МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1994

УДК 534.1

© 1994 г. Ю. Г. МАРКОВ, И. С. МИНЯЕВ

К ДИНАМИКЕ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ УГЛОВЫХ ВИБРАЦИЙ

Рассматривается задача, в которой изучаются вопросы, связанные с динамическими процессами нежесткого спутника, при наличии угловых вибраций. Деформируемость, имеющая место в крупногабаритных системах, обусловливает учет влияния упругих колебаний на движение всей конструкции как целого относительно ее центра масс. Одним из распространенных режимов движения космического аппарата (КА) вокруг центра масс является стабилизация вращением одной из его осей инерции в пространстве. Точность стабилизации будет тем выше, чем больше собственный кинетический момент КА (при условии, что возмущающие моменты не изменяются по абсолютной величине). Наличие вибраций в деформируемой системе, стабилизированной вращением, вызывает перекрестные связи между осями. В данной статье изучается вопрос о влиянии вибраций на угловую скорость вращения системы как целого вокруг стабилизированной оси. При этом вязкоупругие свойства материала описываются теорией комплексного трения Е. С. Сорокина [1]. Предполагается, что движение системы относительно центра масс и движение самого центра масс независимы.

1. Уравнения движения. Пусть спутник представляет собой динамически симметричную механическую систему тело вращения, состоящую из упругой и твердой частей. Упругая часть осесимметрична, однородна и изотропна, и занимает в недеформированном состоянии область $\Omega_2 \in E^3$. Ось динамической симметрии совпадает с осью симметрии упругой части. Перемещения частиц упругой среды относительно твердого тела (занимающего область $\Omega_1 \in E^3$) на части осесимметричной границы равны нулю, другая часть границы свободна. С твердой частью спутника жестко связана система координат $Cx_1x_2x_3$, начало которой совпадает с центром масс недеформированной системы — точкой C, а ось Cx_i $(i = 1, 2, 3)$ направлены по главным центральным осям инерции, причем ось Cx_3 является осью динамической симметрии. Принцип Даламбера — Лагранжа для рассматриваемой системы запишется следующим образом [2]:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \{O^{-1}\mathbf{R}_*^{\cdot\cdot} + \boldsymbol{\omega}^\cdot \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})] +$$

$$+2 [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^\cdot] + \mathbf{u}^{\cdot\cdot} - \mathbf{f} - \mathbf{f}_M\} \rho_* \delta \alpha dx = 0$$

$$\int_{\Omega_2} \{O^{-1}\mathbf{R}_*^{\cdot\cdot} + \boldsymbol{\omega}^\cdot \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + 2 [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^\cdot] + \tag{1.1}$$

$$+ \mathbf{u}^{\cdot\cdot} - \mathbf{f}\} \rho_2 \delta \mathbf{u} dx + (\nabla E [\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) = 0$$

$$O^{-1}\mathbf{R}_*^{\cdot\cdot} = O^{-1}\mathbf{R}^{\cdot\cdot} - \boldsymbol{\omega}^\cdot \times \mathbf{u}_C - \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_C] - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_C^\cdot - \mathbf{u}_C^{\cdot\cdot}$$

$$\mathbf{f} = -\mu R^{-2} [O^{-1}\mathbf{R}^\circ + (\mathbf{r} + \mathbf{w}) R^{-1} - 3 (\mathbf{R}^\circ, \mathbf{r} + \mathbf{w}) R^{-1} O^{-1}\mathbf{R}^\circ]$$

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_C, \quad \mathbf{R} = R\mathbf{R}^\circ$$

Здесь $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра масс деформированной системы — точки C'; $\mathbf{R}_*^{\cdot\cdot}$ и $\mathbf{R}^{\cdot\cdot}$ — абсолютные ускорения точек C и C' соответственно; матрица

$O^{-1}(t)$ задает переход от системы осей Кенига к связанной системе координат; $\omega = (\omega_1^\vee, \omega_2^\vee, \omega_3^\vee)$ — абсолютная угловая скорость системы координат $Cx_1x_2x_3$, заданная в проекциях на собственные оси; $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$ — векторы упругого смещения частицы, характеризуемой в недеформированном состоянии радиус-вектором $\mathbf{r}$, относительно систем координат Cx_i и $C'x_i'$ (оси $C'x_i'$ параллельны осям Cx_i $(i = 1, 2, 3)$); $\mathbf{u}_C$ — вектор, проведенный из точки C в точку C', задающий смещение центра масс при деформациях; $\nabla E\,[\mathbf{u}]$ — градиент квадратичного функционала линейной теории упругости малых деформаций; $\mathbf{f}$ — массовая плотность гравитационных сил, действующих на частицы системы со стороны притягивающего центра с гравитационным параметром μ; $\mathbf{f}_M$ — внешние активные силы (обусловленные, например, некоторым технологическим процессом), создающие вращательный момент относительно центра масс. Предполагается, что силы $\mathbf{f}_M$ приложены к твердой части системы, поэтому при $\mathbf{r} \in \Omega_2$ $\mathbf{f}_M = 0$. В (1.1) вариации $\delta\alpha$ и $\delta\mathbf{u}$ независимы, причем учтено, что для точек области Ω_1 $\delta\mathbf{u} = 0$; если ρ_1 и $\rho_2 = \mathrm{const}$ — плотность твердой и упругой частей соответственно, то $\rho_* = \rho_i$ при $\mathbf{r} \in \Omega_i$ $(i = 1, 2)$.

Дальнейший метод исследования представляет собой сочетание методов модального анализа и малого параметра. Решение второго уравнения в (1.1) в случае осесимметричной упругой части с осесимметричными граничными условиями будем искать в виде:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} [q_k(t)\,\mathbf{V}_k(\mathbf{r}) + p_k(t)\,\mathbf{W}_k(\mathbf{r})] \tag{1.2}$$

где $q_k(t)$, $p_k(t)$ — нормальные координаты (модальные переменные), а $\mathbf{V}_k(\mathbf{r})$ и $\mathbf{W}_k(\mathbf{r})$ — собственные формы свободных колебаний упругой части системы, соответствующие собственной частоте ν_k и удовлетворяющие условиям ортонормированности:

$$(\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_l) = \int_{\Omega_2} \mathbf{V}_k\mathbf{V}_l dx = \delta_{kl}, \quad (\mathbf{W}_k, \mathbf{W}_l) = \delta_{kl}, \quad (\mathbf{V}_k, \mathbf{W}_l) = 0$$

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}, \quad dx = dx_1dx_2dx_3$$

Каждому номеру k соответствует семейство собственных форм $\{\mathbf{V}_{km}\}_{m=0}^{\infty}$ и $\{\mathbf{W}_{km}\}_{m=0}^{\infty}$ и собственных частот $\{\nu_{km}\}_{m=0}^{\infty}$. Ограничивая число рассматриваемых форм, предполагаем, что каждому k соответствует одна из главных форм колебаний. Заметим, что $k = 0$ собственные формы $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{W}_0$ описывают крутильные и продольно-поперечные деформации соответственно. Подставляя разложение (1.2) во второе уравнение (1.1) с учетом равенства $\rho_2^{-1}\nabla E\,[\mathbf{U}_k] = \nu_k^2\mathbf{U}_k$, $\mathbf{U}_k \in \{\mathbf{V}_k, \mathbf{W}_k\}$ получим уравнения для нормальных координат:

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_k + \nu_k^2 q_k + (\dot{\omega} \times [\mathbf{r} + \mathbf{u}] + \omega \times [\omega \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})] + 2\,[\omega \times \dot{\mathbf{u}}], \mathbf{V}_k) - \\ &- (\ddot{\mathbf{u}}_C + \dot{\omega} \times \mathbf{u}_C + \omega \times [\omega \times \mathbf{u}_C] + 2\,[\omega \times \dot{\mathbf{u}}_C] + \mathbf{f} - \\ &- O^{-1}\ddot{\mathbf{R}}, \mathbf{V}_k) = 0, \quad \mathbf{u}_C = m^{-1}\int_{\Omega_2} \rho_2\mathbf{u}dx, \quad m = \int_{\Omega} \rho_* dx \end{aligned} \tag{1.3}$$

Уравнение для p_k получается из (1.3) с помощью замены $\mathbf{V}_k \to \mathbf{W}_k$.

В уравнении (1.3) необходимо учесть внутреннее трение в материале. В [1] анализируются 16 теорий внутреннего трения. Экспериментальные исследования показывают, что в различных материалах рассеивание энергии при колебаниях для некоторого диапазона частот не зависит от частоты колебаний и зависит от амплитуды деформаций и температуры. При описании зависимости между внешней циклической нагрузкой и величиной деформаций широкое применение получила модель комплексного трения Е. С. Сорокина. Так как ниже будет рассмотрена вибрирующая система, то в (1.3) введем комплексный коэффициент упругости, заменяя $\nu_k^2 q_k$ на $\nu_k^2 (1 + i\varkappa_k)\, q_k$, где $i^2 = -1$, $\varkappa_k$ — коэффициент внутреннего трения.

В явном виде уравнения для модальных переменных q_k, p_k (но с применением модели Кельвина — Фойгта) приведены в [3]. При этом использованы следующие коэффициенты формы:

$$b_{klj} = \int_{\Omega_2} V_{kl} x_j\, dx, \quad c_{klj} = \int_{\Omega_2} W_{kl} x_j\, dx, \quad d_{kl} = \int_{\Omega_2} V_{kl}\, dx \tag{1.4}$$

$$f_{kl} = \int_{\Omega_2} W_{kl}\, dx \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad B_{lkij} = \int_{\Omega_2} W_{li} V_{kj}\, dx$$

$$b_{klj} = c_{klj} = 0 \quad (k > 2), \quad d_{kl} = f_{kl} = 0 \quad (k > 1)$$

где $V_{kl} = (\mathbf{V}_k, \mathbf{e}_l)$, $W_{kl} = (\mathbf{W}_k, \mathbf{e}_l)$ — проекции векторов V_k и W_k на ось Cx_i; $e_i\, (i = 1, 2, 3)$ — орт по оси Cx_i.

Далее, из первого уравнения в (1.1) следуют динамические уравнения Эйлера. Перейдя к дифференцированию по новой независимой переменной $\tau = \nu t$, где ν — наинизшая собственная частота упругих колебаний, и обозначив $\omega_i = \omega_i^{\vee}/\omega_* \; (i = 1, 2, 3)$, где ω_* – характерная угловая скорость вращения твердого спутника, причем $\varepsilon = \omega_*/\nu \ll 1$ — малый параметр задачи, выпишем эти уравнения в виде:

$$\begin{aligned}
&\omega_1' + [J_{12}\, \omega_2' + J_{13}\omega_3' + J_{11}'\omega_1 + J_{12}'\omega_2 + J_{13}'\omega_3 + \varepsilon\, (C - A + J_{33} - \\
&- J_{22})\, \omega_2\omega_3 + \varepsilon J_{23}\, (\omega_2^2 - \omega_3^2) - \varepsilon J_{12}\omega_1\omega_3 + \varepsilon J_{13}\omega_1\omega_2\,]\, A^{-1}\, (1 - J_{11}A^{-1}) = \\
&= \{\nu^{-1}\omega_*^{-1}\, (M_1 + M_{1\Gamma}) + \rho_2\, [a\, (\varepsilon^{-1}q_1'' + \omega_3 p_1') - 2\omega_2 b_{021} q_0'\,]\}\, A^{-1}\, (1 - J_{11}A^{-1}) \\
&\omega_2' + [J_{12}\omega_1' + J_{23}\omega_3' + J_{12}'\omega_1 + J_{22}'\omega_2 + J_{23}'\omega_3 + \varepsilon\, (A - C + J_{11} - J_{33})\, \omega_1\omega_3 + \\
&+ \varepsilon J_{13}\, (\omega_3^2 - \omega_1^2) + \varepsilon J_{12}\omega_2\omega_3 - \varepsilon J_{23}\omega_1\omega_2\,]\, A^{-1}\, (1 - J_{22}A^{-1}) = \qquad (1.5) \\
&= \{\nu^{-1}\omega_*^{-1}\, (M_2 + M_{2\Gamma}) + \rho_2\, [a\, (-\varepsilon^{-1}p_1'' + \omega_3 q_1') + 2\omega_1 b_{021} q_0'\,]\}\, A^{-1}\, (1 - J_{22}A^{-1}) \\
&\omega_3' + [J_{13}\omega_1' + J_{23}\omega_2' + J_{13}'\omega_1 + J_{23}'\omega_2 + J_{33}'\omega_3 + \varepsilon\, (J_{22} - J_{11})\, \omega_1\omega_2 + \\
&+ \varepsilon J_{12}\, (\omega_1^2 - \omega_2^2) - \varepsilon J_{13}\omega_2\omega_3 + \varepsilon J_{23}\omega_1\omega_3\,]\, C^{-1}\, (1 - J_{33}C^{-1}) = \\
&= \{\nu^{-1}\omega_*^{-1}\, (M_3 + M_{3\Gamma}) - \rho_2\, [a\, (\omega_1 p_1' + \omega_2 q_1') + 2\varepsilon^{-1} q_0'' b_{021}\,]\}\, C^{-1}\, (1 - J_{33}C^{-1})
\end{aligned}$$

Здесь A и C — экваториальный и осевой моменты инерции недеформированной системы; $a = b_{123} - b_{132}$; $J_{ij}\,[\mathbf{u}]$ — линейные по $\mathbf{u}$ компоненты тензора инерции деформированной системы; штрихом обозначено дифференцирование по τ. Проекции гравитационного момента $\mathbf{M}_\Gamma = (M_{1\Gamma}, M_{2\Gamma}, M_{3\Gamma})$ на оси x_i $(i = 1, 2, 3)$ определяются из выражения:

$$\mathbf{M}_\Gamma = 3\mu R^{-3}\, [\mathbf{R}^\circ \times J\mathbf{R}^\circ\,], \quad J = J_0 + J_{ij}, \quad J_0 = \mathrm{diag}\,\{A, A, C\}$$

Заметим, что в рассматриваемых ниже задачах деформации, вызванные гравитационным полем не учитываются, так как они не влияют на основной эффект, и полагается $\mathbf{f} - O^{-1}\mathbf{R}^{\cdot\cdot} = 0$, $\mathbf{M}_\Gamma = 0$. (При необходимости эти деформации можно учесть).

2. Двухосные вибрации системы. Далее будем предполагать, что внешние силы $\mathbf{f}_M$ таковы, что создают осциллирующие моменты, действующие по осям x_1 и x_2, вида:

$$M_i = h_i \sin\, (\mu_* t + \varphi_i) \quad (i = 1, 2), \quad M_3 = 0 \tag{2.1}$$

где h_i, μ_*, φ_i — амплитуда, частота и начальная фаза соответствующего момента. Рассмотрим постановку задачи, когда в начальный момент времени система закручена с угловой скоростью $\omega_3^\vee(0) = \omega_*$. Изучим вопрос о влиянии вибраций на величину ω_3. Преобразуем выражения (2.1) к виду

$$M_i = h\,(h_{i1} \cos \mu\tau + h_{i2} \sin \mu\tau), \quad \mu = \mu_*/\nu, \quad \mu \sim O\,(1) \tag{2.2}$$

$$h_{i1} = h_i \sin \varphi_i/h, \quad h_{i2} = h_i \cos \varphi_i/h \quad (i = 1, 2), \quad h_{i1,2} \sim O\,(1)$$

и введем обозначение $k = h/(\nu\omega_* A)$. Коэффициент k характеризует отношение амплитуды ω_0 угловых скоростей $\omega_1^\vee$ и $\omega_2^\vee$ абсолютно твердого спутника при вибрациях к угловой скорости вращения ω_*, так что $\omega_0/\omega_* = k/\mu$. При $k \ll 1$ будет $\omega_0 \ll \omega_*$ и интенсивность вибраций мала; при $k \sim O\,(1)$ $(\omega_0 \sim \omega_*)$ — вибрации большой интенсивности.

В принятой постановке решение уравнений для нормальных координат и системы (1.5) представимы в виде разложения по степеням малого параметра ε следующим образом:

$$\omega_1 = \omega_{10} + \varepsilon\omega_{11} + \varepsilon^2\omega_{12} + \ldots, \quad \omega_2 = \omega_{20} + \varepsilon\omega_{21} + \varepsilon^2\omega_{22} + \ldots, \quad q_1 = \varepsilon q_{11} + \ldots$$

$$p_1 = \varepsilon p_{11} + \ldots, \quad q_2 = \varepsilon^2 q_{22} + \ldots, \quad p_2 = \varepsilon^2 p_{22} + \ldots,$$

$$\omega_3 = \omega_{30} + \varepsilon\omega_{31} + \varepsilon^2\omega_{32} + \varepsilon\omega_{33}^3 + \ldots$$

(заметим, что деформации по собственным формам $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{W}_0$ для краткости не рассматриваются, а порядок функций q_k, p_k $(k \geq 3)$ не ниже $O\,(\varepsilon^3)$). Удерживая в (1.5) члены, не зависящие от ε, приходим к следующим системам уравнений:

$$\begin{cases} \omega_2' = \nu^{-1}\omega_*^{-1}A^{-1}M_2 - a_*\varepsilon^{-1}p_1'' \\ (1 + a_1)\, p_1'' + \sigma_1^2 p_1 = -a\varepsilon\omega_2' \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_1' = \nu^{-1}\omega_*^{-1}A^{-1}M_1 + a_*\varepsilon^{-1}q_1'' \\ (1 + a_1)\, q_1'' + \sigma_1^2 q_1 = \varepsilon a\omega_1' \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\omega_3' = 0 \Rightarrow \omega_{30} = \omega_{30}^\vee(0)/\omega_* = 1, \quad \sigma_k = \nu_k/\nu \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$a_* = a\rho_2 A^{-1}, \quad a_1 = -\rho_2 m^{-1} d_{12}^2, \quad a_1^\vee = a_1 - aa_*.$$

Подставляя в первую группу уравнений (2.3) вместо $\omega_2 \to \omega_{20}$, $p_1 \to \varepsilon p_{11}$ и разрешая относительно старшей производной, имеем:

$$(1 + a_1^\vee)\, p_{11}'' + \sigma_1^2 p_{11} = -ak\,(h_{21} \cos \mu\tau + h_{22} \sin \mu\tau)$$

Будем считать все переходные процессы по нормальным координатам закончившимся и рассматривать только вынужденные упругие колебания. При учете внутреннего трения в материале (по модели Е. С. Сорокина) модальная переменная p_{11} определяется как вещественная часть комплекснозначной переменной $p_1^\vee$, удовлетворяющей уравнению

$$(1 + a_1^\vee)\, p_1^{\vee\prime\prime} + \sigma_1^2\,(1 + i\varkappa_1)\, p_1^\vee = f_1^\vee \exp\,(i\mu\tau) + f_2^\vee \exp i\,(\mu\tau - \pi/2) \tag{2.4}$$

Функция $p_1^\vee$ ищется в виде $p_1^\vee = P_1 \exp\,(i\mu\tau)$, где P_1 — комплексная амплитуда, зависящая от μ и не зависящая от τ [2]. Из (2.4) следует, что:

$$P_1 = (f_1^\vee - if_2^\vee)(m_1^\vee - i\varkappa_1\sigma_1^2)/m_1^2, \quad f_i^\vee = -akh_{2i} \quad (i = 1, 2)$$

$$m_1^\vee = \sigma_1^2 - \mu^2\,(1 + a_1^\vee), \quad m_1^2 = m_1^{\vee 2} + \varkappa_1^2\sigma_1^4 \tag{2.5}$$

Согласно (2.5), переменная $p_{11}(\tau)$ равна

$$p_{11}(\tau) = \mathrm{Re}\,[P_1 \exp\,(i\mu\tau)] = \Phi_1 \cos \mu\tau + \Phi_2 \sin \mu\tau \tag{2.6}$$

$$\Phi_1 = -ak\,(h_{21}m_1^\vee - h_{22}\varkappa_1\sigma_1^2)\, m_1^{-2}, \quad \Phi_2 = -ak\,(h_{21}\varkappa_1\sigma_1^2 + h_{22}m_1^\vee)\, m_1^{-2}$$

Функция $\omega_{20}(\tau)$ имеет вид

$$\omega_{20}(\tau) = (f_1 \sin \mu\tau - f_2 \cos \mu\tau)/\mu, \quad f_i = kh_{2i} + a_*\mu^2\Phi_i \quad (i = 1, 2) \tag{2.7}$$

Решая вторую систему уравнений в (2.3) аналогично вышеизложенному, определим:

$$\omega_{10}(\tau) = (f_3 \sin \mu\tau - f_4 \cos \mu\tau)/\mu, \quad f_3 = kh_{11} - a_*\mu^2\Phi_3 \tag{2.8}$$

$$q_{11}(\tau) = \Phi_3 \cos \mu\tau + \Phi_4 \sin \mu\tau, \quad f_4 = kh_{12} - a_*\mu^2\Phi_4$$

$$\Phi_3 = ak\,(h_{11}m_1^{\vee} - h_{12}\varkappa_1\sigma_1^2)\, m_1^{-2}, \quad \Phi_4 = ak\,(h_{11}\varkappa_1\sigma_1^2 + h_{12}m_1^{\vee})\, m_1^{-2}$$

В коэффициенты f_i $(i = 1, \dots, 4)$ входят слагаемые порядка k и a_0k $(a_0 = aa_*)$. Величина a_0 пропорциональна отношению момента инерции $A^{\vee}$ упругой части относительно оси x_i $(i = 1, 2)$ к моменту инерции всей системы A. Если $A^{\vee} \ll A^{l}$, то $|a_0| \ll 1$ и влияние упругих элементов конструкции на движение спутника вокруг оси x_i при вибрациях незначительно. В противном случае при исследовании динамики системы необходимо учитывать податливость упругой конструкции. Из (2.7) и (2.8) видно, что максимальные значения составляющих угловых скоростей ω_{i0} $(i = 1, 2)$ для твердого КА определяются коэффициентом k. При резонансе вида $\mu^2 = \sigma_1^2/(1 + a_1^{\vee})$ и при малом внутреннем демпфировании (когда $\varkappa_1 \ll 1$) амплитуда упругих колебаний возрастает в $\varkappa_1^{-1}$ раз. При этом амплитуда угловых колебаний упругого КА как целого будет порядка $k\varkappa_1^{-1}A^{\vee}/A$, то есть увеличивается в $\varkappa_1^{-1}A^{\vee}/A$ раз по сравнению со случаем абсолютно твердого спутника.

Влияние упругих деформаций по собственным формам V_1 и W_1 на движение спутника вокруг оси x_3 проявляется уже в первом приближении по ε. Удерживая в (1.5) слагаемые порядка $O(\varepsilon)$, получим уравнение для функции $\omega_{31}(\tau)$ в виде

$$\omega_{31}' = a_7^{\vee}\,(p_{11}\omega_{10}' + q_{11}\omega_{20}') + (a_7^{\vee} - a^{\vee})(p_{11}'\omega_{10} + q_{11}'\omega_{20}) \tag{2.9}$$

$$a_7^{\vee} = \rho_2 a_7 C^{-1}, \quad a^{\vee} = \rho_2 a C^{-1}, \quad a_7 = b_{123} + b_{132}, \quad aa^{\vee} > 0$$

Отметим, что согласно формулам (2.6)—(2.8), имеют место следующие равенства:

$$q_{11}\omega_{20}' = (z_1 + z_3 \cos 2\mu\tau + z_5 \sin 2\mu\tau)/2, \quad z_1 = f_1\Phi_3 + f_2\Phi_4 \tag{2.10}$$

$$p_{11}\omega_{10}' = (z_2 + z_4 \cos 2\mu\tau + z_6 \sin 2\mu\tau)/2, \quad z_2 = f_3\Phi_1 + f_4\Phi_2, \quad z_3 = f_1\Phi_3 - f_2\Phi_4$$

$$q_{11}'\omega_{20} = (-z_1 + z_3 \cos 2\mu\tau + z_5 \sin 2\mu\tau)/2, \quad z_4 = f_3\Phi_1 - f_4\Phi_2, \quad z_5 = f_1\Phi_4 + f_2\Phi_3$$

$$p_{11}'\omega_{10} = (-z_2 + z_4 \cos 2\mu\tau + z_6 \sin 2\mu\tau)/2, \quad z_6 = f_3\Phi_2 + f_4\Phi_1$$

Перекрестные связи между осями вызывают отличие движения упругого спутника от движения абсолютно твердого. Вопрос о вековых изменениях во вращении системы решается усреднением правой части уравнения (2.9) по переменной $\vartheta = \mu\tau$ на отрезке $[0, \pi]$. После некоторых преобразований имеем:

$$\langle\omega_{31}'\rangle_\vartheta = n_1, \quad n_1 = a^{\vee}ak^2\varkappa_1\sigma_1^2\Delta_1/m_1^2, \quad \Delta_1 = h_{22}h_{11} - h_{12}h_{21} \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что при угловых вибрациях по осям x_1 и x_2 на ось x_3 упругого КА передается тормозящий (при $n_1 < 0$) или ускоряющий ($n_1 > 0$) момент вращения. Уравнение для функции $\omega_{11}(\tau)$ имеет вид (уравнение для ω_{21} аналогично):

$$\omega_{11}' = -\alpha_0\omega_{20}\omega_{30} + (a_7^* + a_*)\,\omega_{30}p_{11}', \quad a_7^* = \rho_2 a_7 A^{-1}, \quad \alpha_0 = (C - A)/A$$

Здесь гироскопические члены для твердого спутника сравнимы с возмущениями от центробежных моментов инерции, возникающие при упругих деформациях. В среднем по времени $\langle\omega_{11}'\rangle_\vartheta = \langle\omega_{21}'\rangle_\vartheta = 0$.

Кратко рассмотрим влияние деформаций по формулам $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{W}_2$ на величину ω_3, полагая для простоты, что $q_1 = p_1 = 0$. Из уравнений

$$p_2'' + \sigma_2^2 p_2 = \varepsilon^2 b\,(\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2), \quad q_2'' + \sigma_2^2 q_2 = -2\varepsilon^2 b\omega_{10}\omega_{20}, \quad b = b_{212}$$

следуют уравнения для переменных p_{22}, q_{22}:

$$p_{22}'' + \sigma_2^2 p_{22} = E_0 + E_1 \cos 2\mu\tau + E_2 \sin 2\mu\tau, \quad E_i = \mathrm{const} \tag{2.12}$$

(Уравнение для q_{22} получается заменой E_i на F_i $(i = 0, 1, 2)$). Решение (2.12) представляется при учете внутреннего трения в материале в виде суммы $p_{22} = p_{22}^* + p_{22}^\vee(\tau)$, где

$$p_{22}^* = E_0/\sigma_2^2, \quad p_{22}^\vee = \mathrm{Re}\, p_2^\vee$$

$$p_2^{\vee\,''} + \sigma_2^2 (1 + i\varkappa_2)\, p_2^\vee = E_1 \exp(i2\mu\tau) + E_2 \exp i\ (2\mu\tau = \pi/2)$$

В результате получаем выражения:

$$p_{22}^\vee(\tau) = D_1 \cos 2\mu\tau + D_2 \sin 2\mu\tau, \quad q_{22}^\vee(\tau) = H_1 \cos 2\mu\tau + H_2 \sin 2\mu\tau$$

$$D_1 = [E_1(\sigma_2^2 - 4\mu^2) - E_2\varkappa_2\sigma_2^2]/m_2^2, \quad D_2 = [E_1\varkappa_2\sigma_2^2 + E_2(\sigma_2^2 - 4\mu^2)]/m_2^2 \tag{2.13}$$

$$E_0 = b\,(f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 - f_4^2)/2\mu^2, \quad E_1 = b\,(f_2^2 + f_3^2 - f_1^2 - f_4^2)/2\mu^2$$

$$E_2 = b\,(f_3 f_4 - f_1 f_2)/\mu^2, \quad m_2^2 = (\sigma_2^2 - 4\mu^2)^2 + \varkappa_2^2\sigma_2^4$$

Коэффициенты H_i получаются из D_i заменой $E_i \to F_i$, где принято

$$F_0 = -b\,(f_1 f_3 + f_2 f_4)/\mu^2, \quad F_1 = -b\,(f_2 f_4 - f_1 f_3)/\mu^2, \quad f_1 = kh_{21} \tag{2.14}$$

$$F_2 = b\,(f_2 f_3 + f_1 f_4)/\mu^2, \quad f_2 = kh_{22}, \quad f_3 = kh_{11}, \quad f_4 = kh_{12}$$

Отметим, что если в левую часть (2.12) добавить слагаемое $\sigma_2^2\varkappa_2^\vee p_{22}'$, где $\varkappa_2^\vee = \varkappa_2/\mu^\vee$, и определить решение полученного уравнения при $\mu^\vee = 2\mu$, то оно совпадает с (2.13)—(2.14). Такая замена, следовательно, эквивалентна введению неупругого сопротивления, а $\varkappa_2^\vee$ можно считать эквивалентным коэффициентом внутреннего трения при циклических деформациях. Этот коэффициент является характеристикой только упругой среды, а зависит от частоты процесса и его введение справедливо для одночастотных колебаний или при рассмотрении колебаний в окрестности резонанса, когда происходит выделение одной из гармоник.

Слагаемые, зависящие от модальных переменных p_{22} и q_{22}, содержатся в третьем уравнении системы (1.5) в членах порядка $O(\varepsilon^3)$, а в первом и втором уравнениях (1.5) — в членах $\sim O(\varepsilon^2)$. Уравнение для функции ω_{33} имеет вид

$$\omega_{33}' = 2b^\vee\,[q_{22}(\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2) - 2p_{22}\omega_{10}\omega_{20}], \quad b^\vee = \rho_2 b C^{-1} \tag{2.15}$$

Усредняя правую часть (2.15) по переменной ϑ, получим

$$\langle\omega_{33}'\rangle_\vartheta = n_2, \quad n_2 = b^\vee b k^2 \varkappa_2 \sigma_2^2 \Delta_2/(\mu^4 m_2^2), \quad bb^\vee > 0 \tag{2.16}$$

$$\Delta_2 = 2\,(h_{11}h_{12} + h_{21}h_{22})(h_{22}h_{12} - h_{21}h_{11}) + (h_{11}h_{22} + h_{12}h_{21})(h_{22}^2 + h_{11}^2 - h_{21}^2 - h_{12}^2)$$

Отсюда вытекает, что вследствие деформаций вязкоупругой системы по формам $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{W}_2$ при угловых вибрациях по осям x_1 и x_2 вдоль оси x_3 наблюдается эффект, аналогичный отмеченному для собственных форм $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{W}_1$. Согласно формулам (2.11) и (2.16) знак коэффициентов n_i совпадает со знаком выражений Δ_i $(i = 1, 2)$. Используя (2.2) преобразуем их к виду:

$$\Delta_1 = h_1 h_2 \sin\Delta/h^2, \quad \Delta_2 = h_1 h_2 (h_1^2 + h_2^2)\sin\Delta/h^4, \quad \Delta = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{2.17}$$

Из (2.17) можно сделать следующий вывод. Когда сдвиг фаз осциллирующих моментов $\Delta > 0$, вращение системы в среднем по времени убыстряется; при $\Delta < 0$ — соответственно, замедляется. Когда h_1 или h_2 равны нулю (имеют место угловые вибрации по одной из осей) угловая скорость упругого спутника $\omega_3^{\vee}$ в среднем постоянна. Уравнение для составляющей ω_{12} будет:

$$\omega_{12}' = b_* \, [k\,(h_{11}\cos\mu\tau + h_{12}\sin\mu\tau)\,p_{22} + q_{22}\omega_{20}' + p_{22}'\omega_{10} + q_{22}'\omega_{20}], \quad b_* = 2b\rho_2 A^{-1}$$

Из этого уравнения и аналогичного ему уравнения для ω_{22} следует, что в приближении порядка $O(\varepsilon^2)$ к гармоническим членам частоты μ в функциях $\omega_i^{\vee}$ $(i = 1, 2)$ добавляются гармонические члены частоты 3μ. В среднем по времени они обнулятся.

3. Вибрации при наличии управляющего момента. Рассмотрим влияние угловых вибраций на движение упругого спутника под действием постоянного управляющего момента M, приложенного вдоль оси x_3. Получим аналитические выражения, позволяющие оценить величину отклонения угловой скорости такой системы от программной (для абсолютно твердого спутника). Пусть $\tau_* = \nu t_*$, где t_* — расчетное время действия момента M, а $\omega_* = C^{-1}Mt_*$ — угловая скорость недеформируемого спутника, которая достигается за время t_*, в предположении, что $\omega_3^*(0) = 0$. Так как за время t_* спутник повернется вокруг оси x_3 на конечный угол, то можно показать, что τ_*^{-1} является величиной порядка $O(\varepsilon)$, то есть $\tau_*^{-1} = \lambda\varepsilon$, где $\lambda \sim O(1)$. Полагая в (1.5) $M_1 = 0$, $M_2 = M\varepsilon_1\cos\mu\tau$, $M_3 = M$, $0 < \varepsilon_1 \ll 1$, получим, что составляющие угловой скорости ω_i представимы в виде следующих разложений:

$$\omega_1 = \varepsilon^3\omega_{13} + \varepsilon^7\omega_{17} + \ldots, \quad \omega_2 = \varepsilon\omega_{21} + \varepsilon^5\omega_{25} + \ldots, \quad \omega_3 = \varepsilon\omega_{31} + \varepsilon^5\omega_{35} + \ldots$$

$$q_1 = \varepsilon^4 q_{14} + \ldots, \quad p_1 = \varepsilon^2 p_{12} + \ldots, \quad p_2 = \varepsilon^4 p_{24} + \ldots, \quad q_2 = \varepsilon^6 q_{26} + \ldots$$

Выражения для $\omega_{21}(\tau)$ и $p_{12}(\tau)$ имеют такой же вид, как и в (2.6), (2.7). Функция ω_{31}, соответствующая вращению спутника как абсолютно твердого тела, равна: $\omega_{31} = \lambda\tau$ $(\lambda = M/C\omega_*^2)$. Удерживая в первом уравнении (1.5) члены $\sim O(\varepsilon^3)$ получим систему уравнений

$$\omega_{13}' = a_* q_{14}'' + a_7^* \,(\omega_{31}' p_{12} + p_{12}'\omega_{31}) + (1 - \alpha)\,\omega_{21}\omega_{31} + a_*\omega_{31}/p_{12}'$$

$$(1 + a_1)\,q_{14}'' + \sigma_1^2 q_{14} = a\omega_{13}' - a_6\,(2\omega_{31}p_{12}' + \omega_{31}'p_{12}) - a_7\omega_{21}\omega_{31}$$

$$\alpha = C/A, \quad a_7^* = a_7\rho_2 A^{-1}, \quad a_6 = a_1 + B_{1112} - BB_{1121} \tag{3.1}$$

Из (3.1) следует уравнение для $q_{14}^{\vee}$ вида:

$$(1 + a_1^{\vee})\,q_{14}^{\vee\prime\prime} + \sigma_1^2\,(1 + i\varkappa_1)\,q_{14} = (E_1 + E_2\tau)\exp(i\mu\tau) + \tag{3.2}$$

$$+ (E_3 + E_4\tau)\exp i\,(\mu\tau - \pi/2), \quad q_{14} = \operatorname{Re} q_{14}^{\vee}$$

$$E_1 = d_1\Phi_1, \quad E_2 = d_2\Phi_2 - d_3 f_2, \quad E_3 = d_1\Phi_2, \quad E_4 = -d_2\Phi_1 + d_3 f_1$$

$$d_1 = \lambda\,(a a_7^* - a_6), \quad d_2 = \lambda\mu\,[a\,(a_7^* + a_*) - 2a_6], \quad d_3 = [a\,(1 - \alpha) - a_7]\,\lambda/\mu$$

$$f_1 = \alpha\lambda\varepsilon_1 + a_*\mu^2\Phi_1, \quad f_2 = a_*\mu^2\Phi_2, \quad \Phi_1 = a\alpha\lambda\varepsilon_1 m_1^{\vee}/m_1^2$$

Подстановкой в (3.2) $q_{14}^{\vee} = (A_1 + A_2\tau)\exp(i\mu\tau)$ определим

$$q_{14}(\tau) = (R_1 + R_2\tau)\cos\mu\tau + (R_3 + R_4\tau)\sin\mu\tau, \quad R_2 = (E_2 m_1^{\vee} - E_4\varkappa_1\sigma_1^2)/m_1^2 \tag{3.3}$$

$$A_2 = [E_2 m_1^{\vee} - E_4\varkappa_1\sigma_1^2 - i\,(E_4 m_1^{\vee} + E_2\varkappa_1\sigma_1^2)]/m_1^2, \quad R_4 = (E_4 m_1^{\vee} + E_2\varkappa_1\sigma_1^2)/m_1^2$$

$$A_1 = [E_1 - iE_3 - 2i\mu(1 + a_1^\vee) A_2](m_1^\vee - i\varkappa_1\sigma_1^2)/m_1^2$$

$$R_1 \cos\mu\tau + R_3 \sin\mu\tau = \mathrm{Re}\,[A_1 \exp(i\mu\tau)]$$

Выражения для R_1 и R_3 в явном виде для краткости опускаются. С учетом (3.3) переменная $\omega_{13}(\tau)$ будет равна

$$\omega_{13}(\tau) = (r_1 + r_2\tau)\cos\mu\tau + (r_3 + r_4\tau)\sin\mu\tau$$

$$r_1 = \{a_*\mu\,[\lambda\Phi_2 + \mu(\mu R_3 + R_2)] - (1 - \alpha)\lambda f_2/\mu\}/\mu^2$$

$$r_3 = \{a_*\mu\,[\mu(R_4 - \mu R_1) - \lambda\Phi_1] + (1 - \lambda)\lambda f_1/\mu\}/\mu^2$$

$$r_2 = (a_7^* + a_*)\lambda\Phi_1 - (1 - \alpha)\lambda f_1/\mu^2 + a_*\mu R_4$$

$$r_4 = (a_7^* + a_*)\lambda\Phi_2 - (1 - \alpha)\lambda f_2/\mu^2 - a_*\mu R_2$$

Отличие движения упругого спутника относительно оси x_3 от программного описывается функцией ω_{35}, удовлетворяющей уравнению

$$\omega_{35}' = a_7^\vee(p_{12}\omega_{13}' + q_{14}\omega_{21}' - p_{12}\omega_{21}\omega_{31}) + (a_7^\vee - a^\vee)(p_{12}'\omega_{13} + q_{14}'\omega_{21}) \tag{3.4}$$

Опуская в правой части (3.4) периодические и смешанные члены, представим это уравнение в виде:

$$\omega_{35}' = N\tau + N_1 \Rightarrow \omega_{35}(\tau) = N\tau^2/2 + N_1\tau \tag{3.5}$$

$$N = -\lambda^2\alpha\varepsilon_1 a_7^\vee\Phi_2/2\mu - a^\vee S/2,\quad S = \mu(\Phi_2 r_2 - \Phi_1 r_4) - (f_1 R_2 + f_2 R_4)$$

$$N_1 = [a_7^\vee(S_1 + S_2/\mu) - a^\vee S_3]/2,\quad S_1 = \Phi_2 e_2 - \Phi_1 e_4$$

$$S_2 = f_1 R_4 - f_2 R_2,\quad S_3 = \mu(\Phi_2 r_1 - \Phi_1 r_3) + f_1(R_4/\mu - R_1) - f_2(R_3 + R_2/\mu)$$

$$e_1 = r_2 + \mu r_3,\quad e_2 = \mu r_4,\quad e_3 = r_4 - \mu r_1,\quad e_4 = -\mu r_2$$

Коэффициенты N и N_1 одного порядка $\sim O(\varepsilon_1^2)$. За время τ_* действия управляющего момента значение ω_{35} будет определяться в основном первым слагаемым в (3.5). Отклонение фактической угловой скорости от программной нарастает в среднем по времени пропорционально τ^2. Абсолютная величина отклонения за время $\tau = \tau_*$ будет порядка $O(\varepsilon^3)$. Относительная ошибка нарастает линейно со временем и за промежуток τ_* составит величину $\sim O(\varepsilon^3)$. Выражение для N можно преобразовать к виду

$$N = -\lambda^3\alpha^2\varepsilon_1^2\varkappa_1\sigma_1^2 a\,\{a^\vee(1 - \alpha) - a_7 + a^\vee m_1^\vee\mu^2\,[a(2a_7^* + a_*\alpha) - 2a_6]/m_1^2\}/(\mu m_1^2)$$

Отсюда следует, что при резонансе $\sigma_1^2 = \mu(1 + a_1^\vee)$ отклонение фактического движения от расчетного увеличивается в $\varkappa_1^{-1}$ раз (при малом $\varkappa_1$) по сравнению с безрезонансным случаем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сорокин Е. С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 123 с.
2. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
3. *Марков Ю. Г., Миняев И. С.* К динамике космического аппарата с упругими колеблющимися массами//Космические исследования. 1991. Т. 29. Вып. 5. С. 685—694.

Москва

Поступила в редакцию
23.IV.1993