МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1994

УДК 539.3

© 1994 г. Ю. Д. КОПЕЙКИН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

В вещественных переменных даны элементы теории потенциалов для ортотропных изгибаемых пластинок: фундаментальное решение и интегральное представление типа формулы Бетти. Изучено поведение потенциалов в точках граничного контура; получены формулы скачка. Составлены интегральные уравнения основных краевых задач.

Дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластинки получено в [1, 2] при введении гипотезы нормального элемента

$$\left[c_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\,(c_{12} + 2c_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + c_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] w = \frac{q}{I}, \quad I = \frac{h^3}{12} \tag{1}$$

Здесь w — прогиб срединной поверхности пластинки, q — плотность поперечной нагрузки, c_{ij} — постоянные упругости материала, h — толщина пластинки.

Внутренние погонные усилия пластинки выражены через прогибы w:

$$\begin{gathered} M_x = -I\left(c_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -I\left(c_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ Q_x = -I\left[c_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (c_{12} + 2c_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \\ Q_y = -I\left[(c_{12} + 2c_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + c_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right], \quad H = -2Ic_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{gathered} \tag{2}$$

В сечении, нормаль которого имеет направляющие косинусы n_x, n_y, возникают усилия:

$$\begin{gathered} M_n = n_x^2 M_x + 2n_x n_y H + n_y^2 M_y, \quad M_t = (n_x^2 - n_y^2)\,H + n_x n_y\,(M_y - M_x) \\ V = n_x Q_x + n_y Q_y - \partial M_t / \partial t \end{gathered} \tag{3}$$

где t — касательная к сечению, V — обобщенная поперечная сила.

Вообразим бесконечную пластинку, занимающую всю плоскость xOy. Положим, что в произвольной точке приложена единичная сосредоточенная сила. Решение уравнения (1) при такой нагрузке называется фундаментальным решением. Выпишем найденное фундаментальное решение w^*, которое соответствует единичной силе, приложенной в начале координат

$$\begin{gathered} w^* = \frac{A}{4\gamma_1\gamma_2}\left\{ \gamma_2 \left[(\gamma_1^2 y^2 - x^2)(\ln r_1^2 - 3) + 4\gamma_1 xy \operatorname{arctg} \frac{\gamma_1 y}{x} \right] - \right. \\ \left. - \gamma_1 \left[(\gamma_2^2 y^2 - x^2)(\ln r_2^2 - 3) + 4\gamma_2 xy \operatorname{arctg} \frac{\gamma_2 y}{x} \right] \right\} \end{gathered} \tag{4}$$

$$r_1^2 = x^2 + \gamma_1^2 y^2, \quad r_2^2 = x^2 + \gamma_2^2 y^2, \quad A = \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2}{2\pi c_{11} I (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}$$

Через γ_1 и γ_2 обозначены вещественные постоянные, вычисляемые по формуле

$$\gamma = \frac{1}{c_{22}} \left[(c_{12} + 2c_{66}) \pm \sqrt{(c_{12} + 2c_{66})^2 - c_{11}c_{22}} \right] \tag{5}$$

Чтобы решение (4) соответствовало силе, приложенной в произвольной точке $P(x_0, y_0)$, нужно сдвинуть начало координат на вектор OP и написать в (4) вместо координат x, y точки наблюдения Q проекции расстояния OP: $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$.

Для дальнейшего понадобятся выражения третьих производных от решения w^* по координатам x и y:

$$\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} = Ax \left(\frac{1}{\gamma_2 r_2^2} - \frac{1}{\gamma_1 r_1^2} \right), \quad \frac{\partial^3 w^*}{\partial x \partial y^2} = Ax \left(\frac{\gamma_1}{r_1^2} - \frac{\gamma_2}{r_2^2} \right) \tag{6}$$

$$\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2 \partial y} = Ay \left(\frac{\gamma_2}{r_2^2} - \frac{\gamma_1}{r_1^2} \right), \quad \frac{\partial^3 w^*}{\partial y^3} = Ay \left(\frac{\gamma_1^3}{r_1^2} - \frac{\gamma_2^3}{r_2^2} \right)$$

Проведем мысленно замкнутый контур T и вырежем область S, которую будет занимать пластинка конечных размеров. На крае T её возникают погонные усилия M_n^*, M_t^*, V^*, соответствующие фундаментальному решению w^* и вычисляемые по формулам (2), (3).

Применим к указанной конечной пластинке теорему о взаимных работах Бетти, считая w^*, dw^*/dn, M_n^*, V^* элементами вспомогательного состояния. Для прогиба $w(P)$ основного состояния нагружения получим интегральное представление такого же вида как и для изотропной пластинки

$$w(P) = \int_T \Big[w^*(P, Q)\, V(Q) + \frac{dw^*}{dn_Q}(P, Q)\, M_n(Q) - M_n^*(P, Q) \frac{dw}{dn_Q}(Q) -$$

$$- V^*(P, Q)\, w(Q) \Big] dt_Q + \int_S w^*(P, Q)\, q(Q)\, ds_Q, \quad P \in S \tag{7}$$

Интегралы в правой части (7) называют потенциалами пластинки. Четыре из них имеют слабую особенность ядер, они сходятся как несобственные интегралы. Только потенциал, называемый сдвиговым, имеет ядро $V^*(P, Q)$, выражаемое через производные (6), то есть сингулярное ядро. Обозначим через $U(P)$ сдвиговой потенциал,

$$U(P) = -\int_T V^*(P; Q)\, w(Q)\, dt_Q \tag{8}$$

При пересечении точкой P границы T области потенциал (8) имеет разрыв первого рода. В точке разрыва имеются три значения: прямое значение $U(P_0)$ и два предельных значения $U^{\pm}(P_0)$ (изнутри области S и извне). Прямое значение определено как главное значение Коши сингулярного интеграла:

$$U(P_0) = -\,\mathrm{v.p.} \int_T V^*(P, Q)\, w(Q)\, dt_Q \tag{9}$$

Предельные значения вычисляются по формуле скачка

$$U^{\pm}(P_0) = \pm\, {}^1\!/\!_2\, w(P_0) + U(P_0) \tag{10}$$

Для доказательства формулы (10) находим сначала предельные значения сингулярных интегралов с ядрами вида (6), состоящих из следующих сингулярных интегралов:

$$J_x = \int_T \varkappa(Q) \frac{x}{r^2} dt_Q, \quad J_y = \int_T \varkappa(Q) \frac{y}{r^2} dt_Q \quad (r = r_1, r = r_2) \tag{11}$$

Предельные значения интегралов (11):

$$J_x^{\pm}(P_0) = \pm \varkappa(P_0) \gamma\pi n_x(P_0)/C + J_x(P_0)$$

$$J_y^{\pm}(P_0) = \pm \varkappa(P_0) \pi n_y(P_0)/\gamma C + J_y(P_0)$$

$$\gamma = \gamma_1, \ \gamma = \gamma_2, \ C = \gamma^2 n_x^2 + n_y^2 \tag{12}$$

Здесь $\varkappa(P_0)$ — значение плотности потенциала в предельной точке, $J_x(P_0)$ и $J_y(P_0)$ — прямые значения интегралов.

Производная по нормали n к контуру T изгибного потенциала обозначена через $W(P)$:

$$W(P) = -\int_T \frac{dM_n^*}{dn_P} \frac{dw}{dn_Q} dt_Q \tag{13}$$

Интеграл (13) является также сингулярным в точке P_0. Для его предельных значений получена формула

$$W^{\pm}(P_0) = \pm 1/2 dw(P_0)/dn + W(P_0) \tag{14}$$

где $W(P_0)$ — прямое значение.

На основании формул (10), (14) в случае граничных точек P_0 получим следующие тождества Бетти:

$$\frac{1}{2} w(P_0) = \int_T \left(Vw^* + M_n \frac{dw^*}{dn_Q} - M_n^* \frac{dw}{dn_Q} - V^* w \right) dt_Q + \int_S qw^* ds_Q$$

$$\frac{1}{2} \frac{dw}{dn}(P_0) = \int_T \left(V \frac{dw^*}{dn_P} + M_n \frac{d^2 w^*}{dn_P dn_Q} - \frac{dM_n^*}{dn_P} \frac{dw}{dn_Q} - \frac{dV^*}{dn_P} w \right) dt_Q + \int_S q \frac{dw^*}{dn_P} ds_Q \tag{15}$$

Тождества (15) не отличаются от таковых для изотропной пластинки, но под w^* понимаем фундаментальное решение (4). Для составления интегральных уравнений краевых задач тождества (15) можно [3] использовать непосредственно.

В самом деле из четырех граничных значений w, dw/dn, M_n, V два задаются граничными условиями, а остающиеся два можно численно найти путем решения системы интегральных уравнений.

Пусть, например, пластинка шарнирно закреплена по всему контуру T и изгибается заданной нагрузкой q. На T имеем граничные условия $w = 0$, $M_n = 0$. Подставив эти значения в (15), получим систему интегральных уравнений относительно dw/dn и V:

$$\int_T \left(Vw^* - \frac{dw}{dn} M_n^* \right) dt + \int_S qw^* ds \tag{16}$$

$$\frac{1}{2} \frac{dw}{dn} - \int_T \frac{d}{dn} \left(Vw^* - \frac{dw}{dn} M_n^* \right) dt - \int_S q \frac{dw^*}{dn} ds$$

Уравнения (16) отличаются только ядрами от уравнений, составленных [3] для изотропной пластинки. В литературе разработаны и реализованы численные методы решения уравнений типа (16), поэтому здесь не рассматриваются свойства и степень получаемой точности решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
3. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.XII.1992