} \sin\gamma - \beta^{\cdot}\gamma^{\cdot} + \alpha^{\cdot}\beta^{\cdot} \sin\beta) \qquad (3.10)$$

$$\beta^{\cdot\cdot} = \varepsilon_{VX_1} \sin\gamma + \varepsilon_{VX_2} \cos\gamma + \alpha^{\cdot}\gamma^{\cdot} \cos\beta, \quad \gamma^{\cdot\cdot} = \varepsilon_{VX_3} - \alpha^{\cdot\cdot} \sin\beta - \alpha^{\cdot}\beta^{\cdot} \cos\gamma$$

$$\gamma^{\cdot\cdot} = (\cos\beta)^{-1} (\varepsilon_{V\xi_3} \cos\alpha - \varepsilon_{V\xi_2} \sin\alpha - \alpha^{\cdot}\beta^{\cdot} + \beta^{\cdot}\gamma^{\cdot} \sin\beta) \qquad (3.11)$$

$$\beta^{\cdot\cdot} = \varepsilon_{V\xi_2} \cos\alpha + \varepsilon_{V\xi_3} \sin\alpha + \alpha^{\cdot}\gamma^{\cdot} \cos\beta, \quad \alpha^{\cdot\cdot} = \varepsilon_{V\xi_1} - \gamma^{\cdot\cdot} \sin\beta - \gamma^{\cdot}\beta^{\cdot} \cos\beta$$

где ε_{VX_k}, $\varepsilon_{V\xi_k}$ – проекции вектора абсолютного углового ускорения ε_V выходного звена манипулятора на оси систем координат X и ξ.

Если на выходном звене манипулятора установлен трехкомпонентный измеритель абсолютной угловой скорости, а в сочленениях звеньев манипулятора расположены датчики углов и угловых скоростей относительных поворотов звеньев, то алгоритм формирования требуемых угловых ускорений в сочленениях манипулятора, обеспечивающих желаемое движение выходного звена манипулятора, образуется уравнениями (3.1)—(3.3), (3.10). При этом в формулы (3.10), служащие для вычисления требуемых угловых ускорений, подставляются углы α, β, γ и угловые скорости $\alpha^{\cdot}$, $\beta^{\cdot}$, $\gamma^{\cdot}$, измеряемые датчиками углов и угловых скоростей манипулятора, и компоненты ε_{VX_k} вектора управления ε_{VX}, формируемые алгоритмом (3.1)—(3.3).

Замечание 5. Использование предлагаемого алгоритма формирования управлений предполагает, что основание манипулятора не совершает угловых движений в инерциальной системе координат, или что они пренебрежимо малы.

Замечание 6. Система управления движением манипулятора может не содержать датчиков угловых скоростей относительных поворотов звеньев манипулятора, так как угловые скорости $\alpha^{\cdot}$, $\beta^{\cdot}$, $\gamma^{\cdot}$, входящие в соотношения (3.10), могут быть вычислены по показателям датчиков углов и показаниям трехкомпонентного измерителя абсолютной угловой скорости вращения выходного звена манипулятора по формулам $\alpha^{\cdot} = (\cos\beta)^{-1} (\omega_{VX_1} \cos\gamma - \omega_{VX_2} \sin\gamma)$, $\beta^{\cdot} = \omega_{VX_1} \sin\gamma + \omega_{VX_2} \cos\gamma$, $\gamma^{\cdot} = \omega_{VX_3} - \alpha^{\cdot} \sin\beta$.

Для системы управления угловым движением манипулятора, в состав которой не входит трехкомпонентный измеритель абсолютной угловой скорости, а входят лишь датчики углов и угловых скоростей относительных поворотов звеньев манипулятора, можно предложить два варианта алгоритма формирования требуемых угловых ускорений в сочленениях манипулятора.

Вариант 1. Алгоритм образуется уравнениями (3.7), (3.8), (3.2), (3.3), (3.10). Соотношение (3.7) позволяет вычислить по показаниям датчиков углов манипулятора нормированный кватернион λ^+ действительной ориентации выходного звена манипулятора в абсолютной системе координат, а соотношения (3.8) — проекции вектора абсолютной угловой скорости выходного звена манипулятора на связанные оси по показаниям датчиков углов и угловых скоростей звеньев манипулятора. Алгоритм использует проекции векторов $\boldsymbol{\omega}_V$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_V$ на связанные оси и удобен в случае, когда программное движение выходного звена манипулятора строится в связанной системе координат X (например, по формулам (3.6), (3.8), (3.10), (3.13), (3.15) [1]).

Вариант 2. Алгоритм образуется уравнениями (3.7), (3.9), (3.11) и ураненииями

$$\lambda^{\cdot} = \tfrac{1}{2}\,\omega_0\lambda \tag{3.12}$$

$$\omega_0^{\cdot} = \frac{1}{2}\left((\Delta\omega_V)^2 - \omega_0^2 - k\omega_0\right) + \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{sgal}\,(\lambda^\circ(t) \circ \bar{\lambda}^+) - 1$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{V\xi} = \boldsymbol{\varepsilon}_\xi^\circ(t) - \Delta\boldsymbol{\omega}_{V\xi} \times \boldsymbol{\omega}_\xi^\circ(t) - \left(\omega_0 + \frac{1}{2}k\right)\Delta\boldsymbol{\omega}_{V\xi} + \frac{l}{\lambda}\,\mathrm{vect}\,(\lambda^\circ(t) \circ \bar{\lambda}^+)$$

$$\Delta\boldsymbol{\omega}_{V\xi} = \boldsymbol{\omega}_{V\xi}(t) - \boldsymbol{\omega}_\xi^\circ(t), \quad \Delta\omega_V = |\Delta\boldsymbol{\omega}_{V\xi}|$$

Алгоритм построен на основе закона коррекции (2.15) и использует проекции векторов $\boldsymbol{\omega}_V$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_V$ на оси абсолютной системы координат. Удобен в случае, когда программное движение выходного звена манипулятора строится в абсолютной системе координат ξ (например, по формулам (3.4), (3.8), (3.9), (3.12), (3.14) [1]).

Замечание 7. Как видно из уравнений (3.2), (3.3) и (3.12) скалярные части ω_0 и $\varepsilon_0 = \omega_0^{\cdot}$ кватернионов угловой скорости и углового ускорения (управления) и тензор λ ненормированного кватерниона ориентации играют в предложенных алгоритмах управления важную роль, обеспечивая в процессе управления движением автоматическую подстройку коэффициентов коррекции по угловому положению и угловой скорости (коэффициентов $k^+ = \omega_0 + \tfrac{1}{2}k$ и $l^+ = l/\lambda$).

В заключение отметим, что полученные результаты могут быть обобщены на кинематические задачи управления пространственным движением свободного твердого тела, когда в качестве управления принимается дуальный вектор (винт) абсолютного углового и абсолютного линейного ускорений, а в качестве переменных, описывающих движение твердого тела, — бикватернион конечного перемещения и кинематический винт абсолютных скоростей твердого тела. Для этого необходимо использовать принцип перенесения Котельникова — Штуди, аппарат бикватернионов или бикватернионных матриц и бикватернионные кинематические уравнения пространственного движения твердого тела [4, 5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Челноков Ю. Н.* Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: Уравнения движения, постановка задач, программное движение и управление//Изв. АН. МТТ. 1993. № 4. С. 7—14.
2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
3. *Плотников П. К., Сергеев А. Н., Челноков Ю. Н.* Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 9—18.
4. *Челноков Ю. Н.* Об одном винтовом методе описания движения твердого тела//Сб. науч.-метод. статей по теор. механике. М.: Высш. школа, 1981. Вып. 11. С. 122—129.
5. *Челноков Ю. Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела//ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 32—39.

Саратов

Поступила в редакцию
10.XII.1991