

УДК 539.3

© 1994 г. В. В. ВЛАСОВ

ОДНОСЛОЙНЫЕ И МНОГОСЛОЙНЫЕ ПОЛОСЫ И ПЛИТЫ ПОД ЛОКАЛЬНЫМИ НАГРУЗКАМИ

Способ расчета однослойных и многослойных плоских плит и полос в одинарных и двойных тригонометрических рядах с использованием формы записи решения по методу начальных функций был предложен В. З. Власовым [1, 2]. Для задач с разрывными граничными условиями решения в рядах неудобны для использования, поскольку представление внешних нагрузок в форме рядов Фурье приводит к рядам с плохой сходимостью или расходящимся.

Ниже предлагается определять напряженно-деформированное состояние в многослойных полосах или плитах в случае плоской задачи теории упругости путем суперпозиции двух решений. Первое из них отвечает решению для неограниченной полуплоскости. Оно удовлетворяет заданным разрывным граничным условиям и определяется вначале в форме одинарных тригонометрических рядов. С использованием формул суммирования рядов это решение представляется в замкнутом аналитическом виде для однослойной полосы или для наружного слоя многослойной полосы, к которому приложена разрывная нагрузка. Второе решение находится в форме одинарных рядов таким образом, чтобы в суммарном решении удовлетворялись все граничные условия по противоположным краям полосы для первоначальной задачи. Оно имеет улучшенную сходимостью, поскольку существующие разрывы в граничных условиях устраняются первым аналитическим решением.

1. Рассмотрим неограниченную пластину — полуплоскость $y \geq 0$, вдоль прямой границы $y = 0$ которой приложена с периодом $2l$ произвольная нормальная нагрузка $q(x)$ (плоское напряженное состояние). Решение этой симметричной периодической задачи для компонент перемещений u , v и напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в одинарных тригонометрических рядах имеет вид [3]:

$$Gu = \frac{l}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - n\eta \right) q_n e^{-n\eta} \sin n\xi \quad (1)$$

$$Gv = \frac{l}{2\pi} \left[(1-\nu) \eta q_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{1+\nu} + n\eta \right) q_n e^{-n\eta} \cos n\xi \right]$$

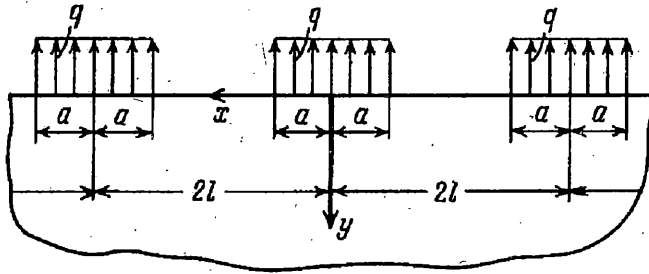
$$\sigma_y = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (1+n\eta) q_n e^{-n\eta} \cos n\xi, \quad \sigma_x = \nu q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (1-n\eta) q_n e^{-n\eta} \cos n\xi$$

$$\tau_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty} n\eta q_n e^{-n\eta} \sin n\xi, \quad \xi = \frac{\pi x}{l}, \quad \eta = \frac{\pi y}{l}$$

где G — модуль сдвига материала пластины, ν — коэффициент Пуассона. Для периодической нагрузки q , равномерно распределенной вдоль участков границы длиной $2a$, $a < l$ (фиг. 1) коэффициенты Фурье q_n принимают значения

$$q_0 = \frac{\alpha q}{\pi}, \quad q_n = \frac{2q}{\pi n} \sin n\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi a}{l} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2)$$

Приведем известные формулы суммирования функциональных рядов



Фиг. 1

$$F_0(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\eta} \sin n\xi = \operatorname{arctg} \frac{\sin \xi}{e^{\eta} - \cos \xi}$$

$$\Phi_0(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\eta} \cos n\xi = \frac{1}{2} \{ \eta - \ln [2 (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)] \}$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} = \frac{\partial F_0}{\partial \eta} = - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\eta} \sin n\xi = - \frac{\sin \xi}{2 (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)} \quad (3)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial \xi} = - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\eta} \cos n\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} - 1 \right)$$

В первой формуле имеется в виду главное значение обратной тригонометрической функции.

С учетом этих выражений напряжения в полуплоскости $\eta > 0$ находятся в замкнутом аналитическом виде

$$\sigma_y = \frac{q}{\pi} \left[\alpha + 2 \left(1 - \eta \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi_A \right], \quad \tau_{xy} = - \frac{2q}{\pi} \eta \frac{\partial \Phi_A}{\partial \xi}$$

$$\sigma_x = \frac{q}{\pi} \left[\nu \alpha + 2 \left(1 - \eta \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi_A \right] \quad (4)$$

$$\Phi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\eta}}{n} \sin n\alpha \cos n\xi = \frac{1}{2} (F_{02} - F_{01})$$

Функции F_{01} и F_{02} определяются по первой формуле (3) при замене аргумента ξ соответственно на $\xi - \alpha$ и $\xi + \alpha$:

$$F_{01} = F_0(\xi - \alpha, \eta), \quad F_{02} = F_0(\xi + \alpha, \eta) \quad (5)$$

Приведем также решение для полуплоскости от сосредоточенных сил P приложенных на ее границе $\eta = 0$, нормально к ней с интервалом $2l$. Последнее находится как частный случай выражений (1), (2), считая, что длина $2a$ отрезка приложения наружки q стремится к нулю, а нормальная сила $P = 2qa$ остается конечной величиной. Совершая в формулах (2) указанный предельный переход, найдем

$$q_0 = P/2l, \quad q_n = P/l \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty) \quad (6)$$

На основании (1) с учетом (3), (6) получим искомые зависимости для перемещений и напряжений в полуплоскости как в форме рядов, так и в замкнутом аналитическом виде

$$Gu = \frac{P}{2\pi} \left(- \frac{1-\nu}{1+\nu} F_0 + \eta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \right)$$

$$\begin{aligned}
 Gv &= \frac{P}{2\pi} \left(\frac{1-\nu}{2} \eta - \frac{2}{1+\nu} \Phi_0 - \eta \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right) \\
 \sigma_y &= \frac{P}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \eta^2} \right), \quad \sigma_x = \frac{P}{\pi} \left(\frac{\nu}{2} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \eta^2} \right) \\
 \tau_{xy} &= \frac{P}{\pi} \eta \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \eta^2}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Приведенные решения относились к плоскому напряженному состоянию. Для плоской деформации плиты соответствующие решения, как известно, получаются формальной заменой в них коэффициента Пуассона ν на $\nu/(1-\nu)$. При этом согласно (1) изменятся только зависимости для перемещений.

2. Введем для компонент перемещений и напряжений обозначения: $U_1 = u(x, y)$, $U_2 = v(x, y)$, $U_3 = \sigma_y(x, y)$, $U_4 = \tau_{xy}(x, y)$, $U_5(x, y) = \sigma_x(x, y)$. Первые четыре функции представляют собой компоненты вектора перемещений и вектора напряжений на площадке с нормалью y . Эти функции, определенные при $y = 0$, называются начальными функциями. Обозначим их градусом в верхнем индексе.

Удобно, см. [1, 2], определить общее решение симметричной периодической задачи для полосы в одинарных тригонометрических рядах по методу начальных функций, принимая в соответствии с (1) начальные функции в форме рядов

$$U_1^\circ = \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}^\circ \sin n\xi, \quad U_2^\circ = u_{20}^\circ + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}^\circ \cos n\xi \tag{8}$$

$$U_3^\circ = u_{30}^\circ + \sum_{n=1}^{\infty} u_{3n}^\circ \cos n\xi, \quad U_4^\circ = \sum_{n=1}^{\infty} u_{4n}^\circ \sin n\xi$$

где $u_{1n}^\circ, u_{2n}^\circ, u_{3n}^\circ, u_{4n}^\circ$ — постоянные коэффициенты. В таком случае

$$u = U_1(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}(\eta) \sin n\xi$$

$$v = U_2(\xi, \eta) = u_{20}^\circ + \frac{(1-\nu)l}{2\pi G} \eta u_{30}^\circ + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(\eta) \cos n\xi$$

$$\sigma_y = U_3(\xi, \eta) = u_{30}^\circ + \sum_{n=1}^{\infty} u_{3n}(\eta) \cos n\xi$$

$$\tau_{xy} = U_4(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{4n}(\eta) \sin n\xi \tag{9}$$

$$\sigma_x = U_5(\xi, \eta) = \nu u_{30}^\circ + \sum_{n=1}^{\infty} u_{5n}(\eta) \cos n\xi$$

где функции $u_{in}(\eta)$ находятся через коэффициенты в рядах для начальных функций (8):

$$u_{in}(\eta) = \sum_{j=1}^4 K_{ij}^{(n)}(\eta) u_{jn}^\circ \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \tag{10}$$

Функции $K_{ij}^{(n)}(\eta)$ в совокупности представляют собой матрицу размерности 4×5 для каждого номера n :

$$K_{11}^{(n)} = K_{44}^{(n)} = \operatorname{ch} n\eta + \frac{1+\nu}{2} n\eta \operatorname{sh} n\eta$$

$$\begin{aligned}
K_{12}^n &= -K_{34}^{(n)} = 1/2 [(1 - \nu) \operatorname{sh} n\eta + (1 + \nu) n\eta \operatorname{ch} n\eta] \\
K_{13}^n &= -K_{24}^{(n)} = \frac{(1 + \nu) l}{4\pi G} \eta \operatorname{sh} n\eta \\
K_{14}^n &= \frac{l}{4\pi G} \frac{1}{n} [(3 - \nu) \operatorname{sh} n\eta + (1 + \nu) n\eta \operatorname{ch} n\eta] \\
K_{21}^n &= -K_{43}^{(n)} = 1/2 [(1 - \nu) \operatorname{sh} n\eta - (1 + \nu) n\eta \operatorname{ch} n\eta] \\
K_{22}^n &= K_{33}^n = \operatorname{ch} n\eta - \frac{1 + \nu}{2} n\eta \operatorname{sh} n\eta \\
K_{23}^n &= \frac{l}{4\pi G} \frac{1}{\pi} [(3 - \nu) \operatorname{sh} n\eta - (1 + \nu) n\eta \operatorname{ch} n\eta] \\
K_{31}^n &= -K_{42}^{(n)} = -(G/l)(1 + \nu) n^2 \pi \eta \operatorname{sh} n\eta \\
K_{32}^n &= (G/l)(1 + \nu) \pi n (\operatorname{sh} n\eta - n\eta \operatorname{ch} n\eta) \\
K_{41}^n &= K_{52}^n = (G/l) (1 + \nu) \pi n (\operatorname{sh} n\eta + n\eta \operatorname{ch} n\eta) \\
K_{51}^n &= (G/l) (1 + \nu) \pi n (2 \operatorname{ch} n\eta + n\eta \operatorname{sh} n\eta) \\
K_{53}^n &= \nu \operatorname{ch} n\eta + 1/2 (1 + \nu) n\eta \operatorname{sh} n\eta \\
K_{54}^n &= 1/2 [(3 + \nu) \operatorname{sh} n\eta + (1 + \nu) n\eta \operatorname{ch} n\eta]
\end{aligned} \tag{11}$$

Первые четыре зависимости (10) для произвольного номера n можно рассматривать как преобразование четырехмерного вектора $f_n^{(0)}$, компонентами которого являются коэффициенты основных расчетных величин, определенные при $\eta = 0$, или начальные параметры, к значениям того же вектора f_n при произвольном η . Это преобразование осуществляется матрицей начальных параметров $K^{(n)}$ из коэффициентов $K_{ij}^{(n)}(\eta)$ (11). В векторной форме

$$f_n = K^{(n)}(\eta) f_n^{(0)} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \tag{12}$$

3. Рассмотрим многослойную полосу, или плиту (фиг. 2). Обозначим через h_j , G_j , ν_j соответственно толщину, модуль сдвига и коэффициент Пуассона произвольного j -го слоя. Будем считать, что слои склеены между собой. При этом перемещения u , v и напряжения σ_x , τ_{xy} , рассматриваемые как компоненты четырехмерного вектора, изменяются непрерывно при переходе через границы слоев.

Напряженно-деформированное состояние в первом слое полосы, $0 < \eta < \eta_1$ ($\eta_1 = \pi h_1/l$, $2l$ — длина пролета полосы) разыскиваем согласно (9), где с учетом ортогональности тригонометрических функций на участке $0 \leq \xi \leq \pi$ коэффициенты $u_{in}(\eta)$ $i = (1-4)$ определяются через начальные параметры u_{in}^0 векторным соотношением (12):

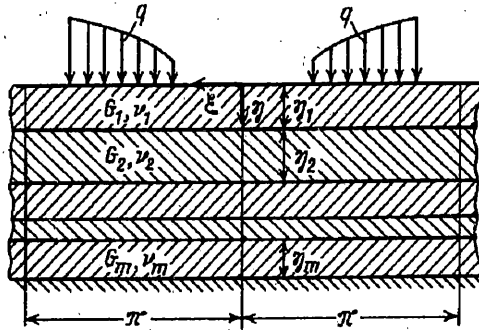
$$f_n^{(1)}(\eta) = K^{(n)}(\eta, G_1, \nu_1) f_n^{(0)} \tag{13}$$

Отсюда при $\eta = \eta_1$ получим вектор $f_n^{(1)}(\eta_1)$ на границе первого и второго слоев. Принимая его компоненты за начальные параметры для второго слоя полосы, найдем коэффициенты основных расчетных величин внутри второго слоя

$$f_n^{(2)}(\eta) = K^{(n)}(\eta^*, G_2, \nu_2) f_n^{(1)}(\eta_1)$$

или с учетом (13):

$$f_n^{(2)}(\eta) = K^{(n)}(\eta^*, G_2, \nu_2) K^{(n)}(\eta_1, G_1, \nu_1) f_n^{(0)} \tag{14}$$



Фиг. 2

Здесь переменная $\eta^* = \eta - \eta_1$ изменяется в пределах $0 < \eta^* < \eta_2$ ($\eta_2 = \pi h_2/l$). Далее последовательно находим коэффициенты основных расчетных величин в третьем, четвертом и других слоях полосы.

Для произвольного j -слоя $0 < \eta^* < \eta_j$ ($\eta_j = \pi h_j/l$) получим

$$f_n^{(j)}(\eta) = K^{(n)}(\eta^*, G_j, \nu_j) K^{(n)}(\eta_{j-1}, G_{j-1}, \nu_{j-1}) \dots K^{(n)}(\eta_1, G_1, \nu_1) f_n^{(0)}$$

Таким образом коэффициенты основных расчетных величин $u_{in}(\eta)$ в j -ом слое полосы, отвечающие произвольному номеру n в рядах, определяются через начальные параметры u_{in}^0 путем последовательного умножения вектора из начальных параметров на матрицы начальных параметров $K^{(n)}(\eta_k, G_k, \nu_k)$ всех предыдущих слоев и j -го слоя $K^{(n)}(\eta^*, G_j, \nu_j)$. Искомое напряженно-деформированное состояние в j -ом слое полосы найдется сложением состояний, отвечающих различным значениям n согласно (9).

4. Рассмотрим однослойную неограниченную полосу, по верхнему продольному краю которой $y = h$ приложена постоянная нормальная нагрузка $q = -q^*$ и опирающуюся по нижнему краю $y = 0$ на одинаковые опоры шириной $2a$, расположенные с интервалом $2l$ (фиг. 3). Реакцию со стороны опоры приближенно считаем постоянной на ее ширине. Касательные силы на опорах не учитываются. Граничные условия на участке половины пролета полосы записываются в виде

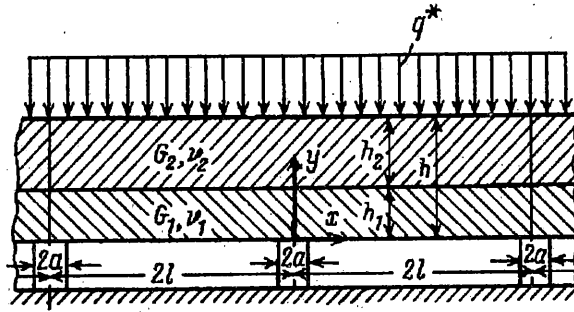
$$\tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad \sigma_y|_{y=0} = \begin{cases} -q^*l/a, & 0 < x < a \\ 0, & a < x < l \end{cases}$$

$$\sigma_y|_{y=h} = -q^*, \quad \tau_{xy}|_{y=h} = 0 \quad (15)$$

Для расчета воспользуемся суперпозицией двух решений. За первое из них, обозначаемое верхним индексом 1, примем зависимости (1), (2), (4) для полуплоскости, где величину q следует заменить на $-q^*l/a$. Второе решение, обозначаемое верхним индексом 2, разыскиваем на основе общих зависимостей в рядах (9). Начальные функции U_3^0 и U_4^0 , соответствующие компонентам вектора напряжений этого решения, обращаются в нуль, поскольку граничные условия при $y = 0$ удовлетворяются первым решением (4). Две другие начальные функции U_1^0 и U_2^0 , отвечающие компонентам перемещений, найдем из граничных условий при $\eta = \eta_1$ ($\eta_1 = \pi h/l$) для суммарного решения

$$[\sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}]_{\eta=\eta_1} = -q^*, \quad [\tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}]_{\eta=\eta_1} = 0 \quad (16)$$

Раскрывая их с помощью зависимостей (1), (2), (9) с учетом ортогональности тригонометрических функций, придем для каждого члена ряда к двум уравнениям относительно начальных параметров u_{1n}^0 и u_{2n}^0 неизвестных начальных функций второго решения



Фиг. 3

$$K_{31}^{(n)}(\eta_1) u_{1n}^{\circ} + K_{32}^{(n)}(\eta_1) u_{2n}^{\circ} = 2 \frac{q^*}{\alpha n} (1 + n\eta_1) e^{-m_1} \sin \alpha x$$

$$K_{41}^{(n)}(\eta_1) u_{1n}^{\circ} + K_{42}^{(n)}(\eta_1) u_{2n}^{\circ} = 2 \frac{q^*}{\alpha} \eta_1 e^{-m_1} \sin \alpha x, \quad \alpha = \frac{\pi a}{l}$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots, \infty)$$

Отсюда находим

$$u_{1n}^{\circ} = \gamma_n n \eta_1 [2 \operatorname{sh} n \eta_1 + n \eta_1 (\operatorname{sh} n \eta_1 - \operatorname{ch} n \eta_1)]$$

$$u_{2n}^{\circ} = \gamma_n [\operatorname{sh} n \eta_1 (n^2 \eta_1^2 - n \eta_1 - 1) + (1 + n \eta_1) \operatorname{ch} n \eta_1]$$

$$\gamma_n = \frac{2q^* l}{\alpha G (1 + \nu) \pi n^2 (n^2 \eta_1 - \operatorname{sh}^2 n \eta_1)} e^{-m_1} \sin \alpha x \quad (17)$$

Искомые зависимости для напряжений в полосе определяется сложением решений (4), (9) с учетом (17).

5. Рассмотрим аналогичную задачу для двухслойной многопролетной полосы (фиг. 3). Как и выше воспользуемся суперпозицией двух решений. На основании зависимостей (1), (2), при $\eta = \eta_1$, $\eta_1 = \pi h_1 / l$, получим значения коэффициентов векторов напряжений и перемещений для произвольного n -го члена ряда первого решения на границе слоев полосы

$$u_{1n}^I(\eta_1) = -\frac{q^* l}{\pi \alpha G_1} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu} + n \eta_1 \right) e^{-m_1} \sin \alpha x$$

$$u_{2n}^I(\eta_1) = \frac{q^* l}{\pi \alpha G_1} \frac{1}{n^2} \left(\frac{2}{1 + \nu} + n \eta_1 \right) e^{-m_1} \sin \alpha x$$

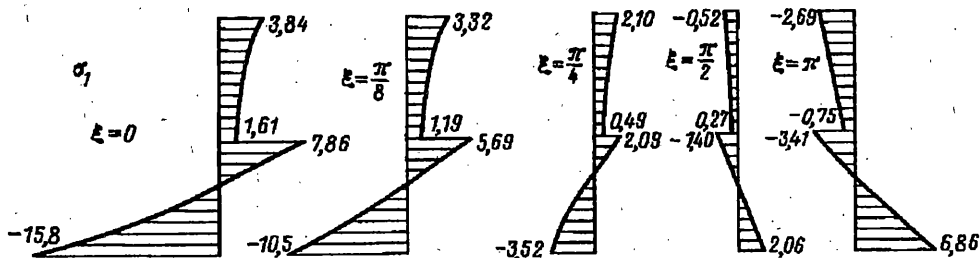
$$u_{3n}^I(\eta_1) = -\frac{2q^*}{\alpha} \left(\frac{1}{n} + \eta_1 \right) e^{-m_1} \sin \alpha x, \quad u_{4n}^I = -\frac{2q}{\alpha} \eta_1 e^{-m_1} \sin \alpha x$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots, \infty)$$

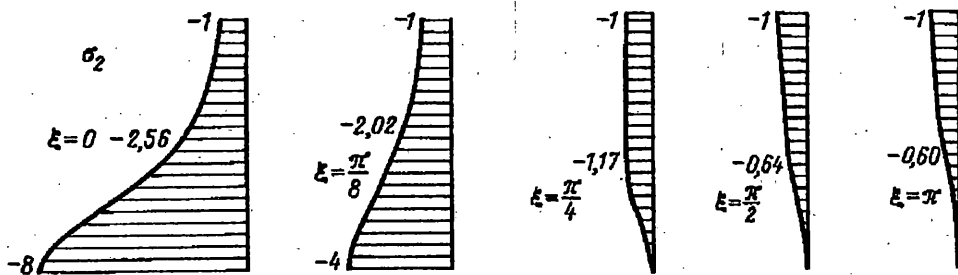
Принимая эти величины за начальные параметры для второго слоя, найдем коэффициенты первого решения по верхнему краю полосы $\eta^* = \eta_2$ ($\eta_2 = \pi h_2 / l$)

$$u_{1n}^I(\eta_2) = \sum_{j=1}^4 K_{ij}^{(n)}(\eta_2, G_2, \nu_2) u_{jn}^I(\eta_1) \quad (18)$$

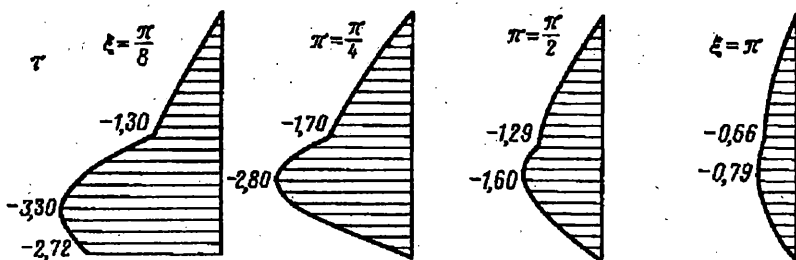
Во втором решении, определяемом в форме рядов (9), две начальные функции $U_3^{\circ 2}$ и $U_4^{\circ 2}$, отвечающие компонентам вектора напряжений, обращается в нуль, поскольку граничные условия (15) при $\eta = 0$ удовлетворяются первым решением.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

С учетом сказанного в соответствии с (10) найдем коэффициенты перемещений и напряжений второго решения в первом слое $0 < \eta < \eta_1$:

$$u_{in}^{(2)}(\eta) = K_{1i}^{(n)}(\eta) u_{1n}^{\circ 2} + K_{2i}^{(n)}(\eta) u_{2n}^{\circ 2} \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

Согласно (14) найдем коэффициенты основных расчетных величин во втором слое ($0 < \eta^* < \eta_2$) для произвольного n -го члена ряда второго решения

$$u_{in}^{(2)}(\eta^*) = \sum_{j=1}^4 K_{ij}^{(n)}(\eta^*, G_2, v_2) \sum_{k=1}^2 K_{jk}^{(n)}(\eta_1, G_1, v_1) u_{kn}^{\circ 2} \quad (19)$$

Из граничных условий (15) по верхнему краю полосы (фиг. 3) получим

$$u_{3n}^{(1)}(\eta_2) + u_{3n}^{(2)}(\eta_2) = 0, \quad u_{4n}^{(1)}(\eta_2) + u_{4n}^{(2)}(\eta_2) = 0$$

Отсюда с помощью (18), (19) определим значения начальных параметров $u_{1n}^{\circ 2}$, $u_{2n}^{\circ 2}$ второго решения. В итоге найдем искомое напряженно-деформированное состояние многопролетной двухслойной полосы.

Приведем здесь только зависимости для напряжений. В первом слое полосы $0 < \eta < \eta_1$:

$$\sigma_y = -q^* \left[1 + \frac{2}{\alpha} \left(1 - \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \Phi_A + \sum_{n=1}^{\infty} [K_{31}^{(n)}(\eta) u_{1n}^{\circ 2} + K_{32}^{(n)}(\eta) u_{2n}^{\circ 2}] \cos n\xi \right]$$

$$\sigma_x = -\frac{2q^*}{\alpha} \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \Phi_A + \sum_{n=1}^{\infty} [K_{31}^{(n)}(\eta) u_{1n}^{\circ 2} + K_{32}^{(n)}(\eta) u_{2n}^{\circ 2}] \cos n\xi$$

$$\tau_{xy} = \frac{2q^*}{\alpha} \eta \frac{\partial \Phi_A}{\partial \xi} + \sum_{n=1}^{\infty} [K_{41}^{(n)}(\eta) u_{1n}^{\circ 2} + K_{42}^{(n)}(\eta) u_{2n}^{\circ 2}] \sin n\xi$$

Во втором слое полосы $0 < \eta^* < \eta_2$:

$$\sigma_y = -q^* + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^4 K_{3j}^{(n)}(\eta^*, G_2, \nu_2) \sum_{k=1}^3 K_{jk}^{(n)}(\eta_1, G_1, \nu_1) (u_{kn}^{\circ 1} + u_{kn}^{\circ 2}) \right] \cos n\xi$$

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^4 K_{3j}^{(n)}(\eta^*, G_2, \nu_2) \sum_{k=1}^3 K_{jk}^{(n)}(\eta_1, G_1, \nu_1) (u_{kn}^{\circ 1} + u_{kn}^{\circ 2}) \right] \cos n\xi$$

$$\tau_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^4 K_{4j}^{(n)}(\eta^*, G_2, \nu_2) \sum_{k=1}^3 K_{jk}^{(n)}(\eta_1, G_1, \nu_1) (u_{kn}^{\circ 1} + u_{kn}^{\circ 2}) \right] \sin n\xi$$

В первом слое полосы первое решение определяется в замкнутом аналитическом виде, а второе — в форме рядов. Во втором слое оба решения — в форме рядов.

На фиг. 4—6 приведено распределение безразмерных напряжений σ_1 , σ_2 и τ ($\sigma_x = q^* \sigma_1$, $\sigma_y = q^* \sigma_2$, $\tau_{xy} = q^* \tau$) в поперечных сечениях двухслойной полосы. Для полосы принимается $a = l/8$, $h_1 = h_2 = l/4$, $G_2/G_1 = 0,25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Изменение нормальных продольных σ_1 и поперечных σ_2 напряжений (фиг. 4, 5) приведено в пяти сечениях полосы $\xi = 0, \pi/8, \pi/4, \pi/2, \pi$; касательных напряжений τ (фиг. 6) — в четырех сечениях $\xi = \pi/8, \pi/4, \pi/2$ и $3\pi/4$. Особым точкам решения соответствуют точки, расположенные на границе полосы $\eta = 0$ у краев опор, $\xi = \pm \pi/8 \pm 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots, \infty$), где внешняя нагрузка терпит разрыв непрерывности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В. В. Метод начальных функций в задачах равновесия толстых многослойных плит. Изв. АН СССР. ОТН. № 7. 1958. С. 40—48.
2. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 492 с.
3. Власов В. В. Неограниченные пластины, нагруженные локальными нагрузками в своей плоскости // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1985. Вып. 26. С. 247—265.

Москва

Поступила в редакцию
3.III.1993