

УДК 624.07:534.1

© 1994 г. Л. А. МОВСИСЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГОГО РАЗНОМОДУЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКЕ

Изучается устойчивость стержня, когда осевая нагрузка с постоянной скоростью движется с одного конца в сторону другого. Материал стержня наследственно упругий и по-разному сопротивляется растяжению и сжатию. Определяются критические времена. В зависимости от того, когда сообщено возмущение, будут различные времена потери устойчивости.

1. Пусть один конец стержня из вязкоупругого материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию, закреплён, а другой свободен (первый случай) или закреплён (второй случай). С первого конца с постоянной скоростью s движется постоянная нагрузка P_0 в сторону второго. Нагрузка всегда направлена по оси стержня (фиг. 1). Движение медленное и инерционные члены не учитываются.

В первом случае в части стержня, где прошла нагрузка ($0 \leq x \leq ct$), действует сжимающая сила P_0 , в оставшейся части стержень свободен от напряжения.

Во втором случае в части $0 \leq x \leq ct$ имеет место неизвестная сжимающая сила $P_1(t)$, а в оставшейся — растягивающая $P_2(t)$. Займемся определением этих величин. Необходимые уравнения и условия

$$P_1 = E^- F(1 - \Gamma_-^*) \varepsilon_1, \quad P_2 = E^+ F(1 - \Gamma_+^*) \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \partial u_i / \partial x \quad (1.1)$$

$$u_1 = 0 \quad (x = 0), \quad u_2 = 0 \quad (x = l) \quad (1.2)$$

$$u_1 = u_2, \quad P_1 = P_2 - P_0 \quad (x = ct)$$

Здесь E^+, E^- — модули упругости при растяжении и сжатии соответственно, операторы Γ_+^*, Γ_-^* — характеризуют наследственные свойства [1].

Из (1.1) и (1.2) определение P_1 и P_2 сводится к интегральному уравнению следующего вида:

$$P_1 [E^- (l - ct) + E^+ ct] + \int_0^t [E^- (l - ct) K^+ (t - \tau) + \\ + E^+ ct K^- (t - \tau)] P_1 (\tau) d\tau = -E^- (l - ct) P_0 \left[1 + \int_0^t K^+ (t - \tau) d\tau \right] \quad (1.3)$$

где $K^\pm(t)$ — ядра операторов $K^\pm$, обратных операторам $\Gamma_\pm^* - (1 - \Gamma_\pm^*) = (1 + K_\pm^*)^{-1}$.

Замкнутое решение (1.3) можно записать только для среды типа Максвелла $K^\pm(t) = \gamma^\pm = \text{const}$. Оно имеет вид

$$P_1 = \exp \left(- \int_0^t F dz \right) \left[-P_0 + \int_0^t \Phi \exp \left(\int_0^z F d\xi \right) dz \right] \quad (1.4)$$

$$F = f - \frac{f'}{f}, \quad \Phi = \varphi' - \varphi \frac{f'}{f}, \quad f = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \quad \varphi = \frac{\varphi_3}{\varphi_1}$$

$$\varphi_1 = E^- (l - ct) + E^+ ct, \quad \varphi_2 = E^- (l - ct) \gamma^+ + E^+ ct \gamma^-$$

$$\varphi_3 = E^- P_0 (ct - l)(1 + \gamma^+ t)$$

Более удобное для практики решение можно получить приближенным путем. Из (1.3) можно получить замкнутое решение также при определенных предположениях относительно $E^\pm$ и $K^\pm(t)$.

В частности, для упругого материала имеем

$$P_1 = - \frac{E^- (l - ct)}{\varphi_1(t)} P_0, \quad P_2 = \frac{E^+ ct}{\varphi_1(t)} P_0 \quad (1.5)$$

а для обычного одномодульного материала

$$P_1 = P_0 \left[-1 + \frac{2ct}{l} + \frac{c}{\gamma l} (e^{-\gamma t} - 1) \right] \quad (1.6)$$

для материала типа Максвелла

$$P_1 = P_0 \left[-1 + \frac{ct}{l} + \frac{\gamma c}{\alpha l (\gamma + \alpha)} - \frac{c}{\alpha l} e^{-\alpha t} + \frac{c}{l (\alpha + \gamma)} e^{-(\alpha + \gamma)t} \right] \quad (1.7)$$

Для типичного материала $K(t) = \gamma e^{-\alpha t}$.

Следует отметить, что, если нагрузка фиксированная [2], при однородном материале величины упругой и вязкоупругой P_i одинаковые. Из (1.6) и (1.7) видно, что при однородном (одномодульном) материале вязкоупругая P_i меньше по абсолютному значению, чем упругая. В общем случае она может быть как меньше, так и больше. В [3] рассмотрена упругая устойчивость разномодульного стержня, когда сила приложена в его середине.

2. Займемся устойчивостью этих систем в предположении, что стержень сделан из материала стандартного типа. Уравнения устойчивости для различных частей стержня не будем записывать в отдельности, а поступим как в [2, 4]. В общем виде уравнение запишем следующим образом:

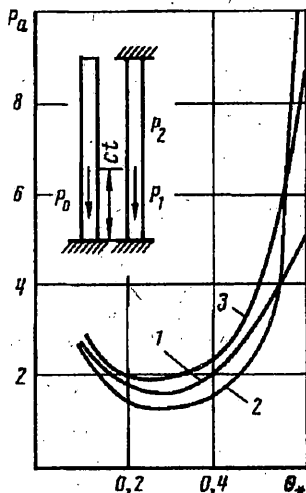
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E^v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.1)$$

Для конкретных задач расшифруем значение оператора E^v сжимающей силы P . Для первой задачи

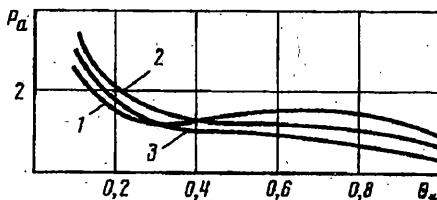
$$P = \begin{cases} P_0, & E^v = \begin{cases} E^{v-} = E^- (1 - \Gamma^*) & \text{при } 0 \leq x \leq ct \\ T^v = T (1 - \Gamma_T^*) & \text{при } ct < x \leq l \end{cases} \end{cases} \quad (2.2)$$

Понятно, что при возмущении в сжатой части балки при начальной стадии изгиба все сечение будет в сжатом состоянии, поэтому в этой части фигурирует E^{v-} , в оставшейся части будет некий оператор T^v , который имеет почти тот же смысл, что и коэффициент Кармана при упругопластической устойчивости. Ведь в этой части балки в плоскости изгиба противоположные волокна балки находятся в различных состояниях — одни сжимаются, а противоположные растягиваются. И вместо приведенного коэффициента будем иметь приведенный оператор, по форме совпадающий с первым. Например, для двутаврового сечения

$$T^v = (E^v + E^{v-}) / (E_i^+ + E^{v-}), \quad T = E^+ E^- / (E^+ + E^-) \quad (2.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для второй задачи

$$P = \begin{cases} P_1 \\ P_2 \end{cases}, \quad E^v = \begin{cases} E^{v-} & \text{при } 0 \leq x \leq ct \\ E^{v+} & \text{при } ct < x \leq l \end{cases} \quad (2.4)$$

Решение (2.1) для свободноопертой балки ищем в виде ряда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l} \quad (2.5)$$

при этом представляя E^v и P также в форме рядов

$$E^v = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos \lambda_m x, \quad P = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos \lambda_m x \quad (2.6)$$

Надо учесть, что в a_m входят операторы. Для второй задачи коэффициентами будут

$$a_0 = E^{v-} \frac{ct}{l} + E^{v+} \frac{l-ct}{l}, \quad b_0 = P_1 \frac{ct}{l} + P_2 \frac{l-ct}{l}$$

$$a_m = \frac{2(E^- - E^+)}{m\pi} \sin \lambda_m \frac{ct}{l}, \quad b_m = -\frac{2P_0}{m\pi} \sin \lambda_m \frac{ct}{l}$$

Для первой задачи в a_m оператор E^+ должен быть заменен на T , а коэффициент b_0 примет вид $b_0 = P_0 ct/l$. При заданной P_0 критическое время потери устойчивости находим из полученной системы относительно f_m после подстановки (2.3) и (2.4) в (2.1). Но дело в том, что в качестве коэффициентов фигурируют операторы. Критическое время определяется как наименьшее собственное число матрицы этой системы, если операторы применить к $1 - E^+ 1$ (тогда уже коэффициенты являются функциями от t) [2]. При этом критическое время для вязкоупругой части задач зависит от того, когда было сообщено возмущение — в момент начала движения нагрузки ($t_*^{(1)}$) или в какой-то текущий момент ($t_*^{(2)}$). Помимо того, будет еще t_* , которое получится после того, как нагрузка останавливается в промежуточной точке, а изгиб продолжается.

На фиг. 1 приведены кривые критического времени ($\theta_* = ct_*/l$) в зависимости от безразмерной силы $P_a = P_0/P_e$ ($P_e = E l \pi^2/l^2$) для второй задачи.

θ	P	P	P	P
0,1	2,760	2,804	1,840	2,008
0,2	1,648	1,703	1,364	1,217
0,3	1,604	1,702	1,069	1,220
0,4	2,098	2,328	1,399	1,703
0,5	3,266	3,988	2,177	3,048
0,6	6,032	9,450	5,910	3,541

Кривая 1 относится к случаю упругой задачи, кривая 2 соответствует случаю, когда возмущение сообщается в начальный момент ($t_*^{(1)}$), а 3 — когда возмущение сообщается в данный момент ($t_*^{(2)}$). Взяты следующие отношения $E^+/E^- = 0,4$; $\gamma/\alpha = 0,5$; ($E^+/E_\infty^+ = 1,5$), $2c = \alpha l$.

Расположение кривых до $\theta_* = 0,5$ кажется естественным; кривая 2 становится выше первой после $\theta_* = 0,5$, и это становится понятным, если вспомнить, что вязкость проявляется сравнительно уже для больших времен и, кроме того, как показано в [2], для неоднородного (разномодульного) материала длительная критическая сила может быть больше, чем мгновенная.

На фиг. 2 приведены аналогичные кривые для первой задачи, только здесь кривая 1 соответствует решению упругой задачи для двутаврового сечения (2.2), а две другие кривые относятся к случаю одномодульного материала: 2 — упругая, 3 — вязкоупругая.

Для сравнения величин P_* для случаев фиксированной и движущейся нагрузок в таблице приведены их значения для различных θ . В первых двух колонках приведены P_* , мгновенные для фиксированной и движущейся нагрузок соответственно, а в двух остальных — длительные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.
2. Мовсисян Л. А. К упругой и вязкоупругой устойчивости составного стержня//Изв. АН Армении. Механика. 1991. Т. 44. № 4. С. 21—29.
3. Исабекян Н. Г. Об одной задаче устойчивости стержня, изготовленного из разномодульного материала//Механика (межвуз. сб. науч. тр.). Ереван, 1986. Вып. 4. С. 92—101.
4. Мовсисян Л. А. К устойчивости упругопластических стержней при ударных нагрузках//Изв. АН АрмССР. Механика. 1986. Т. 39. № 2. С. 15—22.

Ереван

Поступила в редакцию
9.XII.1991