

УДК 539.3

© 1994 г. А. Ю. ВИНОГРАДОВ, Ю. И. ВИНОГРАДОВ

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДА ПРОГОНКИ С. К. ГОДУНОВА ДЛЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Показано, что в методе операция ортогонализации вектора частного решения к другим векторам не является необходимой и сохраняется ортогонализация только векторов, образующих фундаментальную систему решений. Это сокращает вычислительные процедуры и время счета.

Предложен способ сокращения вычислений при решении задач с разными вариантами поверхностной, массовой или тепловой нагрузки.

Начальные векторы для численного интегрирования разрешающей системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений предлагается определять с помощью присущей методу процедуры ортонормирования системы векторов. При этом исходная система уравнений может быть записана относительно не имеющих физического смысла функций, через которые выражаются физические параметры задачи, и краевые условия могут иметь общий вид различных зависимостей физических параметров.

1. Расчет оболочечных элементов и конструкций из них часто сводится к решению краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся жесткими

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + f(x) \quad (1.1)$$

$$BY(0) = b \quad (1.2)$$

$$DY(1) = d \quad (1.3)$$

Здесь $Y(x)$, $f(x)$ — вектор-функции размерности n ; $A(x)$, B , D — матрицы соответственно размерностей $n \times n$, $(n-r) \times n$, $r \times n$ рангов соответственно n , $(n-r)$, r ; b , d — векторы размерностей соответственно $(n-r)$, r .

Для решения таких задач широко используется метод ортогональной прогонки Годунова [1—5], в соответствии с которым решение ищется в виде

$$Y(x) = Y_0(x) + \sum_{i=1}^r c_i Y_i(x) \quad (1.4)$$

Здесь $Y_0(x)$ — частное решение неоднородной системы (1.1); $Y_i(x)$ — линейно независимые решения системы (1.1) при $f(x) \equiv 0$, т. е. однородной системы. Решение в виде (1.4) должно удовлетворять условиям на крае $x=0$, от которого выполняется интегрирование, при любых значениях констант $c_1, \dots, c_r$.

2. В матричной записи (1.4) имеет вид $Y(x) = Yc$, где $Y = \|Y_1(x), \dots, Y_r(x), Y_0(x)\|$ — матрица размерности $n \times (r+1)$; $c = \{c_1, \dots, c_r, 1\}^T$ — вектор-столбец констант.

В соответствии с методом в конце каждого участка интервала интегрирования векторы Y_0 , Y_i , $i=1, \dots, r$ подвергаются процедуре ортогонализации $Y = ZW$, где $W = \|w_j\|$ — верхнетреугольная матрица размерности $(r+1) \times (r+1)$; $Z = \|z_1, \dots, z_r, z_0\|$ — матрица с ортогональными столбцами, первые r из которых нормированы [2—5].

Помимо ортогонализации и нормирования по процедуре Грамма — Шмидта

векторов Y_i , $i=1, \dots, r$, образующих фундаментальную систему решений, к получаемой системе векторов ортогонализируется без нормирования и вектор частного решения Y_0 .

Видно, что этот вектор не нормируется для удобства, чтобы на любом участке коэффициент при векторе Y_0 сохранялся равным единице, т. е. чтобы оставался равным единице последний элемент вектора s . Из этого следует, что $w_{(r+1), (r+1)} = 1$.

Однако операция ортогонализации вектора частного решения Y_0 к другим векторам Y_i , $i=1, \dots, r$ не является необходимой, т. к. он не имеет при себе неизвестной константы в силу того, что этот вектор не входит в фундаментальную систему решений.

Таким образом, предлагается ортогонализировать только векторы Y_i , $i=1, \dots, r$, образующие фундаментальную систему решений.

Тогда последние столбцы матриц Y и Z будут совпадать, а последний столбец матрицы W вместо вида $\{w_{(r+1), 1}, \dots, w_{(r+1), (r+1)}, 1\}^T$ на любом участке будет иметь вид

$$\{0, \dots, 0, 1\}^T \quad (2.1)$$

и теперь его не надо вычислять, как и последний столбец матрицы Z .

3. Ортогонализация только векторов, образующих фундаментальную систему решений, приводит как к сокращению времени счета, так и к значительному удобству при решении задач строительной механики, когда приходится анализировать состояние конструкции или ее элементов при различных вариантах поверхностной, массовой или тепловой нагрузки.

В этом случае приходится решать краевые задачи для системы (1.1) с различными правыми частями $f(x)$.

Для решения таких задач не следует повторять расчет с начала для каждой новой вектор-функции нагрузки $f(x)$. В этом случае большую часть вычислений — вычисление первых r столбцов матриц Y , Z , W для всех участков интервала интегрирования следует выполнить один раз при прямом ходе прогонки при решении задачи для первой вектор-функции нагрузки $f(x)$ и запомнить для использования при других $f(x)$.

Полученные результаты могут быть использованы для любой другой вектор-функции нагрузки $f(x)$ потому, что не зависят от $f(x)$, а зависят только от геометрии и свойств материала конструкции (ее элемента), т. е. от матрицы $A(x)$ системы (1.1), а также от условий на крае $x=0$, т. к. этим условиям должно удовлетворять выражение (1.4).

Таким образом, для любой новой вектор-функции нагрузки $f(x)$ необходимо заново выполнить только меньшую часть прямого хода и обратный ход прогонки, а наиболее длительная часть расчета — вычисление и ортонормирование векторов, образующих фундаментальную систему решений, выполняется только один раз.

Если ортогонализировать все столбцы матрицы Z (включая вектор частного решения), то при каждом новом векторе $f(x)$ при прямом ходе пришлось бы пересчитывать последние векторы всех матриц Y , Z , W при каждом новом векторе $f(x)$ для каждого участка интервала интегрирования.

Если ортогонализировать только векторы, образующие фундаментальную систему решений, то для нового вектора $f(x)$ придется пересчитывать только последний столбец матрицы Y , т. к. последние столбцы матриц Y , Z совпадают, а последний столбец матрицы W имеет вид (2.1). Это делает процедуру расчета более наглядной и уменьшает время счета.

4. Как отмечалось выше, решение в виде (1.4) должно удовлетворять условиям на крае $x=0$ при любых значениях констант $c_1, \dots, c_r$. Это достигается за счет определенных значений начальных векторов $Y_i(0)$, $i=0, 1, \dots, r$, являющихся начальными значениями вектор-функций $Y_i(x)$, $i=0, 1, \dots, r$, образующих (1.4).

Необходимые начальные векторы $Y_i(0)$, $i=0, 1, \dots, r$ очевидны только в

простейшем случае, когда все элементы искомой вектор-функции $Y(x)$ являются различными искомыми физическими параметрами задачи, т. е. когда система (1.1) имеет канонический вид, и когда краевые условия заданы на отдельные физические параметры. В этом случае матрицы B и D имеют только по одному ненулевому элементу в любой строке и поэтому запись краевых условий в матричном виде (1.2), (1.3) не имеет смысла.

Во многих задачах строительной механики краевые условия являются сложными, имея смысл упругого опирания, когда задаются зависимости между перемещениями и силовыми факторами, а ненулевые векторы b и d соответствуют реакции деформирования упругой опоры от предварительного поджатия. Краевые условия имеют аналогичный вид в задачах анализа отдельных элементов конструкций, когда сопряженные элементы конструкций учитываются через их коэффициенты влияния. При этом система (1.1) может быть записана не в каноническом виде, а относительно любых вспомогательных функций, которые могут не иметь физического смысла, выражаясь через физические параметры и их производные [6].

В этих случаях матричная форма записи (1.2), (1.3) краевых условий является наиболее естественной и начальные векторы $Y_i(0)$, $i = 0, 1, \dots, r$ являются неочевидными.

Определить требуемые начальные векторы $Y_i(0)$, $i = 0, 1, \dots, r$ можно используя процедуру ортонормирования векторов, свойственную методу ортогональной прогонки.

Для этого построим невырожденную матрицу G размерности $n \times n$, первыми строками которой выберем строки матрицы B . Остальные $(n - r)$ строк матрицы G могут быть получены различными путями. Например, исходя из того, что число различных физических параметров, на которые могут быть заданы краевые условия, равно размерности n разрешающей системы (1.1) и того, что различные ФП выражаются линейно независимыми строками коэффициентов при элементах искомой вектор-функции $Y(x)$. Это означает, что существует n таких линейно независимых строк, которые могут быть использованы как строки матрицы G .

Имея матрицу G , запишем систему линейных алгебраических уравнений

$$GY(0) = u \quad (4.1)$$

или в блочном виде

$$\begin{pmatrix} B \\ \dots \\ R \end{pmatrix} Y(0) = \begin{pmatrix} b \\ \dots \\ e \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

где R — матрица, содержащая последние r строк матрицы G , e — неизвестный вектор размерности r .

Известно [7], что система линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей коэффициентов, например, (4.2) может быть преобразована к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений с ортонормированными строками матрицы коэффициентов $QY(0) = h$ или в блочном виде

$$\begin{pmatrix} Q_B \\ \dots \\ Q_R \end{pmatrix} Y(0) = \begin{pmatrix} h_b \\ \dots \\ h_e \end{pmatrix}$$

где Q_B, Q_R — матрицы размерностей $(n - r) \times n$, $r \times n$ рангов $(n - r)$, r соответственно; h_b, h_e — векторы размерностей $(n - r)$, r .

Если ортонормирование строк матрицы G выполняется последовательно, начиная с первой [7], то могут быть вычислены элементы матрицы Q (матриц Q_B, Q_R) и вектора h_b . Элементы вектора h_e не могут быть вычислены, так как необходимые для этого элементы вектора e неизвестны.

Построение матрицы Q_B и вектора h_b выполняется эквивалентным преобра-

зованием первых $(n - r)$ строк системы (4.1). Эти строки содержат уравнение (1.2). Следовательно, полученное уравнение

$$Q_B Y(0) = h_b \quad (4.3)$$

есть эквивалентная запись краевых условий при $x = 0$.

Имея матрицы Q_B , Q_R и вектор h_b , построим начальные векторы.

За начальные векторы $Y_i(0)$, $i = 1, \dots, r$ примем соответственно i -е транспонированные строки матрицы Q_R , т. е. $(i + (n - r))$ -е строки матрицы Q : $Y_i(0) = \{q_{ji}, \dots, q_{jn}\}^T$ ($i = 1, \dots, r$, $j = i + (n - r)$).

За начальный вектор $Y_0(0)$ примем следующую линейную комбинацию транспонированных строк матрицы Q_B , т. е. первых $(n - r)$ строк матрицы Q :

$$Y_0(0) = \sum_{i=1}^{(n-r)} (h_{bi} \{q_{ji}, \dots, q_{jn}\}^T)$$

где h_{bi} — i -й элемент вектора $h_b = \{h_{b1}, \dots, h_{bn}\}^T$.

Построенные таким образом начальные векторы линейно независимы, т. к. они ортогональны.

При $Y(x)$ в виде (1.4) и построенных начальных векторах уравнение (4.3) и, следовательно, эквивалентное ему уравнение (1.2) удовлетворяются при любых значениях констант $c_1, \dots, c_r$. В этом легко убедиться, если при $x = 0$ подставить построенные начальные векторы $Y_i(0)$, $i = 0, 1, \dots, r$ в выражение (1.4), а (1.4) подставить в выражение (4.3). При этом учитывается, что начальные векторы $Y_i(0)$, $i = 0, 1, \dots, r$ и матрица Q_B состоят из ортонормированных строк матрицы Q .

Таким образом, для определения необходимых начальных векторов предлагается использовать присущую методу С. К. Годунова процедуру ортонормирования системы векторов — строк системы линейных алгебраических уравнений.

5. Рассмотрим статический изгиб круговой цилиндрической оболочки. Один край оболочки заделан, а другой край, свободный от закрепления, нагружен сосредоточенной радиальной силой P .

Разрешающее дифференциальное уравнение общей моментной теории для круговой цилиндрической оболочки имеет вид [6]:

$$c^2 (\nabla^2 \nabla^2 + 2\nabla^2 + 1) \nabla^2 \nabla^2 F - 2c^2 (1 - \nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \right) \nabla^2 F + \\ + (1 - \nu^2) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} F - \frac{(1 - \nu^2) h}{12Ec^2} Z = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$$

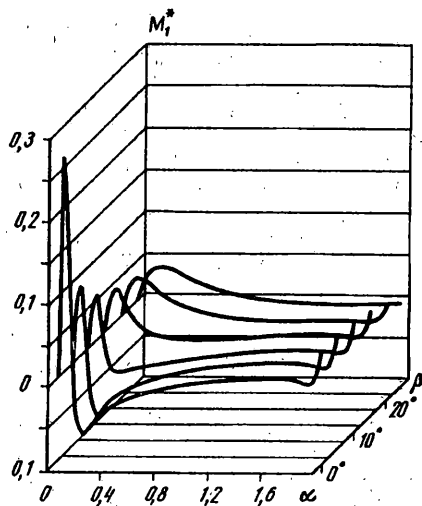
где $F = F(\alpha, \beta)$ — искомая вспомогательная функция продольной α и окружной β координат, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, h и R — толщина и радиус оболочки, $c^2 = h^2 / (12R^2)$, $Z = Z(\alpha, \beta)$ — нормальная к поверхности оболочки внешняя распределенная нагрузка;

Все физические параметры оболочки выражаются через искомую вспомогательную функцию $F(\alpha, \beta)$ и ее частные производные.

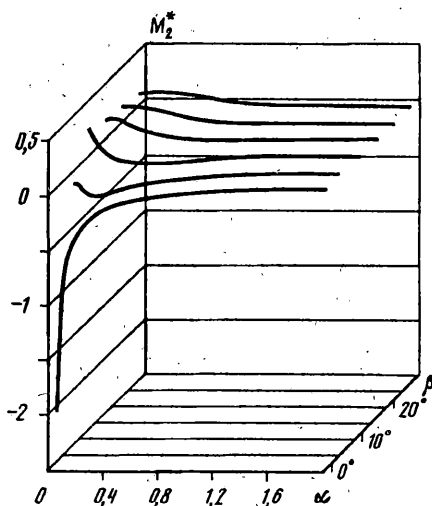
Для приведения задачи к виду (1.1)–(1.3) переменные были разделены использованием ряда Фурье по окружной координате β . Удержаны гармоники с 0 по 100 включительно, так как сравнение частичных сумм показало, что приведенные результаты при большем количестве удерживаемых гармоник не уточняются.

Для каждой гармоники сравнивались решения, получаемые с выполнением ортогонализации вектора частного решения неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и без этой операции. Полученные в обоих случаях решения полностью совпали.

Для оболочки с параметрами $R/h = 200$, $L/R = 2$, где L — длина оболочки,



Фиг. 1



Фиг. 2

на фиг. 1, 2 показаны графики безразмерных продольного $M_1^* = \pi M_1 / P$ и окружного $M_2^* = \pi M_2 / P$ изгибающих моментов. Координаты α , β отсчитываются от точки приложения радиальной сосредоточенной силы P .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1961. Т. 1. Вып. 3 (99). С. 171—174.
2. Conte S. D. The numerical solution of linear boundary value problems. — Siam Review, 1966. Vol. 8. N. 3. P. 239—244.
3. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 376 с.
4. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
5. Грибанов В. Ф., Крохин И. А., Паничкин Н. Г. и др. Прочность, устойчивость и колебания термонапряженных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 368 с.
6. Власов В. З. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1. 528 с.
7. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. 640 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.IX.1993