

УДК 539.3:539.4

© 1994 г. Э. С. СИБГАТУЛЛИН, И. Г. ТЕРЕГУЛОВ, С. Н. ТИМЕРГАЛИЕВ

## ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ СТАТИЧЕСКИХ И ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Дан вывод параметрических уравнений поверхности прочности для слоистых композитных оболочек и пластин в пространстве средних и амплитудных значений циклических внутренних сил и моментов. При этом используется концепция о поверхности нагружения и постулат Друккера. Приведены результаты определения несущей способности цилиндрических оболочек, полученных при разных углах намотки слоев, при совместном действии статических осевых сил и циклических (симметричные и несимметричные циклы) крутящих (относительно оси оболочки) моментов.

1. Согласно мнению самого автора [1], постулат устойчивости материала является не законом природы, а средством, позволяющим дать общую классификацию материалов, которая выходит за пределы понятий, охватывающих специальные категории: упругость, пластичность, вязкость и так далее. Для материалов с независимыми от времени свойствами критерий устойчивости в малом для произвольного ненулевого нагружения имеет вид  $\delta\sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij} > 0$ , где  $\delta\sigma_{ij}$  — виртуальные обобщенные силы (в частности  $\sigma_{ij}$  — напряжения),  $\delta\epsilon_{ij}$  — виртуальные обобщенные перемещения точек приложения соответствующих обобщенных сил (в частности  $\epsilon_{ij}$  — деформации). Некоторые дополнительные соображения, касающиеся определения понятий виртуальных обобщенных сил и виртуальных обобщенных перемещений применительно к рассматриваемому случаю, будут приведены ниже.

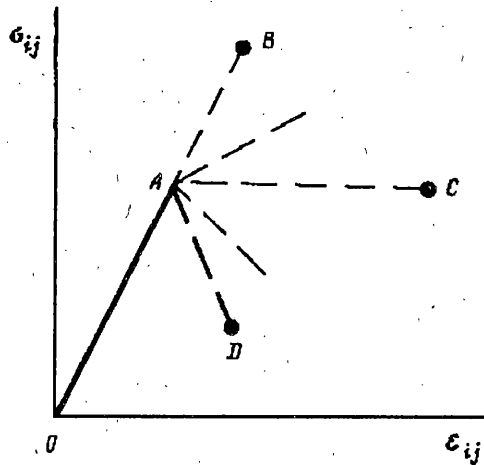
В определяющих соотношениях необходимо проводить физическое различие обратимости и необратимости процесса [1]. Это приводит к концепции существования поверхности нагружения [2]. Для упругопластической модели деформируемого твердого тела уравнение поверхности нагружения можно представить в виде  $f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, \chi_n^p) = 0$ , где  $\epsilon_{ij}^p$  — пластическая (необратимая) часть деформации,  $\chi_n^p$  — параметры, зависящие от истории изменения  $\epsilon_{ij}^p$ , постоянные при фиксированных  $\epsilon_{ij}^p$ .

Критерий устойчивости в малом для произвольного цикла нагрузки и разгрузки имеет вид

$$\delta\sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (1.1)$$

Если условие (1.1) выполняется, то поверхность нагружения является выпуклой, а вектор  $\delta\epsilon_{ij}^p$  направлен по внешней нормали к этой поверхности в точке соответствующего напряженного состояния. Эти замечания справедливы для устойчивых систем из материалов, такие, как составные материалы (в частности для композитов). Если каждый элемент такого составного материала устойчив, то совокупность должна быть устойчивой [1].

При многоцикловом усталостном разрушении обычно не возникают микропластические деформации. Но микропластические деформации при этом имеют место, на что указывает, в частности, разогрев образцов при испытаниях [3]. Процесс разрушения материала в изделиях из высокопрочных слоистых

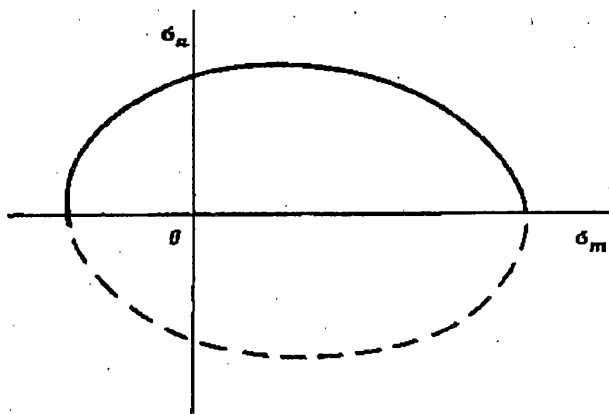


Фиг. 1

композитов начинается на начальных этапах нагружения, т. е. задолго до момента потери ими несущей способности [4]. В результате действия нагрузок идет процесс накопления повреждений. Проследить жизнь конструкции от начального момента приложения нагрузки до ее разрушения, рассматривая это как непрерывный процесс, в настоящее время вряд ли представляется возможным. Одной из причин этого является то, что способ выделения полного набора независимых внутренних параметров для системы, допускающей необратимые деформации, в настоящее время не известен. В связи с этим чаще всего ограничиваются рассмотрением более простой задачи — а именно, задачи определения предельного состояния конструкции, т. е. определения такой комбинации внешних воздействий, после приложения которой конструкция перестает выполнять свое функциональное назначение. Здесь возникают, по крайней мере, два вопроса. Первый из них — что принять за признак разрушения конструкции. Ответ на этот вопрос не будем конкретизировать, а будем считать, что признак разрушения конструкции устанавливается, исходя из ее функционального назначения. Второй вопрос — какой принять связь между обобщенными силами и обобщенными перемещениями в предельном состоянии. Постараемся ответить на этот вопрос более подробно.

На фиг. 1 показана условная диаграмма связи между обобщенными силами и обобщенными перемещениями. Участок  $OA$  соответствует устойчивому состоянию, а участок  $AD$  — неустойчивому состоянию материала. Допустим, что переход от устойчивого состояния в неустойчивое происходит непрерывным образом, за время  $\Delta t$ . Тогда материал за этот промежуток времени испытывает целый спектр состояний, виртуальные диаграммы  $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$ , соответствующие этим состояниям, располагаются в пределах угла  $BAD$  (фиг. 1, штриховые линии).

Виртуальной диаграммой  $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$  будем считать такую, которая имела бы место, если бы удалось стабилизировать свойства материала, которые он имеет в рассматриваемый момент времени. Среди виртуальных диаграмм есть и такая, которая параллельна оси  $\varepsilon_{ij}$  (линия  $AC$  на фиг. 1). Виртуальные обобщенные перемещения определим как любые бесконечно малые перемещения точек конструкции, для которых учитывается работа внутренних сил (реакций материала), а виртуальная диаграмма связи между обобщенными силами и обобщенными перемещениями совпадает с линией  $AC$ , параллельной оси  $\varepsilon_{ij}$ . Виртуальные обобщенные силы определим как бесконечно малые приращения обобщенных сил; вектор виртуальных обобщенных сил направлен по касательной к поверхности нагружения, соответствующей предельному состоянию. Состояние материала, соответствующее виртуальной диаграмме  $AC$ , примем за предельное.



Фиг. 2

Если принять за поверхность нагружения в предельном состоянии поверхность прочности (пластичности) для рассматриваемого материала, описываемую уравнением  $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$ , то связь между обобщенными силами и виртуальными обобщенными перемещениями в предельном состоянии можно записать в виде ассоциированного закона

$$\delta \varepsilon_{ij} = \delta \lambda \partial \Phi / \partial \sigma_{ij}, \quad \delta \lambda = \delta \lambda (\delta \varepsilon_{ij}) \geq 0 \quad (1.2)$$

Следует отметить, что форму и размеры тела, состояние которого характеризуется точкой  $A$  диаграммы на фиг. 1, считаем известными.

2. Рассмотрим задачу определения предельного состояния многослойных композитных пластин и оболочек при их многоцикловом нагружении. Пусть композитная структура образована путем наложения  $n$  ортотропных квазиоднородных слоев. Введем систему координат  $(Oxyz)_j$ , связанную с осями ортотропии  $j$ -го слоя ( $j = \overline{1, n}$ ). Ось  $z_j$  ортогональна плоскости слоя.

Максимальные и минимальные значения компонент тензора циклических напряжений определяются следующим выражением:

$$\sigma_{\max}^{ik} = \sigma_m^{ik} \pm \sigma_a^{ik}$$

Здесь  $\sigma_m^{ik}$  ( $i, k = x, y, z$ ) — средние напряжения цикла,  $\sigma_a^{ik}$  — амплитуды переменных частей напряжений.

В практике расчетов на прочность при циклическом нагружении часто используют диаграмму Хейя (фиг. 2, сплошная линия, диаграмма схематическая). Полагаем, что до разрушения конструкции напряжения в ней претерпевают целое число циклов изменения, поэтому дополнение диаграммы Хейя симметричной ей относительно оси  $\sigma_m$  частью (штриховая линия на фиг. 2) формально не вносит дополнительной информации, но позволяет получить замкнутую предельную кривую в плоскости  $\sigma_m \sigma_a$ . Обобщим эту кривую на случай плоского напряженного состояния, полагая при этом, что полученная таким образом предельная поверхность (аппроксимирующая экспериментальные результаты) может быть описана следующим уравнением:

$$(a\sigma_{xx}^2 + 2b\sigma_{xx}\sigma_{yy} + c\sigma_{yy}^2 + 2d\sigma_{xx} + 2e\sigma_{yy} + l\sigma_{xy})_m^2 + \quad (2.1)$$

$$+ [a_1(N)\sigma_{xx}^2 + 2b_1(N)\sigma_{xx}\sigma_{yy} + c_1(N)\sigma_{yy}^2 + l_1(N)\sigma_{xy}^2]_a^2 = 1$$

Здесь  $N$  — число циклов до разрушения; коэффициенты  $a', \dots, l_1'$  подлежат экспериментальному определению, причем  $a', \dots, l'$  могут быть получены по результатам кратковременных статических испытаний,  $a'_1(N), \dots, l'_1(N)$  — по

результатам испытаний на усталость при симметричных циклах напряжений. При записи уравнения (2.1) принято допущение, что  $\sigma_{zz} \approx 0$ ,  $\sigma_{xz} \approx 0$ ,  $\sigma_{yz} \approx 0$ .

Слагаемое, линейное относительно  $\sigma_m^{xy}$ , отсутствует потому, что оси  $x_j$ ,  $y_j$  являются осями ортотропии  $j$ -го слоя. Члены с первыми степенями  $\sigma_a^{xx}$ ,  $\sigma_a^{yy}$  не могут присутствовать, так как в случае симметричных циклов напряжений центр симметрии поверхности (2.1) должен совпасть с началом координат. Слагаемые с произведениями  $\sigma_m^{ik}\sigma_a^{ik}$  отсутствуют потому, что сечения поверхности (2.1) плоскостями  $\sigma_m^{ik}\sigma_a^{ik}$  должны быть симметричными относительно осей  $\sigma_m^{ik}$  (по аналогии с изображенной на фиг. 2 кривой).

В процедуре решения задач о несущей способности тонких оболочек и пластин важное место занимает критерий прочности, записанный в пространстве внутренних сил и моментов. Введем систему координат  $O\xi_1\xi_2z$ , связанную с поверхностью приведения  $S_0$  оболочки или пластины. Оси  $z$  и  $z_j$  взаимно параллельны. Ориентация  $j$ -го слоя в составе пакета определяется углом  $\varphi_j = (\xi_1, x_j)$ . Слои могут иметь различные прочностные характеристики, различные толщины и произвольную ориентацию в плоскости пакета.

В системе  $O\xi_1\xi_2z$  уравнение (2.1) имеет вид

$$\Phi_j \equiv (\sigma^T A \sigma + 2B^T \sigma - 1)_j = 0 \quad (2.2)$$

$$\sigma \equiv \{\sigma_i\}, \quad A \equiv \|a_{ik}\|, \quad B \equiv \|b_i\| \quad (i, k = \overline{1, 6})$$

$$\sigma_1 \equiv \sigma_m^{11}, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_m^{22}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_m^{12}$$

$$\sigma_4 \equiv \sigma_a^{11}, \quad \sigma_5 \equiv \sigma_a^{22}, \quad \sigma_6 \equiv \sigma_a^{12}$$

Компоненты матрицы  $A_j$  и вектора  $B_j$  линейно зависят от коэффициентов уравнения (2.1) и являются функциями угла  $\varphi_j$ ;  $\sigma_m^{ik}$ ,  $\sigma_a^{ik}$  рассматриваются как равноправные обобщенные силы.

Используя ассоциированный с (2.2) закон изменения кинематических характеристик (1.2) и переходя к скоростям, получаем

$$\dot{\varepsilon}'_i \equiv \dot{\lambda}_j \partial \Phi_j / \partial \sigma'_i \equiv 2\dot{\lambda}_j (A_i \sigma + b_i)_j \quad (i = \overline{1, 6}) \quad (2.3)$$

где  $A_i$  —  $i$ -я строка матрицы  $A$ ,  $b_i$  —  $i$ -й элемент вектора  $B$ . Решая соотношения (2.3) относительно  $\sigma'_i$ , получаем

$$\sigma'_i = \frac{1}{\Delta_i} \left( \frac{1}{2\dot{\lambda}} \sum_{k=1}^6 \delta_{ik} \dot{\varepsilon}'_k - \Delta_i \right)_j, \quad \Delta = \det A \quad (i = \overline{1, 6}) \quad (2.4)$$

Здесь  $\Delta_i$  — определитель матрицы, полученной путем замены  $i$ -го столбца матрицы  $A$  на вектор  $B$ ,  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$  — алгебраические дополнения  $(i, k)$ -го элемента  $\Delta$ . Подстановка (2.4) в (2.2) позволяет выразить  $\dot{\lambda}_j \geq 0$  через скорости обобщенных перемещений.

В разложениях функций  $\dot{\varepsilon}'_i$  по нормали к  $S_0$  сохраним члены при нулевой и первой степенях координаты  $z$ :

$$\dot{\varepsilon}'_i = \dot{\varepsilon}_i + z \dot{\varkappa}_i \quad (2.5)$$

где  $\dot{\varepsilon}_i$ ,  $\dot{\varkappa}_i$  — величины, характеризующие деформацию поверхности приведения  $S_0$ .

Средние и амплитудные значения внутренних погонных сил и моментов, приведенных к поверхности  $S_0$ , определяются согласно следующим уравнениям:

$$T_i = \sum_{j=1}^n \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma'_i dz, \quad M_i = \sum_{j=1}^n \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma'_i z dz \quad (i = \overline{1, 6}) \quad (2.6)$$

Подставляя (2.4) в (2.6) с учетом (2.5), получаем

$$T_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Delta_j} \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \delta'_{ik} (I_{1j} \dot{e}_k + I_{2j} \dot{\kappa}_k) - \Delta_{ij} h_j \right] \quad (2.7)$$

$$M_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Delta_j} \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \delta'_{ik} (I_{2j} \dot{e}_k + I_{3j} \dot{\kappa}_k) - \Delta_{ij} h_j z_j \right]$$

Здесь  $h_j = z_{2j} - z_{1j}$  — толщина, а  $z_j$  — координата срединной поверхности  $j$ -го слоя. Интегралы  $I_{ij}$  определяются следующим уравнением:

$$I_{ij} = \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \frac{z^{i-1} dz}{\lambda_j} \quad (i = \overline{1, 3})$$

Соотношения (2.7) являются параметрическими уравнениями предельной поверхности для слоистых композитных оболочек и пластин при их циклическом нагружении. Напряжения могут изменяться как синхронно и синфазно, так и синхронно и антифазно.

При решении конкретных задач о несущей способности композитных оболочек и пластин возникает необходимость построения различных сечений поверхности, определяемой уравнениями (2.7). Пусть, например, нужно построить предельную кривую на плоскости  $T_i O T_6$  с использованием уравнений (2.7). Здесь можно поступить следующим образом. Запишем систему из десяти уравнений

$$T_i = 0 \quad (i = \overline{2, 5}), \quad M_i = 0 \quad (i = \overline{1, 6}) \quad (2.8)$$

Левые части этих уравнений определяются согласно (2.7). Значения  $\dot{e}_1$  и  $\dot{e}_6$  задаются, а значения  $\dot{e}_2 - \dot{e}_5, \dot{\kappa}_1 - \dot{\kappa}_6$  определяются из решения системы нелинейных уравнений (2.8). Таким образом получим точку, принадлежащую одновременно поверхности (2.7) и плоскости  $T_i O T_6$ . Повторяя эту процедуру для различных комбинаций  $\dot{e}_1$  и  $\dot{e}_6$ , получим ряд точек, принадлежащих предельной кривой на плоскости  $T_i O T_6$ . Найдя достаточное число таких точек, строим искомую кривую.

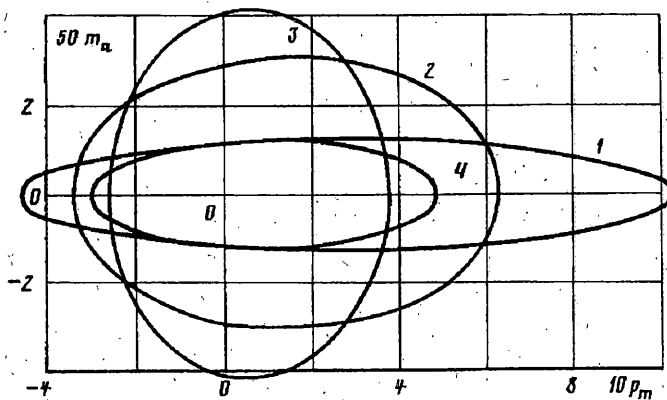
В зависимости от размерности искомого сечения поверхности (2.7) система, аналогичная (2.8), может содержать от 1 до 11 уравнений. При этом правые части уравнений такой системы могут быть приняты равными некоторым допустимым значениям, которые отличны от нуля. Эти допустимые значения определяются из условия существования искомого сечения поверхности (2.7).

3. Приведем некоторые результаты, полученные на основе вышеизложенного. Цилиндрическая оболочка нагружена статической осевой силой  $P_1$  и крутящим (относительно оси оболочки) циклическим моментом  $M_k$ . Материал оболочки — слоистый композит, слой из стеклотекстолита ВФТ-С. Число слоев  $n = 12$ . Введем следующие безразмерные обозначения:  $\sigma_i^* = \sigma_i / \sigma_0$ ,  $t_i = T_i / (\sigma_0 H)$  ( $i = \overline{1, 6}$ ),  $p = P_1 / (\sigma_0 H L)$ ,  $m = M_k / (2 \sigma_0 H A)$ , где  $\sigma_0$  — параметр, имеющий размерность напряжений,  $H$  — толщина оболочки,  $L$  — длина контура,  $A$  — площадь, ограниченная контурной линией.

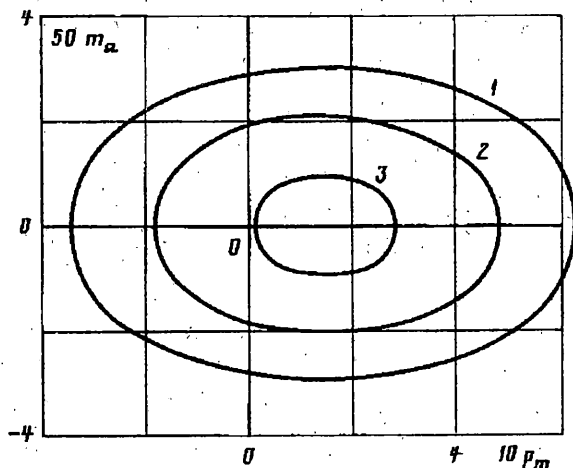
Предельная поверхность для монослоя в системе  $(Oxyz)$ , описывается следующим уравнением:

$$(2,24\sigma_{xx}^2 - 3,67\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 7,15\sigma_{yy}^2 - 1,25\sigma_{xx} - 1,33\sigma_{yy} + 39,1\sigma_{xy}^2)'_m + \\ + (42,2\sigma_{xx}^2 - 59,7\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 122\sigma_{yy}^2 + 2095\sigma_{xy}^2)'_a = 1$$

Это уравнение записано на основе информации, приведенной в экспериментальной работе [5]. Звездочка у безразмерных напряжений для удобства опущена, значение  $\sigma_0$  принято равным 387 МПа.



Фиг. 3



Фиг. 4

Считаем, что в предельном состоянии внешние и внутренние силы находятся в равновесии  $p_m = t_1$ ,  $m_m = t_3$ ,  $m_a = t_6$ .

На фиг. 3 приведены некоторые предельные кривые на плоскости  $p_m O m_a$  для рассматриваемой оболочки (симметричные циклы  $M_k$ ). Кривая 1 соответствует структуре материала  $[0_{12}^\circ]$ , кривая 2 —  $[90^\circ, \pm 60^\circ, \pm 30^\circ, 0^\circ]_s$ , кривая 3 —  $[(\pm 45^\circ)_3]_s$ , кривая 4 —  $[90_{12}^\circ]$ . На фиг. 4 приведены предельные кривые для симметричных и несимметричных циклов  $M_k$ . Структура материала —  $[90^\circ, \pm 60^\circ, \pm 30^\circ, 0^\circ]_s$ . Кривая 1 соответствует случаю  $m_m = 0$ , кривая 2 — случаю  $m_m = 0,2$ , кривая 3 — случаю  $m_m = 0,26$ . Решение системы (2.8) нелинейных уравнений осуществлялось с использованием обобщенного метода Стеффенсена [6].

Как видно, результаты качественно правильно отражают исследуемое явление усталостного разрушения слоистых композитных оболочек. Для количественной оценки этих результатов необходимо провести соответствующие эксперименты. Правильность результатов формальных операций проверялась различными способами. В частности, кривая 1 на фиг. 3 была построена по вышеизложенной методике, а потом проверялось соответствие координат точек этой кривой уравнению  $2,24 (\sigma_{xx}^2)_m - 1,25 (\sigma_{xx})_m + 2095 (\sigma_{xy}^2)_a = 1$ .

Отметим, что в отличие от [7, 8], в данном сообщении сделан шаг вперед в направлении обоснования применимости соотношений теории течения для определения предельного состояния при многоцикловом нагружении (независимо

от того, имеют место или нет макропластические деформации в начальный момент катастрофического разрушения). Кроме того, решение системы нелинейных уравнений, аналогичных (2.8), позволяет строить любые сечения предельной поверхности (2.7) для слоистого композитного материала произвольной структуры, что существенно расширяет область приложения уравнений (2.7).

Следует также отметить, что предлагаемая методика позволяет свести к минимуму необходимую экспериментальную работу при определении усталостной прочности слоистых композитных оболочек и пластин. Она позволяет получать правильную качественную картину исследуемого явления. Для количественной оценки получаемых с использованием предлагаемой методики результатов требуется провести соответствующие экспериментальные исследования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Друккер Д. О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды//Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1964. № 3. С. 115—128.
2. Ключников В. Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.
3. Олдырев П. П. Учет разогрева стеклопластика при испытаниях на многоцикловую усталость//Механика композит. материалов. 1988. № 1. С. 45—49.
4. Перевозчиков В. Г., Лимонов В. А., Протасов В. Д., Тамуж В. П. Статическая и усталостная прочность однонаправленных композитов при совместном действии напряжений сдвига и трансверсальных напряжений растяжения — сжатия//Механика композит. материалов. 1988. № 5. С. 845—851.
5. Олдырев П. П. Об оценке анизотропии усталостной прочности композитных материалов//Механика композит. материалов. 1982. № 1. С. 57—61.
6. Маергойз М. Д. Об одном методе решения систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений//Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7. № 4. С. 869—874.
7. Терегулов И. Г., Сибгатуллин Э. С. Метод расчета на усталость слоистых композитных оболочек и пластин//Механика композит. материалов. 1990. № 5. С. 871—876.
8. Сибгатуллин Э. С., Терегулов И. Г. Определение несущей способности слоистых композитных оболочек, работающих в условиях циклического нагружения//ПМТФ. 1991. № 1. С. 126—130.

Набережные Челны

Поступила в редакцию  
16.VI.1992