

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. П. Е. ТОВСТИК

## СВОБОДНЫЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Методом асимптотического интегрирования трехмерных динамических уравнений теории упругости исследована часть спектра частот свободных высокочастотных колебаний упругой изотропной пластины переменной толщины. Рассмотрены формы колебаний, имеющие одну или несколько полуволн деформации в направлении толщины пластины. Предполагается, что одна из лицевых поверхностей пластины плоская, а другая является поверхностью вращения. Построены формы колебаний, локализованные в окрестности точки максимума (или минимума) толщины пластины и напоминающие форму типа «прыгающего мячика» в акустике [1].

Интерес к колебаниям описанного вида связан с кварцевыми резонаторами, некоторые из конструкций которых имеют форму пластин переменной толщины [2]. Высокочастотные колебания оболочек, сопровождающиеся волнообразованием в направлении толщины, исследованы в [3].

1. Введем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$  и через  $u, v, w$  обозначим проекции перемещения на ее орты. При рассмотрении грамонических колебаний с  $m$  волнами в окружном направлении ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) положим

$$u = u(r, z) \cos m\varphi \sin \omega t, v = v(r, z) \sin m\varphi \sin \omega t \quad (1.1)$$

$$w = w(r, z) \cos m\varphi \sin \omega t$$

Тогда уравнения теории упругости принимают вид [4]:

$$G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \Delta_r^m u - \frac{u + 2mv}{r^2} \right) + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial r} + \gamma \omega^2 u = 0$$

$$G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \Delta_r^m v - \frac{v + 2mu}{r^2} \right) - (\lambda + G) \frac{me}{r} + \gamma \omega^2 v = 0$$

$$G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \Delta_r^m w \right) + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + \gamma \omega^2 w = 0 \quad (1.2)$$

$$e = \frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{mv}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}, \Delta_r^m = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \quad (1.3)$$

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2G}{\gamma}, c_2^2 = \frac{G}{\gamma}, \lambda = \frac{2G\nu}{\nu_1}, \frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

$$\nu_1 = 1 - 2\nu, \nu_2 = 2 - 2\nu$$

Здесь  $\lambda, G$  — коэффициенты упругости Ламе,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $c_1, c_2$  — скорости распространения упругих волн растяжения и сдвига,  $\gamma$  — плотность материала.

Пусть пластина занимает область  $0 \leq z \leq h(r)$ ; причем толщина пластины  $h(r)$  максимальна при  $r=0$  и имеет разложение

$$h(r) = h_0 - \frac{r^2}{2R} + \alpha_4 \frac{r^4}{R^3} + \dots \quad (1.4)$$

где  $R$  — радиус кривизны верхней лицевой поверхности пластины при  $r=0$  ( $0 < R < \infty$ ).

Лицевые поверхности пластины предполагаются свободными, что дает граничные условия

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = 0 \text{ при } z = 0 \quad (1.5)$$

$$\sigma_{zz} - h' \sigma_{rz} = \sigma_{rz} - h' \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} - h' \sigma_{\varphi r} = 0 \text{ при } z = h(r)$$

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \left( \frac{u + mv}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \sigma_{r\varphi} = G \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v + mu}{r} \right)$$

$$\sigma_{rz} = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \sigma_{\varphi z} = G \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{mw}{r} \right) \quad (1.6)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2G) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u + mv}{r} \right)$$

На рассматриваемые ниже формы колебаний, затухающие с ростом  $r$ , граничные условия на торцевой поверхности пластины не влияют, поэтому они не конкретизируются.

Предположим сначала, что толщина пластины постоянна ( $h(r) \equiv h_0$ ), а функция  $u$ ,  $v$ ,  $w$  зависят только от  $z$ . Тогда получаем две серии частот среза [5] ( $n = 1, 2, \dots$ ):

$$\omega_{1n} = n\pi c_1 h_0^{-1}, \quad u = v = 0, \quad w = w_0 \cos(n\pi h_0^{-1} z) \quad (1.7)$$

$$\omega_{2n} = n\pi c_2 h_0^{-1}, \quad u = u_0 \cos(n\pi h_0^{-1} z), \quad v = v_0 \cos(n\pi h_0^{-1} z), \quad w = 0$$

где  $u_0, v_0, w_0$  — производные постоянные. Вблизи  $\omega_{1n}, \omega_{2n}$  расположены собственные частоты при  $h(r) \neq \text{const}$ .

2. Введем малый параметр  $\mu$  и сделаем растяжение масштабов переменных  $r, z$  по формулам

$$\mu = (h_0 R^{-1})^{1/2}, \quad r = R\mu^{3/2}\rho, \quad z = h_0 f(\rho, \mu)\xi \quad (2.1)$$

$$f = 1 - 1/2\mu\rho^2 + \alpha_4\mu^4\rho^4 + \dots$$

Тогда  $0 \leq \xi \leq 1$  и, как показывают последующие выкладки, будет  $\rho \sim 1$ . После перехода к переменным  $\rho, \xi$  система (1.2) примет вид

$$f^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + k_2^2 u + \mu^{1/2} L_1(w, \mu) + \mu M_1(u, v, \mu) = 0$$

$$f^{-2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + k_2^2 v + \mu^{1/2} L_2(w, \mu) + \mu M_2(u, v, \mu) = 0$$

$$f^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + k_1^2 w + \mu^{1/2} L_3(u, v, \mu) + \mu M_3(w, \mu) = 0 \quad (2.2)$$

$$M_1 = \Delta_{Du}^m - \rho^{-2}(u + 2mv) + v_1^{-1} D(\rho^{-1} D(\rho u) + m\rho^{-1} v)$$

$$M_2 = \Delta_{Dv}^m - \rho^{-2}(v + 2mu) - v_1^{-1} m\rho^{-2}(D(\rho u) + mv)$$

$$M_3 = v_2^{-1} v_1 \Delta_D^m w, \quad L_1 = v_1^{-1} D (f^{-1} \partial w / \partial \zeta) \quad (2.3)$$

$$L_2 = -v_1^{-1} m (\rho f)^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \quad L_3 = v_2^{-1} \left( D \left( f^{-1} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + (\rho f)^{-1} \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} + m \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \right) \right)$$

$$\Delta_D^m = DD + \rho^{-1} D - m^2 \rho^{-2}, \quad D = \frac{\partial}{\partial \rho} - \zeta \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$k_1 = \omega h_0 c_1^{-1}, \quad k_2 = \omega h_0 c_2^{-1}$$

В силу того, что  $\partial f / \partial \rho = -\mu \rho + \dots = O(\mu)$ , различие операторов  $D$  и  $\partial / \partial \rho$  проявляется лишь в старших приближениях по  $\mu$ .

Граничные условия при  $\zeta = 1$  в силу (1.7), (1.8) после перехода к переменным  $\rho, \zeta$  принимают вид

$$\begin{aligned} \partial u / \partial \zeta + \mu^{1/2} l_1(w, \mu) + \mu^2 m_1(u, v, \mu) &= 0 \\ \partial v / \partial \zeta + \mu^{1/2} l_2(w, \mu) + \mu^2 m_2(u, v, \mu) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\partial w / \partial \zeta + \mu^{1/2} l_3(u, v, \mu) + \mu^2 m_3(w, \mu) = 0$$

$$l_1 = f D w + \frac{2\nu \mu f_1}{\nu f} \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \quad m_1 = \frac{f_1}{v_1} \left( v_2 D u + \frac{2\nu(u + mv)}{\rho} \right)$$

$$l_2 = -m f w / \rho, \quad m_2 = f_1 (D v - (v + mu) / \rho)$$

$$l_3 = \frac{2\nu f}{v_2} \left( D u + \frac{u + mv}{\rho} \right) + \frac{\nu f_1 \mu}{\nu f} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad m_3 = \frac{\nu f_1}{v_2} D w$$

$$f_1 = -\mu^{-1} \partial f / \partial \rho = \rho + O(\mu^3 \rho^3) \quad (2.5)$$

Граничные условия при  $\zeta = 0$  имеют тот же вид (2.4), однако при вычислении  $l_i, m_i$  по формулам (2.5) следует считать  $f_1 = 0$ .

3. Решение системы (2.2), удовлетворяющее условиям (2.4) и экспоненциально стремящееся к нулю при  $\rho \rightarrow \infty$  (называемое в дальнейшем локализованным), будем искать в виде формальных рядов по степеням  $\mu$ . При это возможны, как и в (1.9), колебания двух видов. Первый из них сопровождается в основном поперечными перемещениями  $w$  и деформациями растяжения — сжатия и имеет частоты, близкие к  $\omega_{1n}$ , второй — тангенциальными перемещениями  $u, v$ , деформациями сдвига и имеет частоты, близкие к  $\omega_{2n}$ . В дальнейшем для краткости будем называть их колебаниями растяжения и колебаниями сдвига.

Рассмотрим сначала первые как более простые. Решение ищем в виде

$$w(\rho, \zeta, \mu) = w_0 + \mu w_1 + \mu^2 w_2 + \dots$$

$$u = \mu^{1/2} (u_0 + \mu u_1 + \dots), \quad v = \mu^{1/2} (v_0 + \mu v_1 + \dots) \quad (3.1)$$

$$k = k_{10} (1 + \beta_1 \mu + \dots), \quad k_2 = k_{20} (1 + \beta_1 \mu + \dots)$$

где  $u_i, v_i, w_i$  — не зависящие от  $\mu$  функции  $\rho, \zeta$ , которые последовательно определяются после подстановки в (2.2), (2.4).

Для определения  $w_0$  имеем однородную краевую задачу

$$\partial^2 w_0 / \partial \zeta^2 + k_{10}^2 w_0 = 0, \quad \partial w_0 / \partial \zeta = 0 \quad (\zeta = 0, 1) \quad (3.2)$$

решение которой

$$w_0(\rho, \zeta) = W_0(\rho) \cos(k_{10} \zeta), \quad k_{10} = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

в отличие от (1.9) содержит функцию  $W_0(\rho)$ , подлежащую определению из старших приближений.

Функции  $u_0$ ,  $v_0$  определяются из неоднородных краевых задач

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2} + k_{20}^2 u_0 + L_1(w_0, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} + l_1(w_0, 0) = 0 \quad (\zeta = 0, 1)$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \zeta^2} + k_{20}^2 v_0 + L_2(w_0, 0) = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial \zeta} + l_2(w_0, 0) = 0 \quad (\zeta = 0, 1)$$

$$k_{20}^2 = (n\pi)^2 v_2 v_1^{-1} \quad (3.4)$$

решая которые с учетом (2.2), (2.5), (3.3), находим

$$u_0(\rho, \zeta) = \Phi(\zeta) \frac{dW_0}{d\rho}, \quad v_0(\rho, \zeta) = -\Phi(\zeta) \frac{m}{\rho} W_0(\rho) \quad (3.5)$$

$$\Phi(\zeta) = k_{10}^{-1} \sin(k_{10}\zeta) - 2k_{20}^{-1} F(\zeta)$$

Функция  $F$  зависит от четности  $n$ :

$$F(\zeta) = \sin[k_{20}(\zeta - 1/2)] / \cos(1/2 k_{20}) \quad (n = 2k) \quad (3.6)$$

$$F(\zeta) = \cos[k_{20}(\zeta - 1/2)] / \sin(1/2 k_{20}) \quad (n = 2k + 1)$$

Видим, что решение не существует, если  $k_{20} = (2k + 1)\pi$  для четного  $n$  и  $k_{20} = 2k\pi$  или нечетного  $n$ . Иными словами, метод непригоден в случаях «внутренних резонансов», когда частота  $\omega_{1n}$  совпадает с одной из частот  $\omega_{2n_1}$ , причем четности чисел  $n$  и  $n_1$  различны. Из последующих приближений можно установить, что внутренний резонанс служит препятствием для построения решений и в тех случаях, когда четности чисел  $n$  и  $n_1$  одинаковы. Наличие внутреннего резонанса зависит только от числа полувольт  $n$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ :

$$n^2 v_2 = n_1^2 v_1 \quad (3.7)$$

В дальнейшем предполагаем, что внутренний резонанс не имеет места и

$$|n v_2^{1/2} - n_1 v_1^{1/2}| \gg \mu \quad (n_1 = 1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

Последнее неравенство обеспечивает убывание порядков слагаемых в рядах (3.1). Для построения  $w_1$  получаем

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} + k_{10}^2 w_1 + g_1(\rho, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} + h_1(\rho, \zeta) = 0 \quad (\zeta = 0, 1) \quad (3.9)$$

$$g_1 = L_3(u_0, v_0, 0) + M_3(w_0, 0) + 2k_{10}^2 \beta_1 w_0 + \rho^2 \partial^2 w_0 / \partial \zeta^2$$

$$h_1 = l_3(u_0, v_0, 0) \quad (3.10)$$

Условие совместности неоднородной краевой задачи (3.9) на спектре имеет вид

$$\int_0^1 g_1 \cos(k_{10}\zeta) d\zeta + h_1(\rho, 0) - (-1)^n h_1(\rho, 1) = 0 \quad (3.11)$$

При выполнении (3.11) уравнение (3.9) имеет решение

$$w_1(\rho, \zeta) = W_1(\rho) \cos(k_{10}\zeta) + w_1^*(\rho, \zeta) \quad (3.12)$$

где  $w_1^*$  — частное решение,  $W_1(\rho)$  — функция, определяемая из следующего приближения. Этот процесс построения последовательных приближений может быть продолжен.

4. После упрощений условие (3.11) принимает вид дифференциального уравнения второго порядка относительно  $W_0(\rho)$ :

$$\eta \Delta_\rho^m W_0 + k_{10}^2 (2\beta_1 - \rho^2) W_0 = 0 \quad (4.1)$$

$$\eta = 1 + \frac{8(1-2\nu)}{k_{20}(1-\nu)} F(0), \quad k_{20} = k_{10} \left( \frac{\nu_2}{\nu_1} \right)^{1/2}, \quad k_{10} = n\pi \quad (4.2)$$

а функция  $F$  та же, что и в (3.6). Коэффициент  $\eta$  зависит только от  $\nu$  и  $n$  и, вообще говоря, может принять любое значение ( $-\infty \leq \eta \leq +\infty$ ).

Пусть  $\eta > 0$ . Тогда уравнение (4.1) можно привести к виду

$$\Delta_x^m y + (\xi - x^2) y = 0 \quad (4.3)$$

$$y(x) = W_0(\mu), \quad x = \eta^{-1/4} k_{10}^{1/2} \rho, \quad \xi = 2\beta_1 k_{10} \eta^{-1/2} \quad (4.4)$$

Уравнение (4.3) при

$$\xi = \xi_{mk} = 2m + 4k + 2 \quad (4.5)$$

имеет затухающее при  $x \rightarrow \infty$  решение

$$y(x) = x^m P_{mk}(x) e^{-1/2 x^2} \quad (4.6)$$

где  $P_{mk}$  — полиномы степени  $2k$ , содержащие лишь четные степени  $x$ . В частности

$$P_{m0} = 1, \quad P_{m1} = x^2 - (m+1), \quad P_{m2} = x^4 - 2(m+2)x^2 + (m+1)(m+2) \quad (4.7)$$

Возвращаясь к размерным переменным, находим приближенную формулу для частот  $\omega_{1n}^{mk}$  колебаний растяжения, близких к частотам среза  $\omega_{1n}$  и характерный масштаб  $r_*$  формы колебаний в направлении  $r$ :

$$\omega_{1n}^{mk} = \frac{n\pi c_1}{h_0} \left[ 1 + \left( \frac{\eta h_0}{R} \right)^{1/2} \frac{1+m+2k}{n\pi} + O\left( \frac{h_0}{R} \right) \right] \\ (n = 1, 2, \dots; m, k = 0, 1, 2, \dots) \\ r_* = (\eta h_0^3 R)^{1/4} (n\pi)^{-1/2}, \quad r = r_* x \quad (4.8)$$

При  $\eta < 0$  уравнение (4.1) по-прежнему имеет единственное регулярное при  $\rho = 0$  решение, однако экспоненциально затухающих при  $\rho \rightarrow \infty$  решений оно не имеет. Два его линейно независимых решения при любом  $\beta_1$  суть вещественная и мнимая части функции

$$W_\infty \sim \exp [i(d_1 \rho + d_2 \ln \rho)] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k}{\rho^{k+1}}, \quad \rho \gg 1 \quad (4.9)$$

где  $d_1, d_2$  — вещественны, а  $e_k$  — комплексные постоянные. Хотя  $W_\infty \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow \infty$ , однако напряжения  $\sigma_y \sim 1$  при  $\rho \rightarrow \infty$ . Следовательно, при  $\eta < 0$  локализация колебаний пластины вблизи  $r=0$  не имеет места.

При  $\eta = 0$  уравнение (4.1) вырождается и локализованных форм колебаний также нет.

5. Перейдем к колебаниям сдвига. Решение ищем в виде, аналогичном (3.1):

$$u(\rho, \zeta, \mu) = u_0 + \mu u_1 + \dots, \quad v(\rho, \zeta, \mu) = v_0 + \mu v_1 + \dots \\ w(\rho, \zeta, \mu) = \mu^{1/2} (w_0 + \mu w_1 + \dots) \\ k_1 = k_{10} (1 + \beta_1 \mu + \dots), \quad k_2 = k_{20} (1 + \beta_1 \mu + \dots) \quad (5.1)$$

При этом в значительной мере повторяем выкладки п. 3, 4. Находим  
 $u_0(\rho, \zeta) = U_0(\rho) \cos(k_{20}\zeta), v_0(\rho, \zeta) = V_0(\rho) \cos(k_{20}\zeta)$  (5.2)

$$k_{20} = n\pi, k_{10} = k_{20} (v_1/v_2)^{1/2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

причем две функции  $U_0$  и  $V_0$  пока произвольны. Далее

$$w_0(\rho, \zeta) = \left( \frac{dU_0}{d\rho} + \frac{U_0 + mV_0}{\rho} \right) \Phi_1(\zeta), \Phi_1(\zeta) = -k_{20}^{-1} \sin(k_{20}\zeta) + \frac{2v_1}{k_{10}v_2} F_1(\zeta)$$
 (5.3)

где  $F_1(\zeta)$  получается из  $F(\zeta)$  (см. (3.6)) заменой  $k_{20}$  на  $k_{10}$ .

Для функций  $u_1$  и  $v_1$  приходим к краевым задачам, условия разрешимости которых дают систему уравнений для определения  $U_0, V_0$ :

$$\Delta_p^m U_0 - \frac{U_0 + 2mV_0}{\rho^2} + \eta_* \left[ \Delta_p^1 U_0 + m \frac{d}{d\rho} \left( \frac{V_0}{\rho} \right) \right] + k_{20}^2 (2\beta_1 - \rho^2) U_0 = 0$$

$$\Delta_p^m V_0 - \frac{V_0 + 2mU_0}{\rho^2} - \frac{m\eta_*}{\rho^2} \left[ \frac{d(\rho U_0)}{d\rho} + mV_0 \right] + k_{20}^2 (2\beta_1 - \rho^2) V_0 = 0$$
 (5.4)

$$\eta_* = \frac{8(1-2\nu)}{k_{10}(1-\nu)} F_1(0)$$
 (5.5)

При  $m=0$  система (5.4) распадается на два отдельных уравнения

$$\eta_1 \Delta_p^m U_0 + k_{20}^2 (2\beta_1 - \rho^2) U_0 = 0, \eta_1 = \eta_* + 1$$
 (5.6)

$$\Delta_p^1 V_0 + k_{20}^2 (2\beta_1 - \rho^2) V_0 = 0$$

которые сводятся к уравнению (4.3) и для решения которых можно воспользоваться результатами п. 4, считая в (4.5) и (4.7)  $m=1$ . В частности, второе из уравнений (5.6), описывающее крутильные колебания сдвига, всегда имеет локализованные решения, а первое, описывающее радиальные колебания сдвига, — только при  $\eta_1 > 0$ .

В размерных переменных, подобно (4.8), получаем соответственно приближенные выражения для частот крутильных и радиальных колебаний

$$\omega_{2h}^{0k} = \frac{n\pi c_2}{h_0} \left[ 1 + \left( \frac{h_0}{R} \right)^{1/2} \frac{2+2k}{n\pi} + O\left( \frac{h_0}{R} \right) \right]$$
 (5.7)

$$\omega_{2n}^{0k} = \frac{n\pi c_2}{h_0} \left[ 1 + \left( \frac{\eta_1 h_0}{R} \right)^{1/2} \frac{2+2k}{n\pi} + O\left( \frac{h_0}{R} \right) \right]$$

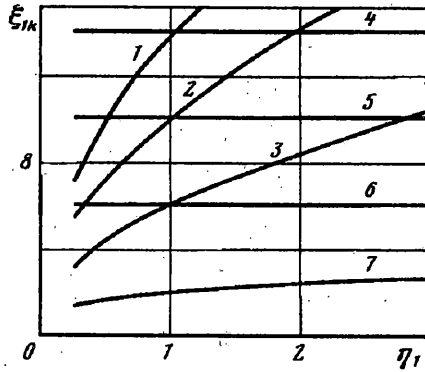
Пусть  $m \geq 1$ . Система (5.4), кроме основных параметров  $m, \beta_1$ , содержит еще два параметра  $k_{20} = n\pi$  и  $\eta_*$ . В отличие от (4.1) путем замен

$$x = (k_{20})^{1/2} \rho, \xi = 2\beta_1 k_{20}$$
 (5.8)

можно исключить параметр  $k_{20}$ , а параметр  $\eta_*$  исключить не удастся. Пусть замены (5.8) выполнены.

Система (5.4) имеет при  $\rho=0$  регулярную особую точку и два линейно независимых целых решения вида

$$U_0^{(j)}(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} x^{m+2k-1}, V_0^{(j)}(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(j)} x^{m+2k-1} \quad (j = 1, 2)$$
 (5.9)



причем коэффициенты  $a_k, b_k$  определяются из уравнений

$$c_{11}^k a_k + c_{12}^k b_k + \xi a_{k-1} - a_{k-2} = 0 \quad (5.10)$$

$$c_{21}^k a_k + c_{22}^k b_k + \xi b_{k-1} - b_{k-2} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$c_{11}^k = (\alpha^2 - 1) \eta_1 - m^2, \quad c_{12}^k = -2m + m\eta_* (\alpha - 1) \quad (5.11)$$

$$c_{21}^k = -2m - m\eta_* (\alpha + 1), \quad c_{22}^k = \alpha^2 - 1 - \eta_1 m^2$$

$$\alpha = m + 2k - 1, \quad a_k = b_k = 0 \quad \text{при } k < 0$$

Определитель  $\Delta_k$  системы (5.10):

$$\Delta_k = c_{11}^k c_{22}^k - c_{12}^k c_{21}^k = 4\eta_1 k (k - 1) [4(k + m)^2 - 1] \quad (5.12)$$

Обращается в нуль при  $k = 0, k = 1$  и отличен от нуля при остальных значениях  $k$ . Первые коэффициенты в (5.9) для двух линейно независимых решений можно взять, например, такими

$$a_0^{(1)} = b_0^{(1)} = 0, \quad a_1^{(1)} = 2 - m\eta_*, \quad b_1^{(1)} = 2 + \eta_* (m + 2) \quad (5.13)$$

$$a_0^{(2)} = 1, \quad b_0^{(2)} = -1, \quad a_1^{(2)} = 0, \quad b_1^{(2)} = -\xi (c_{12}^1)^{-1}$$

а остальные из (5.10) определяются однозначно.

При  $\eta_1 > 0$  система (5.4) имеет для решения, экспоненциально убывающих при  $\rho \rightarrow \infty$ , вида

$$U_\infty^{(j)} = y_j \exp(-1/2\gamma_j x^2), \quad V_\infty^{(j)} = z_j \exp(-1/2\gamma_j x^2) \quad (5.14)$$

$$y_j \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} x^{\alpha_j - 2k}, \quad z_j \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(j)} x^{\alpha_j - 2k} \quad (j = 1, 2) \quad (5.15)$$

$$\gamma_1 = \eta_1^{-1/2}, \quad \gamma_2 = 1, \quad \alpha_j = -1 + 1/2\gamma_j \xi \quad (5.16)$$

причем первые коэффициенты асимптотических рядов (5.15) равны

$$c_0^{(1)} = 1, \quad d_0^{(1)} = 0, \quad c_0^{(2)} = 0, \quad d_0^{(2)} = 1 \quad (5.17)$$

а остальные определяются из рекуррентных соотношений

$$c_k^{(j)} (\eta_1 \gamma_j^2 - 1) + c_{k-1}^{(j)} (\xi - 2\gamma_j \eta_1 \alpha) - d_{k-1}^{(j)} m \eta_* \gamma_j + \\ + c_{k-2}^{(j)} (\eta_1 ((\alpha + 1)^2 - 1) - m^2) + d_{k-2}^{(j)} m (\alpha \eta_* - 2) = 0$$

$$d_k^{(j)} (\gamma_j^2 - 1) + d_{k-1}^{(j)} (\xi - 2\gamma_j \alpha) + c_{k-1}^{(j)} m \eta_* \gamma_j +$$

$$+ d_{k-2}^{(j)} ((\alpha + 1)^2 - 1 - \eta_1 m^2) - c_{k-2}^{(j)} (\eta_* (\alpha + 2) - 2) = 0$$

$$\alpha = \alpha_j - 2k + 3 \quad (5.18)$$

Собственные значения  $\xi_{mk}$  ( $m, k = 1, 2, 3, \dots$ ) параметра  $\xi$  (см. (5.8)) определяются из условия «спивки» линейных комбинаций двух решений (5.9) и двух решений (5.14) при некотором  $x \gg 1$ . Для  $m = 1$  функции  $\xi_{1k}(\eta_1)$  показаны на фигуре.

Размерные частоты колебаний сдвига при  $m \geq 1$  суть

$$\omega_{2n}^{mk} = \frac{n\pi c_2}{h_0} \left[ 1 + \left( \frac{h_0}{R} \right)^{1/2} \frac{\xi_{mk}}{2n\pi} + O \left( \frac{h_0}{R} \right) \right] \quad (5.19)$$

При  $\eta_1 < 0$  только одно из решений системы (5.4) экспоненциально убывает, поэтому локализованных форм колебаний, вообще говоря, нет.

6. Локализованные формы колебаний существуют при выполнении неравенств  $\eta > 0$  для колебаний растяжения и неравенства  $\eta_1 > 0$  для колебаний сдвига. Величины  $\eta, \eta_1$  зависят только от  $n, \nu$ .

В случае колебаний растяжения фиксируем  $n \geq 1$  и рассмотрим неравенство  $\eta(\nu) > 0$ . При изменении  $\nu$  в пределах  $0 \leq \nu \leq 1/2$  в силу (3.7) имеется счетное число внутренних резонансов

$$\nu_{n_1} = (n_1^2 - 2n^2)/(2n_1^2 - 2n^2), \quad n_1 > n\sqrt{2} \quad (6.1)$$

с точкой сгущения при  $\nu = 1/2$ . Если четности чисел  $n$  и  $n_1$  различны, в окрестности каждого резонанса  $\nu_{n_1}$  имеется промежуток, в котором  $\eta < 0$ . Для нескольких  $n$  приведены первые промежутки, в которых  $\eta(\nu) > 0$ :

$$n = 1: 0,333 < \nu < 0,467; \dots \quad (6.2)$$

$$n = 2: 0,1 < \nu < 0,399; 0,405 < \nu < 0,455; \dots$$

$$n = 3: 0 \leq \nu < 0,322; 0,33 < \nu < 0,417; 0,418 < \nu < 0,451; \dots$$

$$n = 4: 0 \leq \nu < 0,240; 0,258 < \nu < 0,373; 0,377 < \nu < 0,423; 0,424 < \nu < 0,448; \dots$$

Для колебаний сдвига функция  $\eta_1(\nu)$  ведет себя более спокойно. При фиксированном  $n$  имеется не более  $n - 1$  внутреннего резонанса

$$\nu_{n_1} = (n^2 - 2n_1^2)/(2n^2 - 2n_1^2), \quad n_1 < n/\sqrt{2} \quad (6.3)$$

а промежутки, в которых  $\eta_1(\nu) > 0$ , таковы

$$n = 1: 0 \leq \nu \leq 0,5$$

$$n = 2: 0 \leq \nu < 0,333; 0,452 < \nu \leq 0,5$$

$$n = 3: 0 \leq \nu < 0,1; 0,320 < \nu \leq 0,5$$

$$n = 4: 0,151 < \nu < 0,467; 0,478 < \nu \leq 0,5 \quad (6.4)$$

На концах промежутков (6.2) или (6.4) (кроме  $\nu = 0$  и  $\nu = 1/2$ ) функции  $\eta$  или  $\eta_1$  обращаются в нуль или в бесконечность. Поэтому окрестности этих концов нуждаются в отдельном рассмотрении. Исключены из рассмотрения также окрестности внутренних резонансов (6.1) или (6.3) и окрестность точки  $\nu = 1/2$  (малосжимаемый материал).

7. Рассмотрим некоторые обобщения. Полученные результаты можно распространить на случай, когда обе лицевых поверхности пластины не являются плоскими. Пусть  $h_1(r) \leq z \leq h_2(r)$ ,  $h(r) = h_2(r) - h_1(r)$  и для  $h(r)$  по-прежнему



имеет место разложение (1.4). Тогда из п. 2—5 следует, что старшие члены рядов (3.1), (5.1) для  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и первые поправки  $\beta_1$  к частотам собственных колебаний будут теми же, что и в рассмотренном случае, когда одна из поверхностей плоская. Различие будет проявляться в следующих членах этих рядов.

Пусть теперь при  $r=0$  толщина  $h(r)$  минимальна, т. е.

$$h(r) = h_0 + 1/2 r^2 / R + \alpha_4 r^4 / R^3 + \dots$$

В этом случае тоже можно искать локализованные вблизи  $r=0$  формы колебаний. Повторяя предыдущие выкладки, приходим к тем же уравнениям (4.1), (5.4), в которых слагаемые с множителем  $\rho^2$  имеют другой знак.

Меняя знаки у всех слагаемых в (4.1), находим, что в случае колебаний растяжения искомая локализация имеет место при  $\eta < 0$ . При этом формы колебаний (4.6) имеют прежний вид, однако вместо (4.8) получим

$$\omega_{1n}^{mk} = \frac{n\pi c_1}{h_0} \left[ 1 - \left( -\frac{\eta h_0}{R} \right)^{1/2} \frac{1+m+2k}{n\pi} + O\left(\frac{h_0}{R}\right) \right]$$

Локализация имеет место также для радиальных колебаний сдвига, описываемых первым из уравнений (5.4) при  $m=0$ , если  $\eta_1 < 0$ . При этом вместо второй формулы (5.7) будет

$$\omega_{2n}^{0k} = \frac{n\pi c_2}{h_0} \left[ 1 - \left( -\frac{\eta_1 h_0}{R} \right)^{1/2} \frac{2+2k}{n\pi} + O\left(\frac{h_0}{R}\right) \right]$$

В случае  $m \neq 0$  локализация формы колебаний сдвига невозможна ни при каких значениях  $\eta_1$ . Также невозможна локализация формы крутильных колебаний сдвига, описываемых вторым уравнением (5.4) при  $m=0$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
2. Справочник по кварцевым резонаторам / Под ред. П. Г. Позднякова. М.: Связь, 1978. 287 с.
3. Каплунов Ю. Д. Высокочастотные напряженно-деформированные состояния малой изменчивости в упругих тонких оболочках // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 147—157.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. Нигул У. К. О корнях уравнения Лэмба для деформации плиты, антисимметричной относительно срединной поверхности // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1963. Т. 12. № 3. С. 284—293.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
28.VI.1991