

УДК 539.4

© 1994 г. П. А. ЗИНОВЬЕВ, С. В. ЦВЕТКОВ

ИНВАРИАНТНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается метод построения феноменологических критериев прочности анизотропных материалов, использующий теорию инвариантов. Проводится сравнение тензорно-полиномиального и инвариантно-полиномиального подходов к образованию критериев. Исследуются ограничения, которые налагаются на вид критерия прочности симметрией структуры материала. Получены выражения для критериев прочности трансверсально изотропных материалов, материалов, имеющих кубическую и гексагональную симметрию.

1. Общая формулировка. Феноменологический критерий прочности материала, связывающий возможность разрушения с параметрами напряженного состояния, для анизотропных материалов имеет вид

$$f(\sigma_{ij}, S_k) = 1 \quad (1.1)$$

где σ_{ij} — тензор напряжений, S_k — набор констант.

Каждому классу симметрии структуры анизотропного материала соответствует группа ортогональных преобразований, относительно которой функция f является инвариантной. Свойства симметрии налагают определенные ограничения на выражения для критерия прочности.

Однозначная непрерывная функция с любой степенью точности может быть представлена в виде полинома от тензорного аргумента [1].

Таким образом обычно формулируется тензорно-полиномиальный критерий прочности анизотропных материалов [2, 3]:

$$F_{ij}\sigma_{ij} + F_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + F_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} + \dots = 1 \quad (1.2)$$

В (1.2) используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Компоненты тензоров F_{ij} , F_{ijkl} , F_{ijklmn} , ..., отличающиеся перестановкой пар индексов и индексов внутри пар, равны. Симметрия структуры материала накладывает дополнительные ограничения на вид тензоров F_{ij} , F_{ijkl} , F_{ijklmn} , На практике применяются квадратичные варианты тензорно-полиномиального критерия [4—7], кубические [8, 9] и четвертой степени [10].

Как и всякий инвариант функция f может быть представлена в виде зависимости от функционального базиса инвариантов тензора σ_{ij} для данной группы ортогональных преобразований. Вместо выражения (1.1) критерий прочности может быть записан в виде

$$\varphi(I_i, S_k) = 1 \quad (1.3)$$

где I_i — инварианты тензора σ_{ij} , образующие функциональный базис.

Критерий прочности для трансверсально изотропного материала, выраженный через функциональный базис, рассматривается в [11]. Для других случаев анизотропии, используя этот же подход, предлагаются критерии прочности в [12]. Здесь же вводится постулат квазилинейности, из которого следует, что φ зависит только от линейных и квадратичных инвариантов. Если в качестве базиса

инвариантов использован полиномиальный базис [13], тогда критерий прочности для анизотропных материалов может быть представлен в виде полинома от инвариантов

$$A_1 I_1 + A_2 I_2 + A_3 I_3 + \dots = 1 \quad (1.4)$$

где I_1, I_2, \dots, I_n — инварианты, входящие в полиномиальный базис относительно группы ортогональных преобразований, соответствующей симметрии структуры материала. Величины A_1, A_2, \dots в отличие от F_{ij}, F_{ijkl}, \dots не меняются при изменении ориентации осей координат. Константы A_1, A_2, \dots определяются по результатам прочностных экспериментов.

Количество слагаемых в (1.4) и, следовательно, количество констант, подлежащих определению, выбирается наименьшим при условии описания экспериментальных данных с необходимой точностью.

Будем считать, что константы, входящие в (1.4) и отличающиеся перестановкой индексов, равны.

Метод построения скалярных анизотропных функций на основе полиномиального базиса инвариантов тензорного аргумента используется в [13—17] и других работах. Рассмотрим на конкретных примерах применение инвариантно-полиномиального критерия (1.4) прочности анизотропных материалов.

2. Трансверсальная изотропия. Полиномиальный базис тензора σ_{ij} для группы ортогональных преобразований, отвечающих симметрии трансверсального изотропного материала (ось 3 совпадает с осью трансверсальной изотропии), состоит из пяти инвариантов [1, 13]:

$$I_1 = \sigma_{33}, \quad I_2 = \sigma_{11} + \sigma_{22} \quad (2.1)$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2, \quad I_4 = \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2, \quad I_5 = |\sigma_{ij}|$$

Следующий набор инвариантов, очевидно, также может быть принят за полиномиальный базис

$$J_1 = I_1 + I_2 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

$$J_2 = 2I_1 - I_2 = 2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}$$

$$J_3 = 9I_3 - 3(I_1 + I_2)I_2 + (I_1 + I_2)^2 = (2\sigma_{11} - \sigma_{33} - \sigma_{22})(2\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{11}) - 9\sigma_{12}^2 \quad (2.2)$$

$$J_4 = I_4 = \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2$$

$$J_5 = 27I_5 - 9(I_1 + I_2)(I_3 - I_4 + I_1 I_2) + 2(I_1 + I_2)^3 =$$

$$= (2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33})(2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33})(2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}) + 54\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - 9(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33})\sigma_{23}^2 - 9(2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22})\sigma_{12}^2 - (2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33})\sigma_{13}^2$$

В базисе (2.2) инвариант J_1 пропорционален гидростатической составляющей тензора напряжений, а остальные инварианты не зависят от этой составляющей.

Общий вид квадратичного относительно компонент тензора напряжений критерия получаем из инвариантно-полиномиальной формулировки (1.4):

$$A_1 J_1 + A_2 J_2 + A_{11} J_1^2 + A_{22} J_2^2 + 2A_{12} J_1 J_2 + A_3 J_3 + A_4 J_4 = 1 \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) можно представить в виде тензорного полинома

$$F_{11}\sigma_{11} + F_{22}\sigma_{22} + F_{33}\sigma_{33} + F_{1111}\sigma_{11}^2 + F_{2222}\sigma_{22}^2 + F_{3333}\sigma_{33}^2 + 2F_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2F_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33} + 2F_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} + 4F_{1212}\sigma_{12}^2 + 4F_{1313}\sigma_{13}^2 + 4F_{2323}\sigma_{23}^2 = 1 \quad (2.4)$$

$$F_{11} = F_{22} = A_1 - A_2, \quad F_{33} = A_1 + 2A_2$$

$$F_{1111} = F_{2222} = A_{11} + A_{22} - 2A_{12} - 2A_3, \quad F_{3333} = A_{11} + 4A_{22} + 4A_{12} + A_3 \quad (2.5)$$

$$2F_{1122} = 2A_{11} + 2A_{22} - 4A_{12} + 5A_3, \quad 2F_{1133} = 2F_{2233} = 2A_{11} - 4A_{22} + 2A_{12} - A_3$$

$$4F_{1212} = -9A_3, \quad 4F_{1313} = 4F_{2323} = A_4$$

Чтобы получить выражение квадратичного критерия для трансверсально изотропного материала, исходя из тензорно-полиномиальной формулировки, в выражении (1.2) необходимо учесть условия, налагаемые на константы симметрией материала

$$F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0, \quad F_{1223} = F_{1213} = F_{2313} = 0 \quad (2.6)$$

$$F_{1113} = F_{2213} = F_{3313} = F_{1112} = F_{2212} = F_{3312} = F_{1123} = F_{2223} = F_{3323} = 0$$

$$F_{1133} = F_{2233}, \quad F_{11} = F_{22}, \quad F_{1111} = F_{2222}, \quad F_{1313} = F_{2323}, \quad 2F_{1212} = F_{1111} - F_{1122}$$

Если исходить из инвариантно-полиномиальной формулировки (1.4) критерия прочности, условия симметрий, накладываемые на константы, удовлетворяются автоматически.

Еще одной особенностью записи (2.3) критерия прочности в виде полинома от инвариантов является наглядная зависимость от величины гидростатического давления, т. е. инварианта J_1 .

Если прочность материала не зависит от гидростатического давления, то в (2.3) слагаемые, содержащие J_1 , должны быть равны нулю, т. е.

$$A_1 = A_{11} = A_{12} = 0 \quad (2.7)$$

и критерий прочности приобретает вид

$$A_2 J_2 + A_{22} J_2^2 + A_3 J_3 + A_4 J_4 = 1 \quad (2.8)$$

Если дополнительно потребовать, чтобы критерий прочности был чисто квадратичным (т. е. и $A_2 = 0$), то получим критерий Мизеса—Хилла [3]:

$$A_{22} J_2^2 + A_3 J_3 + A_4 J_4 = 1 \quad (2.9)$$

Если выражение для критерия прочности линейно зависит от гидростатического давления, то в (2.3):

$$A_{11} = A_{12} = 0 \quad (2.10)$$

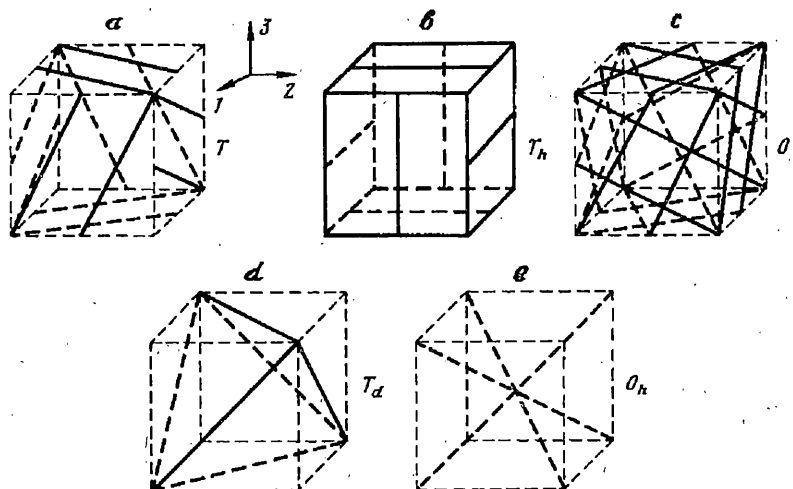
и получаем критерий Хоффмана [3, 7]:

$$A_1 J_1 + A_2 J_2 + A_{22} J_2^2 + A_3 J_3 + A_4 J_4 = 1 \quad (2.11)$$

3. Кубическая симметрия. Этот вид симметрии встречается в кристаллических телах, сплавах, объемноармированных композиционных материалах типа углерод-углерод. К данному виду относятся материалы пяти классов, отличающиеся наличием тех или иных элементов симметрии. Все эти пять классов можно получить путем армирования изотропного материала прямолинейными волокнами, как показано на фиг. 1.

У материала на фиг. 1, *a* армирующие волокна располагаются на гранях кубической элементарной ячейки и проходят через вершину куба и середину ребра. Элементарная ячейка на фиг. 1, *б* образуется, если часть армирующих волокон совпадает с ребрами куба, а часть лежит на гранях и проходит через середины ребер. Материал на фиг. 1, *в* получается, если армирующие волокна располагаются как у материала на фиг. 1, *a*, но на каждой грани находятся два семейства волокон различных направлений. Армирующие волокна у структуры, изображенной на фиг. 1, *г*, направлены по диагоналям граней, а у структуры на фиг. 1, *д* по диагоналям куба.

Для групп симметрии структур будем использовать обозначения Шенфлиса



Фиг. 1

[18]. Для структур на фиг. 1 (а-г) эти обозначения — T, T_h, O, T_d, O_h , соответственно.

Различия в симметрии структур материалов кубической системы проявляются на симметрии прочностных свойств. Например, одноосное напряженное состояние $\sigma_{11} = \sigma_0$ и напряженное состояние $\sigma_{22} = \sigma_0$ эквивалентны для любого из пяти классов (оси 1, 2, 3 направлены по ребрам куба).

При двухосном напряженном состоянии при замене граней, к которым приложены напряжения, имеем более сложную картину. Для материалов группы симметрии T, T_h двухосное напряженное состояние $\sigma_{11} = \sigma_a, \sigma_{22} = \sigma_b$ при $\sigma_a \neq \sigma_b$ неэквивалентно напряженному состоянию $\sigma_{11} = \sigma_b, \sigma_{22} = \sigma_a$.

Этот эффект схематично поясняется на фиг. 2, где изображена элементарная ячейка материала группы симметрии T_h при двух случаях нагружения. Предполагается, что нагрузка воспринимается только слоями материала, примыкающими к граням элементарной ячейки.

Как видно из рисунка, условия, в которых находятся грани A в обоих рассмотренных случаях, различны. Для других граней на фиг. 2, a есть эквивалентные на фиг. 2, b . Например, грань B на фиг. 2, a находится в том же напряженном состоянии, что и грань C на фиг. 2, b .

Очевидно, что для материалов классов симметрии O, T_d и O_h двухосное напряженное состояние $\sigma_{11} = \sigma_a, \sigma_{22} = \sigma_b$ и напряженное состояние $\sigma_{11} = \sigma_b, \sigma_{22} = \sigma_a$ эквивалентны.

Рассмотренный эффект и другие различия в прочностных свойствах материалов, возникающие вследствие различий классов симметрии материалов кубической системы, должны находить отражение в математической формулировке критериев прочности.

Полиномиальный базис для групп симметрии T и T_h состоит из 14 инвариантов [1, 13]:

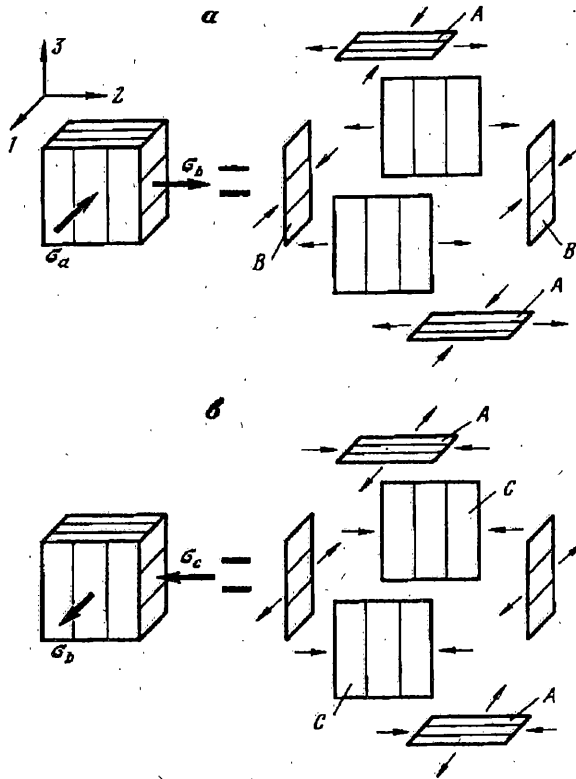
$$J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, J_2 = \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{11}\sigma_{22}$$

$$J_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}, J_4 = \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2$$

$$J_5 = \sigma_{12}^2\sigma_{23}^2 + \sigma_{23}^2\sigma_{13}^2 + \sigma_{13}^2\sigma_{12}^2, J_6 = \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}$$

$$J_7 = \sigma_{22}\sigma_{12}^2 + \sigma_{33}\sigma_{23}^2 + \sigma_{11}\sigma_{13}^2, J_8 = \sigma_{13}^2\sigma_{33} + \sigma_{12}^2\sigma_{11} + \sigma_{23}^2\sigma_{22} \quad (3.1)$$

$$J_9 = \sigma_{33}\sigma_{22}^2 + \sigma_{11}\sigma_{33}^2 + \sigma_{22}\sigma_{11}^2, J_{10} = \sigma_{12}^2\sigma_{13}^4 + \sigma_{23}^2\sigma_{12}^4 + \sigma_{13}^2\sigma_{23}^4$$



Фиг. 2

$$J_{11} = \sigma_{11}\sigma_{13}^2\sigma_{12}^2 + \sigma_{22}\sigma_{12}^2\sigma_{23}^2 + \sigma_{33}\sigma_{23}^2\sigma_{13}^2$$

$$J_{12} = \sigma_{23}^2\sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{13}^2\sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{12}^2\sigma_{11}\sigma_{22}$$

$$J_{13} = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{13}^2 + \sigma_{22}\sigma_{33}\sigma_{12}^2 + \sigma_{33}\sigma_{11}\sigma_{23}^2$$

$$J_{14} = \sigma_{23}^2\sigma_{13}^2\sigma_{22} + \sigma_{13}^2\sigma_{12}^2\sigma_{33} + \sigma_{12}^2\sigma_{23}^2\sigma_{11}$$

Полиномиальный базис для групп симметрии O , T_d , O_h содержит 9 инвариантов [1, 13]:

$$I_1 = J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad I_2 = J_2 = \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{11}\sigma_{22}$$

$$I_3 = J_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}, \quad I_4 = J_6 = \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}, \quad I_5 = J_4 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2$$

$$I_6 = J_5 = \sigma_{12}^2\sigma_{23}^2 + \sigma_{23}^2\sigma_{13}^2 + \sigma_{13}^2\sigma_{12}^2 \quad (3.2)$$

$$I_7 = \sigma_{22}\sigma_{12}^2 + \sigma_{33}\sigma_{13}^2 + \sigma_{33}\sigma_{23}^2 + \sigma_{11}\sigma_{12}^2 + \sigma_{11}\sigma_{13}^2 + \sigma_{22}\sigma_{23}^2$$

$$I_8 = J_{11} = \sigma_{11}\sigma_{12}^2\sigma_{13}^2 + \sigma_{22}\sigma_{23}^2\sigma_{12}^2 + \sigma_{33}\sigma_{13}^2\sigma_{23}^2$$

$$I_9 = J_{12} = \sigma_{12}^2\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{23}^2\sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{13}^2\sigma_{33}\sigma_{11}$$

Квадратичный критерий прочности для материалов всех пяти рассматриваемых групп имеет одинаковое выражение

$$A_1 J_1 + A_{11} J_1^2 + A_2 J_2 + A_4 J_4 = 1 \quad (3.3)$$

где инварианты J_1, J_2, J_4 определяются формулами (3.1)

Выражение (3.3) можно представить в виде тензорного полинома

$$F_{11}\sigma_{11} + F_{11}\sigma_{22} + F_{11}\sigma_{33} + F_{1111}\sigma_{11}^2 + F_{1111}\sigma_{22}^2 + F_{1111}\sigma_{33}^2 + 2F_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} +$$

$$+ 2F_{1122}\sigma_{11}\sigma_{33} + 2F_{1122}\sigma_{22}\sigma_{33} + 4F_{1212}\sigma_{12}^2 + 4F_{1212}\sigma_{23}^2 + 4F_{1212}\sigma_{13}^2 = 1 \quad (3.4)$$

$$F_{11} = A_1, \quad F_{1111} = A_{11}, \quad 2F_{1122} = 2A_{11} + A_2, \quad 4F_{1212} = A_4$$

Таким образом, квадратичный критерий прочности не отражает различий в прочностных свойствах материалов кубической системы, возникающих из-за различий в их симметрии.

Критерий третьего порядка для материалов группы симметрии T и T_h имеет вид

$$A_1J_1 + A_{11}J_1^2 + A_{111}J_1^3 + A_2J_2 + 2A_{12}J_2J_1 + A_4J_4 +$$

$$+ 2A_{14}J_1J_4 + A_3J_3 + A_6J_6 + A_7J_7 + A_8J_8 + A_9J_9 = 1 \quad (3.5)$$

где инварианты J_1, \dots задаются формулами (3.1).

Кубический критерий для материалов классов симметрии O, T_d, O_h выражается соотношением

$$A_1'I_1 + A_{11}'I_1^2 + A_{1111}'I_1^3 + A_2'I_2 + 2A_{12}'I_1I_2 + A_5'I_5 +$$

$$+ 2A_{15}'I_1I_5 + A_3'I_3 + A_4'I_4 + A_7'I_7 = 1 \quad (3.6)$$

где инварианты I_1, \dots задаются формулами (3.2).

Выражение (3.5) кубического критерия для материалов классов T и T_h для плоского напряженного состояния представляется в виде полинома от компонент тензора напряжений

$$F_{11}\sigma_{11} + F_{11}\sigma_{22} + F_{1111}\sigma_{11}^2 + F_{1111}\sigma_{22}^2 + F_{111111}\sigma_{11}^3 + F_{111111}\sigma_{22}^3 + 2F_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} +$$

$$+ 3F_{111122}\sigma_{11}^2\sigma_{22} + 3F_{112222}\sigma_{11}\sigma_{22}^2 + 4F_{1212}\sigma_{12}^2 + 12F_{121211}\sigma_{12}^2\sigma_{11} + 12F_{121222}\sigma_{12}^2\sigma_{22} = 1 \quad (3.7)$$

$$F_{11} = A_1, \quad F_{1111} = A_{11}, \quad F_{111111} = A_{111}, \quad 3F_{111122} = 2A_{12} + A_9 + 3A_{11}$$

$$3F_{112222} = 2A_{12} + 3A_{111}, \quad 2F_{1122} = A_2 + 2A_{11}, \quad 4F_{1212} = A_{11}, \quad (3.8)$$

$$12F_{121211} = 2A_{14} + A_8, \quad 12F_{121222} = 2A_{14} + A_7$$

Для материалов классов O, T_d, O_h тензорно-полиномиальный критерий третьего порядка для плоского напряженного состояния также имеет вид (3.7); константы в (3.7) выражаются через константы в (3.6) следующими формулами:

$$F_{11} = A_1', \quad F_{1111} = A_{11}', \quad F_{111111} = A_{111}', \quad 2F_{1122} = 2A_{11}' + A_2'$$

$$3F_{111122} = 2A_{11}' + 2A_{12}', \quad 3F_{112222} = 2A_{111}' + 2A_{12}' \quad (3.9)$$

$$4F_{1212} = A_5', \quad 12F_{121211} = 2A_{15}' + A_7', \quad 12F_{121222} = 2A_{15}' + A_7'$$

Таким образом, для классов O, T_d, O_h на константы в (3.7) накладываются ограничения

$$F_{111122}' = F_{112222}', \quad F_{121211} = F_{121222} \quad (3.10)$$

Условия (3.10) для классов T и T_h в общем случае не выполняются. Поэтому контур прочности, построенный по (3.7), для материалов классов T и T_h в координатах $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ в общем случае не симметричен, а контуры прочности в координатах $\sigma_{11} - \sigma_{12}$ и $\sigma_{22} - \sigma_{12}$ имеют разную форму.

Для материалов классов O, T_d, O_h контур прочности кубического критерия в координатах $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ симметричен относительно биссектрисы угла между

координатными осями, контуры прочности в координатах $\sigma_{11} - \sigma_{12}$ и $\sigma_{22} - \sigma_{12}$ имеют одинаковую форму.

4. Гексагональная симметрия. Рассмотрим материал группы симметрии D_{6h} . Примером такого материала является квазиизотропный материал, получаемый равномерным армированием прямолинейными нитями под углами $0, +60^\circ, -60^\circ$ к некоторому направлению. Такой материал по упругим свойствам является трансверсально изотропным [19]. Однако по прочностным свойствам материал с гексагональной структурой в общем случае не является изотропным в плоскости армирования (например, [9]).

Полиномиальный базис для материала класса симметрии D_{6h} , если ось 3 направлена по оси симметрии шестого порядка, будет [1, 13]:

$$I_1 = \sigma_{33}, I_2 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 \quad (4.1)$$

$$I_4 = \sigma_{11}(\sigma_{11}^2 + 6\sigma_{11}\sigma_{22} - 12\sigma_{12}^2 + 9\sigma_{22}^2), I_5 = \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2$$

$$I_6 = \sigma_{13}^2(\sigma_{13}^2 - 3\sigma_{23}^2), I_7 = \sigma_{11}\sigma_{23}^2 + \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}$$

$$I_8 = \sigma_{11}\sigma_{13}^4 + 3\sigma_{11}\sigma_{23}^4 + 2\sigma_{22}\sigma_{13}^4 + 6\sigma_{22}\sigma_{13}^2\sigma_{23}^2 - 8\sigma_{12}\sigma_{13}^3\sigma_{23}$$

$$I_9 = (\sigma_{11}^2 + 2\sigma_{11}\sigma_{22} - 3\sigma_{22}^2 + 4\sigma_{12}^2)\sigma_{13}^2 - 2(\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{11}\sigma_{22})(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) + 8\sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}$$

Квадратичный критерий для материала имеет вид

$$A_1 I_1 + A_{11} I_1^2 + A_2 I_2 + A_{22} I_2^2 + 2A_{12} I_1 I_2 + A_3 I_3 + A_5 I_5 = 1 \quad (4.2)$$

где инварианты I_1, \dots определяются формулами (4.1).

Подставив в (4.2) выражения для инвариантов, получаем критерий в виде полинома от компонент тензора напряжений

$$A_1 \sigma_{33} + A_2 \sigma_{11} + A_2 \sigma_{22} + A_{11} \sigma_{33}^2 + A_{22} \sigma_{11}^2 + A_{22} \sigma_{22}^2 + \quad (4.3)$$

$$+ (2A_{22} + A_3) \sigma_{11}\sigma_{22} + 2A_{12} \sigma_{33}\sigma_{11} + 2A_{12} \sigma_{33}\sigma_{22} - A_3 \sigma_{12}^2 + A_5 \sigma_{13}^2 + A_5 \sigma_{23}^2 = 1$$

Коэффициенты полинома (4.3) удовлетворяют требованиям (2.6) для коэффициентов критерия прочности трансверсально изотропного материала. Отличие прочностных свойств гексагонального материала от прочностных свойств трансверсально изотропного материала можно отразить, если критерий прочности содержит члены третьего порядка.

Кубический критерий прочности для гексагонального материала класса симметрии D_{6h} определяется выражением

$$A_1 I_1 + A_{11} I_1^2 + A_2 I_2 + A_{22} I_2^2 + 2A_{12} I_1 I_2 + A_3 I_3 + A_5 I_5 +$$

$$+ A_{111} I_1^3 + A_{222} I_2^3 + 3A_{112} I_1^2 I_2 + 3A_{122} I_1 I_2^2 + 2A_{13} I_1 I_3 +$$

$$+ 2A_{15} I_1 I_5 + 2A_{23} I_2 I_3 + 2A_{25} I_2 I_5 + A_4 I_4 + A_7 I_7 = 1 \quad (4.4)$$

В тензорно-полиномиальном виде для случая плоского напряженного состояния имеем

$$A_2 \sigma_{11} + A_2 \sigma_{22} + A_{22} \sigma_{11}^2 + A_{22} \sigma_{22}^2 + (A_{222} + A_4) \sigma_{11}^3 + A_{222} \sigma_{22}^3 +$$

$$+ (2A_{22} + A_3) \sigma_{11}\sigma_{22} + (3A_{222} + 2A_{23} + 6A_4) \sigma_{11}^2 \sigma_{22} + \quad (4.5)$$

$$+ (3A_{222} + 2A_{23} + 9A_4) \sigma_{11}\sigma_{22}^2 - (2A_{23} + 12A_4) \sigma_{11}\sigma_{12}^2 - 2A_{23}\sigma_{22}\sigma_{12}^2 - A_3 \sigma_{12}^3 = 1$$

Из (4.5) видно, что в общем случае пределы прочности в направлении 1 и 2 не равны. Таким образом, кубический критерий более точно отражает прочностные свойства гексагональных материалов.

5. В предыдущих пунктах рассмотрено построение феноменологических

критериев прочности для материалов различных групп симметрии. Показано, что в некоторых случаях критерий должен иметь порядок больше чем 2. Инвариантно-полиномиальный подход может быть эффективно использован в этих случаях. Не возникает существенных математических трудностей при использовании инвариантно-полиномиальной формулировки критерия прочности любого порядка и для материалов любого класса симметрий структуры.

Кроме ограничений симметрии структуры на выражение для критерия прочности, существуют и другие ограничения, например: замкнутость линий пересечений поверхности прочности с координатными плоскостями, односвязность поверхности, ее выпуклость и т. д. Эти дополнительные ограничения не являются предметом рассмотрения в публикуемой работе, но неизбежно возникнут при определении критерия прочности для конкретного материала [8, 9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
2. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композиционных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 571 с.
3. Бу Э. М. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред. // Композиционные материалы. Т. 2. Механика композиционных материалов / Под. ред. Дж. Сендечки. М.: Мир. 1978. С. 401—491.
4. Tsai S. W., Wu E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. // J. Composit. Materials, 1971. V. 5. № 1. P. 58—80.
5. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 191 с.
6. Puppo A. H., Evensen H. A. Strength of anisotropic materials under combined stresses. // AIAA Journal. 1972. V. 10. № 4. P. 468—474.
7. Theocaris P. S. Failure characterization of anisotropic materials by means of the elliptic paraboloid failure criterion. // Успехи механики, 1987. V. 10. № 3. P. 83—102.
8. Jiang Z., Tennyson R. C. Closure of the cubic tensor polynomial failure surface. // J. Composit. Materials, 1989. V. 23. № 3. P. 208—231.
9. Huang C. L. D. Strength coefficients of cubic criterion for graphite composites. // J. Material Sci., 1989. V. 24. № 6. P. 1979—1983.
10. Ашкенazi Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов. Л.: Машиностроение, 1980. 247 с.
11. Победря Б. Е. Критерий прочности однонаправленного волокнистого композита. // Проблемы прочности, 1987. № 7. С. 3—4.
12. Победря Б. Е. Критерии прочности анизотропного материала. // ПММ, 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 141—144.
13. Спенсер Э. Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.
14. Spenser A. J. M. The formulation of constitutive equation for anisotropic solids. // Colloq. intern. du CNRS. № 295. Comportement mecanique des solides anisotropes. Villard-de-Lans, 1979. Hague: Martinus Nijhoff Publ., 1982. P. 3—26.
15. Huang C. L. D. Strength criteria for anisotropic brittle materials. // AIAA Journal, 1985. V. 23. № 10. P. 1590—1593.
16. Smith G. F., Rivlin R. S. The strain—energy function for anisotropic elastic materials. // Trans. Amer. Math. Soc., 1958. V. 88. № 1. P. 175—193.
17. Boehler J. P., Sawczuk A. On yielding of oriented solids. // Acta Mech., 1977. V. 27. № 1—4. P. 185—204.
18. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики. М.: Наука. 1975. 680 с.
19. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 263 с.