МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1994

УДК 531.55:521.1

© 1994 г. Е. Ф. ТОМИЛИН

ВРАЩЕНИЕ ТЕЛА ПРИ ОБРАЩЕНИИ ЕГО ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС

Рассмотрено воздействие точечной массы на тело, которое обращается вокруг центра масс, с помощью взаимодействия двух материальных точек, учитывающего скорость его распространения и относительную скорость этих материальных точек, в инерциальной системе отсчета.

Показано, что (при таком движении) на тело воздействует вращательный момент со стороны тяготеющей к нему точечной массы.

Найденный закон вращения тела объясняет наблюдаемое синхронное вращение Луны и других естественных спутников планет.

1. Как известно, Солнечная система при рассматривании ее воображаемым наблюдателем из северного полюса Мира (Полярная звезда находится в 1° от северного полюса Мира) выглядит примерно так: а) планеты обращаются вокруг Солнца в одном направлении, против часовой стрелки (прямое обращение); б) их орбиты имеют малый наклон к эклиптике (плоскость орбиты Земли вокруг Солнца) и представляют собой небольшого эксцентриситета эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце; в) вращение планет и Солнца, вокруг своих осей, происходит в том же направлении, в котором планеты движутся вокруг Солнца (прямое вращение).

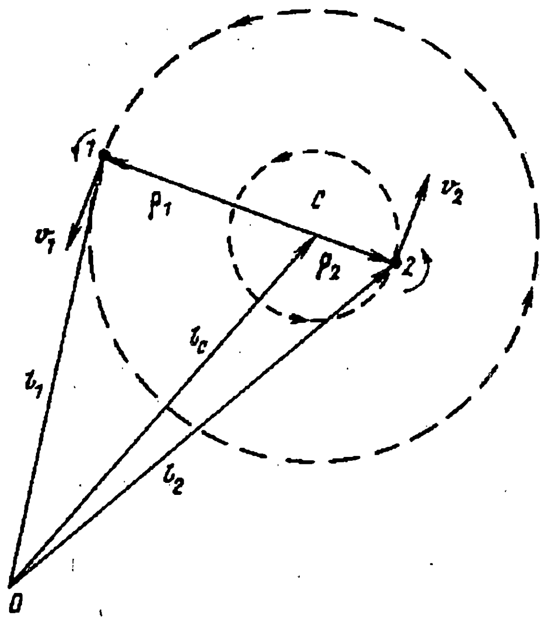
В [1, 2] рассматривались упомянутые движения планет и Солнца,— с помощью следующего взаимодействия точечных масс:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{l^2}\left[1 - \frac{(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{l}_{12}^{\vee}) + (\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{l}_{21}^{\vee})}{\Gamma}\right]\frac{\mathbf{l}_{12}}{l_{12}} \tag{1}$$

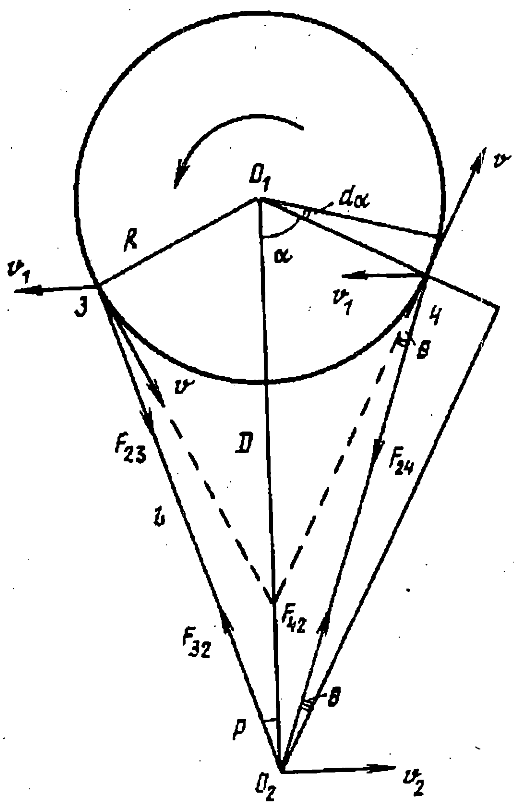
где $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая на материальную точку 2 со стороны материальной точки 1; G — постоянная тяготения, равная $6{,}672\cdot 10^{-8}$ г$^{-1}$ см^3 с$^{-2}$; m_1, m_2 — массы материальных точек 1 и 2 соответственно; $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — скорости материальных точек 1 и 2 соответственно; $\mathbf{l}_{12}$ — вектор, направленный из точки 1 в точку наблюдения 2; $l = l_{12}$ — расстояние между материальными точками 1 и 2; $\mathbf{l}^{\vee} = \mathbf{l}/l$ — единичный радиус-вектор; $(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{l}_{12}^{\vee})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{l}_{12}^{\vee}$.

Теперь попытаемся объяснить, с помощью формулы (1), природу наблюдаемого синхронного вращения естественных спутников, вокруг своих планет. Для гипотетического наблюдателя на полюсе Мира движение планеты и ее спутника будет выглядеть примерно так, как это показано на фиг. 1, где орбиты небесных тел представлены пунктиром, а направления обращения и вращения их указаны стрелками.

2. Рассмотрим движение двух изолированных небесных тел относительно их центра масс c; при этом учтем, что на фиг. 1 точки 1 и 2 теперь представляют собой тела, а не материальные точки. Однако задачу можно значительно упростить, если принять во внимание тот факт, что расстояние между небесными телами намного больше их размеров. Тогда одно из тяготеющих друг к другу тел можно принять за материальную точку, по отношению к которому находится вращательный момент. Так на фиг. 2 представлен такой случай, где материальной


1
ρ1
c
v2
v1
ρ2
2
rc
r1
r2
O

Фиг. 1


v
O1
dα
R
α
v1
v1
3
4
B
v
D
F23
F24
r
F42
F32
B
p
O2
v2

Фиг. 2

точкой является точка O_2 и пусть она имеет скорость $\mathbf{v}_2$. Сечение другого тела плоскостью орбиты представлено кругом радиуса R с центром в точке O_1 и пусть его скорость $\mathbf{v}_1$. Возьмем на окружности этого сечения произвольные точки 3 и 4, симметричные относительно прямой, проходящей через точки O_1 и O_2. Предположим, что по этой окружности, в кольцевом ее слое толщиной dR и шириной Δs, равномерно распределена масса с плотностью μ. Тогда угловому расстоянию $d\alpha$ будет соответствовать масса элемента дуги $\mu R dR \Delta s d\alpha$. Пусть такая масса находится в точках 3 и 4. Найдем силу $\mathbf{F}_{24}$, приложенную к точке 4 со стороны точки O_2 массы m_2. Используя обозначения фиг. 2 и формулу (1), найдем значение силы:

$$F_{24} = -\frac{Gm_2\mu R dR \Delta s d\alpha}{l^2}\left[1 - \frac{(v_1 + v_2)\sin p}{\Gamma}\right] \tag{2}$$

где p — горизонтальный экваториальный параллакс; l — расстояние между точкой 4 и точкой O_2. Аналогично, для симметричной точки 3 значение силы $\mathbf{F}_{23}$ равно:

$$F_{23} = -\frac{Gm_2\mu R dR \Delta s d\alpha}{l^2}\left[1 + \frac{(v_1 + v_2)\sin p}{\Gamma}\right] \tag{3}$$

Сравнивая F_{23} и F_{24} видно, что $|F_{23}| > |F_{24}|$. Значит силы $\mathbf{F}_{23}$ и $\mathbf{F}_{24}$ будут создавать вращательный момент в направлении прямого вращения. Поэтому, в общем случае, следует считать, что кольцевой слой вращается против стрелки часов и имеет, в какой-то момент времени, линейную скорость $\mathbf{v}$. Тогда силы $\mathbf{F}_{23}$ и $\mathbf{F}_{24}$ необходимо скорректировать. В результате такой коррекции, имеем такие значения сил

$$F'_{24} = -\frac{Gm_2\mu R dR \Delta s d\alpha}{l^2}\left[1 - \frac{(v_1 + v_2)\sin p - v\cos\theta}{\Gamma}\right] \tag{4}$$

$$F'_{23} = -\frac{Gm_2\mu R dR \Delta s d\alpha}{l^2}\left[1 + \frac{(v_1 + v_2)\sin p - v\cos\theta}{\Gamma}\right] \tag{5}$$

Проекция силы $\mathbf{F}_{24}$ на касательную в точке 4 равна $F'_{24}\cos\theta$ и направлена в сторону обратного вращения. Проекция силы $\mathbf{F}_{23}$ на касательную в точке 3 равна $F'_{23}\cos\theta$, но направлена же в сторону прямого вращения. Разность этих проекций определит ускорение этого кольцевого слоя и выражается следующей формулой:

$$dF = \frac{2Gm_2\mu R dR \Delta s d\alpha}{l^2\Gamma}\left[(v_1 + v_2)\sin p - v\cos\theta\right]\cos\theta \tag{6}$$

Учитывая, что

$$\cos\theta = D\sin\alpha/l, \qquad \sin p = R\sin\alpha/l \tag{7}$$

получим, после подстановки выражений (7) в формулу (6):

$$dF = \frac{2Gm_2\mu R dR \Delta s D}{\Gamma l^4}\left[(v_1 + v_2)R - vD\right]\sin^2\alpha d\alpha \tag{8}$$

Подставим в выражение (8) $l^2 = D^2 + R^2 - 2DR\cos\alpha$ и проинтегрируем его по α от 0 до π. Получим

$$F = \frac{Gm_2\mu dR\Delta s\left[(v_1 + v_2)R - vD\right]}{\Gamma D^2}\int_0^\pi \frac{2a\sin^2\alpha d\alpha}{(1 - 2a\cos\alpha + a^2)^2} \tag{9}$$

$$a = R/D$$

Учитывая следующий дифференциал:

$$d\,(1-2a\cos\alpha+a^2)^{-1}=-\frac{2a\sin\alpha d\alpha}{(1-2a\cos\alpha+a^2)^2}$$

проинтегрируем интеграл (9) по частям

$$\int_0^\pi \frac{2a\sin^2\alpha d\alpha}{(1-2a\cos\alpha+a^2)^2}=-\frac{\sin\alpha}{1-2a\cos\alpha+a^2}\Bigg|_0^\pi+\int_0^\pi\frac{\cos\alpha d\alpha}{1-2a\cos\alpha+a^2}$$

Первое слагаемое равно нулю, а второе — следующему выражению [3]: $\pi a/(1-a^2)$. Подставляя его в (9), найдем силу, приложенную к кольцевому слою

$$F=\frac{Gm_2\mu\Delta s dR\,[(v_1+v_2)R-vD]\,\pi a}{\Gamma D^2(1-a^2)} \tag{10}$$

Запишем уравнение движения кольцевого слоя массы dm:

$$F=dm(dv/dt),\qquad dm=2\pi RdR\Delta s\mu,\qquad v=\omega R \tag{11}$$

где ω — угловая скорость. Подставим в уравнение движения (11) эти выражения и силу (10), где учтено $a=R/D$. Имеем следующее равенство:

$$\frac{Gm_2\mu\Delta s dR\,(v_1+v_2-\omega D)\,\pi R^2}{\Gamma D\,(D^2-R^2)}=2\pi\Delta s\mu R^2 dR\,\frac{d\omega}{dt} \tag{12}$$

3. После сокращений постоянных в обеих частях равенства (12), проинтегрируем его по R от 0 до R_0, учитывая, что (для твердого тела) ω и $d\omega/dt$ не зависят от R:

$$\frac{Gm_2\,(v_1+v_2-\omega D)}{\Gamma D}\int_0^{R_0}\frac{R^2dR}{D^2-R^2}=2\,\frac{d\omega}{dt}\int_0^{R_0}R^2dR$$

Найдем интеграл

$$\int_0^{R_0}\frac{R^2dR}{D^2-R^2}=\frac{D}{2}\left[\ln\left(1+\frac{R_0}{D}\right)-\ln\left(1-\frac{R_0}{D}\right)\right]-R_0$$

Воспользовавшись разложением $\ln(1+x)$, получим дифференциальное уравнение движения диска

$$\frac{Gm_2\,(v_1+v_2-\omega D)}{\Gamma D}\,\frac{R_0}{3D^2}=2\,\frac{d\omega}{dt}\,\frac{R_0^3}{3}$$

которое представим в каноническом виде

$$d\omega/dt+N\omega=L \tag{13}$$

$$N=Gm_2/(2\Gamma D^2),\qquad L=Gm_2\,(v_1+v_2)/(2\Gamma D^3) \tag{14}$$

Как известно, общим решением неоднородного дифференциального уравнения (13) является сумма общего решения однородного уравнения с частным решением неоднородного уравнения. Такое решение имеет вид

$$\omega=Be^{-Nt}+\frac{L}{N}(1-e^{-Nt})$$

где B — постоянная интегрирования. Полагая $\omega=\omega_0$ при $t=0$, получим $B=\omega_0$. Тогда решением уравнения (13) является следующее выражение:

$$\omega=(\omega_0-L/N)\,e^{-Nt}+L/N \tag{15}$$

Из выражения (15) найдем установившуюся угловую скорость диска, устремив

t к бесконечности $\omega(\infty) = L/N$. Подставляя сюда вместо L и N их выражения из (14), получим

$$\omega(\infty) = (v_1 + v_2)/D \qquad (16)$$

Здесь $v_1 + v_2 = v_0$ — орбитальная скорость одного тела по отношению к другому. Из равенства (16) найдем период вращения диска

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi D/v_0 \qquad (17)$$

Правая часть равенства (17) представляет собой период обращения одного тела вокруг другого.

Следовательно, период вращения тела вокруг своей оси равен периоду обращения вокруг другого из двух тяготеющих друг к другу тел. Такое вращение тела вокруг своей оси называется синхронным. Таким же образом вращаются и другие небесные тела, сравнительно близко расположенные к центру тяготения; при этом они обращены к другому тяготеющему телу всегда одной и той же стороной, т. е. так, как вращается Луна. Вот как об этом написано на стр. 232 в [4]: «Подобное же совпадение времени вращения с обращением вокруг планеты подозревается и у других спутников Сатурна и Юпитера; возможно, что это общее правило для всех спутников в нашей системе». Кроме упомянутых спутников планет, синхронно вращается и одна из наших планет — Меркурий. Это открыл в 1881 г. итальянский астроном Скиапарелли, что время вращения Меркурия вокруг своей оси равно времени обращения его вокруг Солнца, т. е. 88 дням [4]. Однако, в последнее время оспаривается такое вращение Меркурия, ссылаясь на данные радиолокационных отражений от его поверхности [5].

Совсем по-другому объяснится синхронное вращение спутников планет в [5]. «Устойчивость относительного равновесия обеспечивается прежде всего отличием спутника (или Луны) от однородного шара. В случае однородного шара о действии гравитационных моментов говорить не приходится. Для устойчивости относительного равновесия твердого тела на круговой орбите в ньютоновом центральном поле сил достаточно, чтобы в невозмущенном движении большая ось центрального эллипсоида инерции тела была направлена по радиусу-вектору орбиты, меньшая ось — по нормали к плоскости орбиты и средняя ось — по касательной к орбите».

По этой теории, спутник, если хотят обеспечить его гравитационную устойчивость, должен быть изрядно сжат по направлению к плоскости орбиты, более вытянут по направлению движения и уж совсем вытянутым, «длинным» по направлению к Земле. Итак, за счет «даровой» гравитационной энергии можно удерживать спутник сколь угодно долго в положении, ориентированном на Землю одной стороной (подобно Луне). Далее эта идея развивается следующим образом: «При практическом осуществлении такой, как говорят, пассивной системы стабилизации важно погасить первоначальную, обычно довольно большую угловую скорость спутника. Требуется ввести угловую скорость в весьма узкий диапазон, в котором «срабатывает» гравитационный захват спутника в ориентированное положение. Поэтому системы гравитационной стабилизации обязательно содержат механизмы демпфирования (гашения) угловых скоростей. У естественных спутников (Луна, спутники Юпитера и Сатурна) таким механизмом демпфирования являются моменты сил приливного трения, которые в ходе тысячелетней эволюции «застопорили» вращение Луны и некоторых других небесных тел. Демпфирование первоначальных вращений искусственных спутников производится с помощью введения в систему того или иного вида трения, рассеивающего кинетическую энергию вращения».

Насколько устраивает такая теория читателя, то это пусть он сам решает. Наша задача — дать исчерпывающую информацию об этом.

Автор благодарит В. Ф. Журавлева за ценные советы и полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Томилин Е. Ф.* Новая интерпретация физической основы перемещения перигелия//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 33—43.
2. *Томилин Е. Ф.* Воздействие вращающегося тела на точечную массу или почему планеты не падают на Солнце//Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 4. С. 7—15.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
4. *Полак И. Ф.* Курс общей астрономии. М.— Л.: ГИТТЛ. 1939. 356 с.
5. *Белецкий В. В.* Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972. 360 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.I.1993