МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1994

УДК 531.391.5

 Е. Я. РОЙТЕНБЕРГ

# К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Теория стабилизации управляемых движений [1] является развитием проблемы устойчивости движения [2—4] в применении к теории управляемых систем и представляет собой интенсивно развивающийся раздел теории управляемых процессов [5—7]. В публикуемой работе выделен класс нелинейных управляемых систем, для которых найдены управления, разрешающие задачу о стабилизации. Решение задачи основано на развитии идей из [8—10].

1. Рассмотрим управляемый объект, возмущенное движение которого описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} x_k + \psi_j (x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t) + \sum_{l=1}^{r} B_{jl} u_l \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_{j0} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\psi_j (x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t) = \sum_{l=1}^{r} \varphi_{jl} (x_1, \ldots, x_n, t)\, u_l +$$

$$+ \Phi_j (x_1, \ldots, x_n, t) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Здесь $x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ — фазовые координаты системы, $u_l$ $(l = 1, \ldots, r)$ — приложенные к системе управления. В векторной форме система (1) имеет следующий вид:

$$\dot{x} = Ax + \psi (x, u, t) + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

$$\psi (x, u, t) = \varphi (x, t) + \Phi (x, t)$$

$$x = \mathrm{col}\,(x_1, \ldots, x_n), \quad u = \mathrm{col}\,(u_1, \ldots, u_r)$$

$$A = \|A_{jk}\| \quad (j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, n); \quad B = \|B_{jl}\|$$

$$(j = 1, \ldots, n; l = 1, \ldots, r)$$

$$\psi (x, u, t) = \mathrm{col}\,(\psi_1 (x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r t), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t))$$

$$\varphi (x, t) = \|\varphi_{jl} (x_1, \ldots, x_n, t)\| \quad (j = 1, \ldots, n; l = 1, \ldots, n)$$

$$\Phi (x, t) = \mathrm{col}\,(\Phi_1 (x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, \Phi_n (x_1, \ldots, x_n, t))$$

Начальный вектор $x_0$ системы (2) считается известным: $x_0 = \mathrm{col}\,(x_{10}, \ldots$ $\ldots, x_{n0})$ — постоянный вектор.

Предполагается, что $n$-мерная вектор-функция $\psi (x, u, t)$ определена в области $\Gamma = \{(t, x) \mid \|x\| < G, t \geq 0\}$ и удовлетворяет условию $\psi (0, 0, t) = 0$, т. е. система (2) допускает невозмущенное движение $x = 0$. Предполагаем, что $n$-мерная вектор-функция управления $u (x, t)$ непрерывна в области $\Gamma$ и удовлетворяет условию $u(0, t) = 0$. Никаких априорных ограничений на $\|u(x, t)\|$ не накладывается.

Далее считается, что вектор-функции $\psi(x, u, t)$ и $u(x, t)$ удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование и единственность решения $x(t)$, $0 \le t < \infty$, уравнения (2) при любых начальных условиях $(t_0, x(t_0))$ из области Г.

Ставится задача об определении управления $u = u^0(x, t)$, такого, что невозмущенное движение $x(t) = 0$, в силу уравнения (2), при $u = u^0(x, t)$ будет асимптотически устойчивым, т. е. задача о стабилизации невозмущенного управляемого движения $x(t) = 0$ в силу системы (2).

Наряду с системой (2) рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{\zeta} = A\zeta + Bv, \quad \zeta(t_0) = \zeta_0 \tag{3}$$

Здесь $\zeta = \mathrm{col}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ — $n$-мерный вектор фазового состояния системы (3), $v = \mathrm{col}(v_1, \ldots, v_n)$ — $r$-мерный вектор управления, ограничения на который априорно не накладываются. Начальный вектор $\zeta_0 = \mathrm{col}(\zeta_{10}, \ldots, \zeta_{n0})$ предполагается известным. Предположим, что система (3) вполне управляема [11]. Тогда

$$\mathrm{rank}\,(BAB \ldots A^{n-1}B) = n \tag{4}$$

Для системы (3) найдем управление $v = v^p(\zeta, t)$, доставляющее минимум квадратичному функционалу

$$I(\ldots) = \int_0^\infty [\langle\zeta, Q\zeta\rangle + \langle v, Rv\rangle]\, dt$$

где $Q$-$(n \times n)$ и $R$-$(r \times r)$ — положительно определенные постоянные матрицы, и обеспечивающее асимптотическую устойчивость невозмущенного движения в силу системы (3), т. е. такое управление $v^p(\zeta, t)$, которое обеспечивало бы оптимальную, в указанном смысле, стабилизацию невозмущенного движения системы (3).

Как показано в [10], при выполнении условия (4) в качестве управления $v^p(\zeta, t)$ можно взять

$$v^p(\zeta, t) = -R^{-1}B^*K\zeta \tag{5}$$

где $K$ — постоянная, симметрическая, положительно определенная $(n \times n)$-матрица, являющаяся решением матричного алгебраического уравнения $KA + A^*K - KBR^{-1}B^*K + Q = 0$. При этом невозмущенное движение $\zeta(t) = 0$ в силу системы $\dot{\zeta} = A\zeta + Bv^p(\zeta, t)$ будет асимптотически устойчивым.

Найдем теперь условия, гарантирующие совпадение траекторий систем (2) и (3). Обозначим решение системы (3) при начальном условии $\zeta_0$ и управлении $v^p(\zeta, t)$ через $\zeta^0(t)$. Вектор-функция $\zeta^0(t)$ удовлетворяет условию $\lim \|\zeta^0(t)\| = 0$ при $t \to \infty$. Пусть теперь для векторов $x_0$ и $\zeta_0$ имеет место равенство $x_0 = \zeta_0$. Рассмотрим вектор $z = x - \zeta$. Тогда вектор-функция $z(t)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{z} = Az + \psi(x, u, t) + Bu - Bv, \quad z(t_0) = 0 \tag{6}$$

Из теоремы о единственности решения задачи Коши можно заключить, что если выполнены условия

$$v = v^0(\zeta, t) = v^0, \quad 0 \le t < \infty \tag{7}$$

где $v^0(\zeta, t)$ определяется равенством (5):

$$F(u, v^0, \zeta^0, t) = Bu - Bv^0 + \psi(\zeta^0, u, t) \equiv 0, \quad 0 \le t < \infty \tag{8}$$

то решение уравнения (6) при нулевом начальном условии будет следующим: $z(t) \equiv 0$, $0 \le t < \infty$, т. е. будет иметь место соотношение $x(t) \equiv \zeta^0(t)$, $0 \le t < \infty$, и следовательно, $\lim \|x(t)\| = 0$ при $t \to \infty$.

2. Из изложенного следует, что если эквивалентная матричному уравнению (8) система скалярных уравнений $F_j(u_1, \ldots, u_r, \vartheta_1^0, \ldots, \vartheta_r^0, \zeta_1^0, \ldots, \zeta_n^0, t) = \sum B_{jl}u_l - \sum B_{jl}\vartheta_l^0 + \psi_j(\zeta_1^0, \ldots, \zeta_n^0, u_1, \ldots, u_r, t) = 0$ $(l = 1, \ldots, r)$ разрешима относительно неизвестных управлений $u_1, \ldots, u_r$, то задача о стабилизации системы (1) разрешима. Удовлетворяющие этим уравнениям управления $u_1 = u_1^0, \ldots, u_r = u_r^0$ стабилизируют систему (1).

Условия разрешимости уравнений относительно неизвестных $u_1, \ldots, u_r$, таким образом, будут достаточными условиями стабилизируемости невозмущенного движения $x_j(t) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ системы (1). Имеет место теорема.

*Теорема.* Для разрешимости задачи о стабилизации невозмущенного движения $x_j(t) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ управляемой нелинейной системы (1) достаточно выполнения следующих условий: ранг матрицы $W = (BAB \ldots A^{n-1}B)$ равен $n$: $\operatorname{rank} W = n$; у матрицы $B$ существуют $s = n - r$ строк, все элементы которых равны нулю $B_{\nu_1 l} = 0$, $B_{\nu_2 l} = 0, \ldots, B_{\nu_1 l} = 0$ $(l = 1, \ldots, r)$; ранг матрицы $B$ равен $r$: $\operatorname{rank} B = r$; в системе (1) уравнения, для которых $j = \nu_1, \ldots, j = \nu_1$ не содержат нелинейных сил, т. е. элементы $\psi_{\nu_1}$, $\psi_{\nu_2} \ldots, \psi_{\nu_s}$, вектора $\psi$ равны нулю: $\psi_{\nu_1} = 0$, $\psi_{\nu_2} = 0, \ldots,$ $\psi_{\nu_s} = 0$; якобиан системы функций $F_{\sigma_1}$, $F_{\sigma_2}, \ldots, F_{\sigma_r}$ (представляющих собой левые части уравнений (9), не равные тождественно нулю) по переменным $u_1, \ldots, u_r$ не равен нулю ни при каком значении $0 < t < \infty$: $D(F_{\sigma_1}, F_{\sigma_2}, \ldots, F_{\sigma_r})/D(u_1, \ldots, u_r) \neq 0$

Таким образом, при выполнении условий теоремы найдено управление $u^0 = u^0(x, t)$, разрешающее задачу о стабилизации. При найденном управлении $u^0$ область притяжения для системы (2), т. е. множество начальных векторов $x_0$, при которых невозмущенное движение $x(t) = 0$ системы (2) с управлением $u^0$ асимптотически устойчиво, совпадает с областью Г.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений//*Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С. 475—514.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
3. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
4. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
5. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
6. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
7. *Формальский А. М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.
8. *Ройтенберг Е. Я.* Об достаточном условии управляемости нелинейных систем//Вестн. МГУ. Математика, механика. 1969. № 1. С. 28—33.
9. *Ройтенберг Е. Я.* Наблюдаемость дискретных систем//Материалы Всесоюз. симпоз. по оптимальному управлению и дифференциальным играм. Тбилиси: Мецниереба, 1977. С. 247—250.
10. *Ройтенберг Е. Я.* Наблюдение недоступных прямому измерению координат нелинейных динамических объектов//Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высш. шк., 1990. Вып. 20. С. 128—137.
11. *Kalman R.* Contributions to the theory of optimal control//Bol. Soc. Mat. Mexicana. Ser. 2. 1960. V. 5. No. 1. P. 102—119.



Москва

Поступила в редакцию
22.I.1992