

УДК 539.3

© 1994 г. В. А. БУНАКОВ, Л. В. ФЕДОРОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К ОПИСАНИЮ СЕТЧАТЫХ СТРУКТУР

Эффективность конструкций из композиционных материалов обусловлена наличием конструктивных схем и схем армирования, в которых композит работает только в направлении армирования. Для пластин, работающих в условиях интенсивных сжимающих нагрузок, в качестве одного из вариантов армирования может быть предложена сетчатая конструкция, состоящая из системы ребер, уложенных под углами $\pm \alpha$, которая в общем случае может быть усилена обшивками (фиг. 1). Характерной особенностью конструкции является наличие элементарной ячейки (фиг. 1), транслируя которую в двух направлениях, можно получить всю поверхность пластины.

Дискретные методы расчета таких конструкций становятся неэффективными при $L_1/L \ll 1$ (L_1 — максимальный характерный размер элементарной ячейки — микроэлемента, L — минимальный характерный размер пластины). Поэтому целесообразнее использовать континуальную расчетную модель.

Существующие до сих пор модели конструктивно-ортотропных пластин не учитывают работы ребер на изгиб в плоскости пластины. Это может привести в ряде случаев к значительным погрешностям. В публикуемой работе исследована континуальная модель, основанная на концепции микрополярных континуумов [1]. В этом случае удается учесть работу ребра на изгиб в плоскости пластины за счет введения новой степени свободы. При этом реализован двухуровневый подход, позволяющий по известным параметрам структуры определить обобщенные жесткости модели и по найденным в результате расчета деформациям всего пакета вычислить усилия в ребрах. В дальнейшем будет рассматриваться только система ребер без ошибок.

1. Основные соотношения для микрополярных сред. Следуя [1], в микрополярной среде положение произвольной точки определяется с помощью двух векторов (фиг. 2):

$$X_i = x_i + z_i \quad (1.1)$$

где x_i — вектор определяющий положение центра масс микрообъема, z_i — вектор, определяющий положение точки относительно центра масс. До деформации квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками ds^2 определяется как

$$ds^2 = dX_i dX_i = dx_i dx_i + 2dx_i dz_i + dz_i dz_i \quad (1.2)$$

После деформации точка имеет координаты

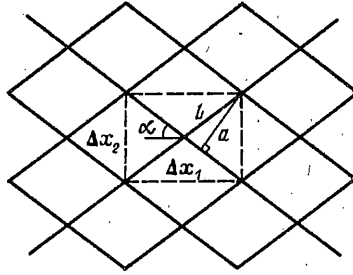
$$X_{ii} = x_{ii} + z_{ii} \quad (1.3)$$

Новое положение центра масс определяется через вектор смещения u_i :

$$x_{ii} = x_i + u_i \quad (1.4)$$

а новое положение относительно центра масс z_{ii} можно разложить в ряд по степеням z_i :

$$z_{ii} = z_i + \varphi_{ij} z_j + \psi_{ijk} z_j z_k + \dots \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Далее в разложении (1.5) учитываются только линейные члены и принимается, что тензор φ_{ij} кососимметрический ($\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}$). Такое ограничение на φ_{ij} физически означает, что в результате деформации каждый микробоъем перемещается и поворачивается как твердое целое. Тогда, введя аксиальный вектор φ_i , можно записать (ε_{ijk} — альтенатор, $\varepsilon_{123} = 1$):

$$X_{ii} = x_i + u_i + z_i + \varepsilon_{ijk}\varphi_k z_j \quad (1.6)$$

Сравнивая квадраты расстояния между двумя бесконечно близкими точками до и после деформации (и ограничиваясь случаем малых деформаций)

$$ds_1^2 - ds^2 = dx_i dx_j (\partial_i u_j + \partial_j u_i + 2z_s \varepsilon_{isk} \partial_j \varphi_k) + 2dx_i dz_j (\partial_i u_j + \varepsilon_{ijk}\varphi_k + z_s \varepsilon_{jsk} \partial_i \varphi_k) \quad (\partial_i = \partial/\partial x_i) \quad (1.7)$$

можно заметить, что деформированное состояние определяется тензорами

$$e_{ij} = \varepsilon_{ijk}\varphi_k + \partial_i u_j, \quad \omega_{ij} = \partial_i \varphi_j \quad (1.8)$$

Тензор e_{ij} является обобщением классического тензора деформации $E_{ij} = 1/2 (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ на случай микрополярной среды. Тензор ω_{ij} описывает изменение угла поворота при движении вдоль координатных осей.

Для среды, деформированное состояние которой описывается тензорами (1.8), можно получить соответствующие уравнения равновесия. Они получаются из вариационного принципа Лагранжа в результате требования стационарности функционала S :

$$S = \int_V W(e_{ij}, \omega_{ij}) dV \quad (1.9)$$

являющегося по физическому смыслу полной потенциальной энергией деформации. Наличие объемных сил не учитывается, поэтому W не зависит от u_i и φ_i . Уравнения Эйлера для функционала (1.9) приводят к уравнениям равновесия

$$\partial_i \sigma_{ij} = 0, \quad \partial_i m_{ij} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{ik} = 0 \quad (1.10)$$

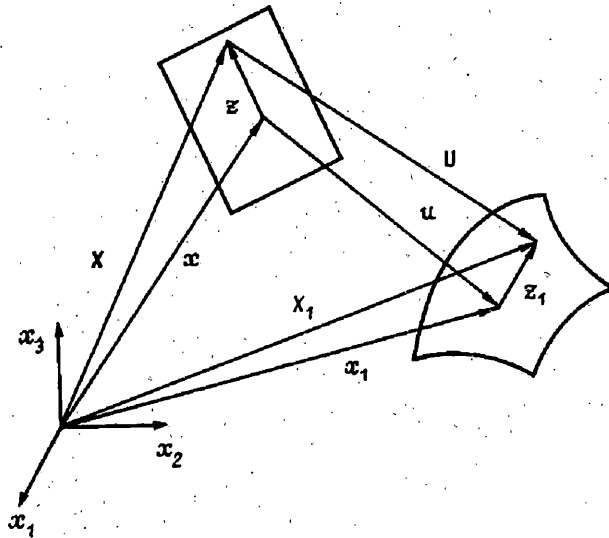
где $\sigma_{ij} = \partial W / \partial e_{ij}$ — напряжения и $m_{ij} = \partial W / \partial \omega_{ij}$ моментные напряжения.

Соотношения (1.8), (1.10) и физический закон, который для линейно-упругого тела в самом общем виде имеет вид

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} e_{kl} + F_{ijkl} \omega_{kl} \quad (1.11)$$

$$m_{ij} = F_{ijkl} e_{kl} + K_{ijkl} \omega_{kl}$$

образуют замкнутую систему уравнений микрополярной теории упругости. Применение данной теории ограничивается практической невозможностью установить физические константы в законе (1.11). Единственное, что возможно —



Фиг. 2

установить симметричность каждого из тензоров $E_{ijk} = E_{kij}$, $F_{ijk} = F_{kij}$, $K_{ijk} = K_{kij}$, следующую из условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} &= \frac{\partial^2 W}{\partial e_{kl} \partial e_{ij}}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial e_{ij} \partial \omega_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \omega_{kl} \partial e_{ij}} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \omega_{ij} \partial \omega_{kl}} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \omega_{kl} \partial \omega_{ij}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Однако представляется возможным установить физический закон в ряде частных случаев. Например, это можно сделать для сетчатых пластин, находящихся в условиях плоского напряженного состояния.

2. Соотношения для сетчатых пластин. Рассматривается сетчатая пластина в условиях плоского напряженного состояния. Для нее геометрические соотношения (1.8) и уравнения равновесия (1.10) (после интегрирования по толщине) примут вид

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \varepsilon_{ij} \varphi_3 + \partial_i \mu_j, \quad \omega_i = \omega_B = \partial_i \varphi \\ \partial_i N_{ij} &= 0, \quad \partial_i M_{Bj} + \varepsilon_{Bjk} N_{ik} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2, $\varphi = \varphi_3$). Введенные интегральные силовые факторы N_{ij} и M_B определяются следующим образом

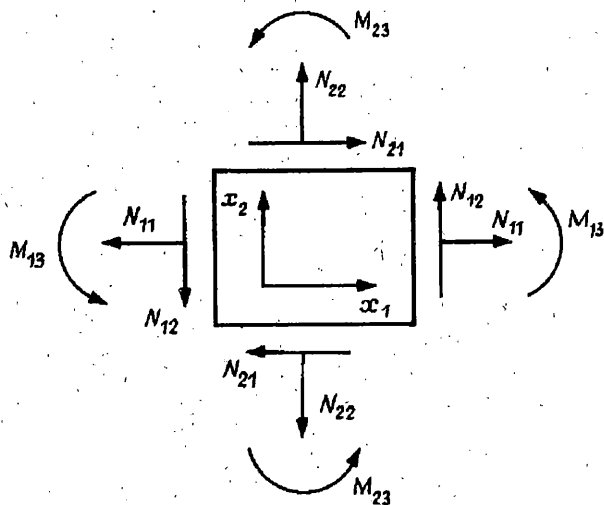
$$N_{ij} = \int_h \sigma_{ij} dx_3, \quad M_B = \int_h m_B dx_3 \quad (2.2)$$

Ось x_3 направлена по нормали к пластине. Направление действия нагрузок показано на фиг. 3.

Физические соотношения для пластины в силу того, что сетчатая структура обладает по меньшей мере двумя плоскостями упругой симметрии, можно записать так

$$\begin{aligned} N_{11} &= a_{11} e_{11} + a_{12} e_{22}, \quad N_{12} = b_{11} e_{12} + b_{12} e_{21} \\ N_{22} &= a_{12} e_{11} + a_{22} e_{22}, \quad N_{21} = b_{12} e_{12} + b_{22} e_{21} \\ M_{13} &= K_1 \omega_1, \quad M_{23} = K_2 \omega_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Конкретный вид упругих постоянных можно установить на основе равенства



Фиг. 3

полной потенциальной энергии деформации реальной конструкции и ее континуального аналога. Полная потенциальная энергия деформации пластины U_{Σ} представима в виде суммы энергий для отдельных крестообразных элементарных ячеек U_n :

$$U_{\Sigma} = \sum_n U_n \quad (2.4)$$

Энергию деформации одной ячейки можно представить в виде суммы энергий составляющих его ребер U_{pi} , которая без учета межслоевого сдвига записывается как

$$U_n = \sum_{i=1}^4 U_{pi} = 1/2 \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} (E_i F_i \epsilon_{pi}^2 + E_i J_i \kappa_{pi}^2) d\tau_i \quad (2.5)$$

Здесь l , F , J — длина, момент инерции и площадь ребра; ϵ_p , κ_p — деформации ребра при растяжении-сжатии и изгибе; τ_1 , τ_2 — оси системы координат, связанной с ребром.

Если в (2.5) деформации ребра выразить через деформации сплошной среды, то представляется возможным определить физический закон. Для этого достаточно представить (2.4) в виде интегральной суммы

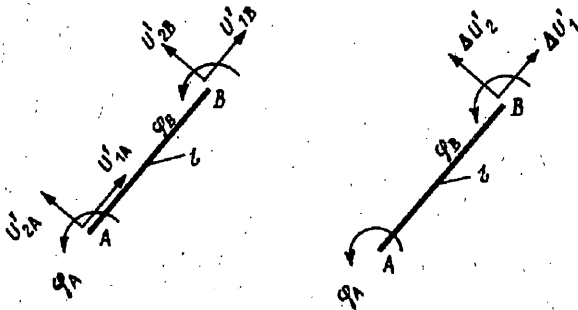
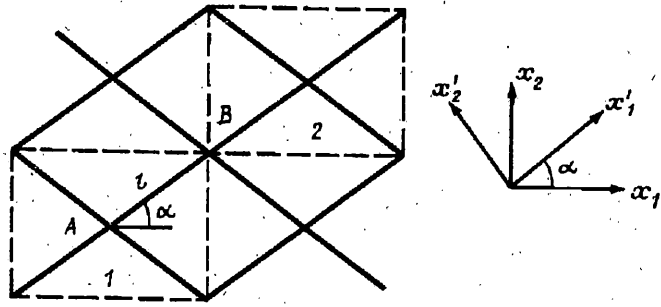
$$U_{\Sigma} = \sum_n \frac{U_n}{\Delta x_1 \Delta x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 = \sum_n \frac{U_n}{2al} \Delta x_1 \Delta x_2 \quad (2.6)$$

и принять, что удельная потенциальная энергия деформации

$$W = U_n / 2al \quad (2.7)$$

Если рассмотреть отдельно какое-нибудь ребро AB (фиг. 4), то каждый из узлов A и B в результате деформации перемещается вдоль осей x'_i и поворачивается на углы φ_A и φ_B . Нетрудно видеть, что такую же деформацию можно получить при изгибе и растяжении балки длиной l (фиг. 4) со следующими граничными условиями. В начале балки перемещения равны нулю, угол поворота равен φ_A . На конце балки перемещения заданы и равны соответственно $\Delta U'_i = U'_{ib} - U'_{ia}$, а угол поворота равен φ_B .

Используя техническую теорию изгиба балок, можно выразить возникающие



Фиг. 4

в ребре продольное усилие N_p , изгибающий момент M_p и перерезывающую силу Q_p через разность перемещений и углов поворота на краях

$$\begin{aligned}
 N_p &= \frac{EF}{l} \left(\frac{\Delta U_1'}{l} \right) \\
 M_p &= \frac{12EJ}{l^2} \left(-\frac{l}{2} \left(\frac{\Delta U_2'}{l} + \varphi_A \right) - \frac{l}{3} (\varphi_B - \varphi_A) \right) \\
 Q_p &= \frac{12EJ}{l^2} \left(-l \left(\frac{\Delta U_2'}{l} + \varphi_A \right) + \frac{l}{2} (\varphi_B - \varphi_A) \right)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Деформации ϵ_p и κ_p равны

$$\begin{aligned}
 \epsilon_p &= \frac{\Delta U_1'}{l}, \quad \kappa_p(\tau_1) = \frac{12}{l^2} \left(\frac{l}{2} \left(\frac{\Delta U_2'}{l} + \varphi_A \right) - l \frac{\varphi_B - \varphi_A}{6} - \right. \\
 &\quad \left. - \tau_1 \left(\frac{\Delta U_2'}{l} + \varphi_A + \frac{\varphi_B - \varphi_A}{2} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Теперь можно по полученным деформациям ребра выразить потенциальную энергию. Возводя деформации в квадрат и проводя интегрирование, окончательно получим выражение для потенциальной энергии через перемещения и углы поворота на краях

$$\begin{aligned}
 U_p &= \frac{EF l}{2} \left(\frac{\Delta U_1'}{l} \right)^2 + 6EJ \left(\frac{1}{l} \left(\frac{\Delta U_2'}{l} + \varphi_A \right) \right)^2 + \\
 &\quad + \frac{l}{3} \left(\frac{\varphi_B - \varphi_A}{l} \right)^2 + \left(\frac{\Delta U_2'}{l} + \varphi_A \right) \frac{\varphi_B - \varphi_A}{l}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Таким образом, задача нахождения потенциальной энергии деформации ребра свелась к определению разницы в перемещениях и углах поворота двух точек

А и В. Ее можно оценить с помощью обобщения теоремы Гельмгольца, связывающей перемещения близких точек, для микрополярных сред. В системе координат x'_i (фиг. 4) можно записать

$$\Delta U'_i = U'_{iB} - U'_{iA} = \varepsilon_{ij3} \Delta X'_j \varphi(A) + \Delta x'_j (e'_{ji}(A) + \varepsilon_{ik3} \omega'_k(A) z'_j(B)) \quad (2.11)$$

В качестве значения $\Delta U'_i$ берется среднее от случаев, когда точка В принадлежит элементам 1 и 2 (фиг. 4). Тогда

$$\Delta U'_i = \varepsilon_{i13} l \varphi + l (e'_{i1} - \varepsilon_{i13} \omega'_1 l) \quad (2.12)$$

(значения φ , e'_{i1} , ω'_1 берутся в точке А). Переходя от повернутой системы координат x'_i к x_i с учетом тензорного закона преобразования e_{ij} и ω_{ij} , можно окончательно получить

$$\begin{aligned} \Delta U'_i / l = & \varepsilon_{i13} \varphi + \cos \alpha (e_{11} \partial_i x_1 + e_{12} \partial_i x_2) + \sin \alpha (e_{21} \partial_i x_1 + \\ & + e_{22} \partial_i x_2) - \varepsilon_{i13} l (\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha), \quad (\partial_i = \partial / \partial x'_i) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно получить для разности углов поворота в точках А и В:

$$\varphi_B - \varphi_A = l (\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha) \quad (2.14)$$

Подставляя (2.13), (2.14) в (2.10), нетрудно найти выражение для удельной потенциальной энергии деформации

$$\begin{aligned} W = & \{EF [(e_{11} \cos^2 \alpha + e_{22} \sin^2 \alpha)^2 + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (e_{12} + e_{21})^2] + \\ & + 12EJ [\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (e_{22} - e_{11})^2 + (e_{12} \cos^2 \alpha + e_{21} \sin^2 \alpha)^2] / l^2 + \\ & + 28EJ (\omega_1^2 \cos^2 \alpha + \omega_2^2 \sin^2 \alpha)\} / a \end{aligned} \quad (2.15)$$

Откуда по формулам Кастильяно

$$N_{ij} = \partial W / \partial e_{ij}, \quad M_B = \partial W / \partial \omega_i \quad (2.16)$$

можно определить упругие константы в равенствах (2.3):

$$\begin{aligned} a_{11} = & b_{22} \operatorname{ctg}^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha (EF \cos^2 \alpha + (12EJ/l^2) \sin^2 \alpha) / a \\ a_{12} = & b_{12} = 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (EF - 12EJ/l^2) / a \\ a_{22} = & b_{11} \operatorname{tg}^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha (EF \sin^2 \alpha + (12EJ/l^2) \cos^2 \alpha) / a \\ K_1 = & K_2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = 56EJ \cos^2 \alpha / a \end{aligned} \quad (2.17)$$

Соотношения (2.3) можно разрешить относительно деформаций

$$\begin{aligned} e_{11} = & A_{11} N_{11} + A_{12} N_{22}, \quad e_{12} = B_{11} N_{12} + B_{12} N_{21} \\ e_{22} = & A_{12} N_{11} + A_{22} N_{22}, \quad e_{21} = B_{12} N_{12} + B_{22} N_{21} \\ \omega_1 = & M_{13} / K_1, \quad \omega_2 = M_{23} / K_2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$A_{11} = B_{22} \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{EF} + \frac{l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{12EJ} \right), \quad A_{12} = B_{12} = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{EF} - \frac{l^2}{12EJ} \right)$$

$$A_{22} = B_{11} \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{EF} + \frac{l^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{12EJ} \right)$$

и по формулам (2.8), (2.9) найти усилия в ребре (для изгибающего момента взято его максимальное значение, соответствующее $\tau_1 = 0$):

$$N_p = 1/2 a (N_{11} + N_{22} + N_{12} \operatorname{tg} \alpha + N_{21} \operatorname{ctg} \alpha)$$

$$Q_p = \sqrt{2}a(-N_{11} \operatorname{tg} \alpha + N_{22} \operatorname{ctg} \alpha + N_{12} - N_{21} + 9/7 (M_{13} \sin \alpha + M_{23} \cos \alpha)/a) \quad (2.19)$$

$$M_p = \frac{a^2}{8} \left(\frac{N_{11}}{\cos^2 \alpha} - \frac{N_{22}}{\sin^2 \alpha} + \frac{N_{21} - N_{12}}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{16}{7a} \left(\frac{M_{13}}{\cos \alpha} + \frac{M_{23}}{\sin \alpha} \right) \right)$$

Изложенный выше подход может быть применен и в случае учета межслоевого сдвига в ребрах. В этом случае упругие постоянные в физическом законе (2.3) примут вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{22} \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{2}{a} \cos^2 \alpha \left(EF \cos^2 \alpha + \frac{EJ \sin^2 \alpha}{\rho/12 + E^*} \right), \quad E^* = \frac{EJ}{GF} \\ a_{12} &= b_{12} = \frac{2}{a} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left(EF - \frac{EJ}{\rho/12 + E^*} \right) \\ a_{22} &= b_{11} \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{2}{a} \sin^2 \alpha \left(EF \sin^2 \alpha + \frac{EJ \cos^2 \alpha}{\rho/12 + E^*} \right) \\ K_1 &= K_2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{2}{a} \frac{EJ \cos^2 \alpha}{\rho/12 + E^*} \left(2\rho + \frac{(E^*)^2 + (5/12) \rho E^* + l^4/36}{\rho/12 + E^*} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Таким образом, полностью сформулированы основные соотношения для расчета сетчатых композитных пластин, находящихся в условиях плоского напряженного состояния. Следует отметить, что упругие константы a_{ij} , b_{ij} , K_i могут быть использованы в физическом законе для сетчатых безмоментных цилиндрических оболочек.

3. Пример. В качестве проверки полученных соотношений рассматривалась задача оценки модуля упругости сетчатой цилиндрической оболочки в продольном направлении. Оболочка нагружалась продольной силой $T = 23000$ Н. Размеры оболочки: длина — 0,182 м, радиус — 0,057 м. Характеристики ребер: $E = 40\,000$ МПа, $F = 9 \cdot 10^{-6}$ м², $J = 6,75 \cdot 10^{-12}$ м⁴, $l = 0,015$ м, $\alpha = 30^\circ$. Если не использовать микрополярную теорию (т. е. не учитывать работу ребра на изгиб), то значение модуля упругости равно нулю, так как в этом случае сетчатая структура является механизмом. Расчет по микрополярной теории дает значение модуля 1920,164 МПа. Расчет оболочки по методу конечных элементов как системы балок дает максимальное значение продольного смещения $2,01 \cdot 10^{-3}$ м. Откуда значение модуля упругости в продольном направлении составит 1938,315 МПа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эринген А. К. Теория микрополярной упругости. // Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения / Под. ред. Либовица Г. М. М.: Мир, 1979. С. 646—751.

Москва

Поступила в редакцию
17. II. 1992