МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1994

УДК 539.376

© 1994 г. Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ

ДОСТАТОЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО СДВИГА

Исследование классической краевой задачи Орра — Зоммерфельда методом интегральных соотношений было впервые проведено в работах [1—3], где получены достаточные оценки устойчивости сдвиговых течений вязкой однородной жидкости с постоянной вязкостью. Обобщение этих результатов для стратифицированных тел в приближении Буссинеска [4] дано в [5]. Невозмущенное движение принималось ламинарным, и коэффициент вязкости соответствовал обычной молекулярной вязкости.

Устойчивости деформирования вязкопластических тел также посвящено большое число монографий и статей [6—9]. Даже для линейного скалярного соотношения, связывающего интенсивности напряжений и скоростей деформации, уже довольно трудно получить в аналитическом виде фундаментальные решения уравнения в возмущениях (аналога уравнения Орра — Зоммерфельда). Эти решения необходимы в дальнейшем дисперсионно-волновом анализе, поэтому для их нахождения были разработаны различные приближенные методы.

В [10] дана общая постановка краевой задачи устойчивости трехмерного течения вязкопластического тела относительно трехмерных возмущений, а также доказан аналог теоремы Сквайра [11].

В публикуемой работе, являющейся продолжением [10], найдены достаточные оценки устойчивости трех классических сдвиговых течений вязкопластического слоя. Определены нижние грани для критического числа Рейнольдса. Отмечено, что наличие пластической составляющей в физической модели во всех рассмотренных случаях оказывает стабилизирующее влияние.

1. Обобщенное уравнение Орра — Зоммерфельда. В [10] выведено уравнение устойчивости одномерного сдвигового течения в вязкопластическом слое относительно двумерных возмущений (знаки вариаций опущены)

$$\varphi^{\mathrm{IV}} - 2s^2\varphi'' + s^4\varphi - 4\varkappa s^2 \left(\frac{\varphi'}{|v'|}\right)' = is\left[\left(v - i\frac{\alpha}{s}\right)(\varphi'' - s^2\varphi) - v''\varphi\right]\mathrm{Re} \tag{1.1}$$

$$\psi(x_1, x_3, t) = \varphi(x_3)\exp(isx_1 + \alpha t)$$

Здесь φ — комплексная амплитуда функции тока ψ; $v(x_3)$ — скорость основного движения, имеющая две непрерывные производные в области вязкопластического течения Ω/Ω_r и одну непрерывную производную во всем слое Ω $(0 < x_3 < 1$, Ω_r — жесткая зона); $|v'|$ — максимальная скорость скольжения; $\mathrm{Re} = \rho Vh/\mu$ — число Рейнольдса (μ — динамическая вязкость); $\varkappa = \tau h/\mu V$ — число, характеризующее отношение вязких и пластических свойств среды [6] (τ — предел текучести при сдвиге). Штрихом обозначены производные по x_3. Все величины в (1.1) обезразмерены в базисе $\{\rho, V, h\}$, где ρ — плотность тела, V и h — характерные скорость и линейный размер.

Уравнение (1.1) при $\varkappa = 0$ сводится к хорошо изученному уравнению Орра — Зоммерфельда для ньютоновской несжимаемой жидкости [1, 12].

Изучим далее три типа граничных условий, соответствующих трем классическим стационарным профилям $v(x_3)$: течению Куэтта, течению Пуазейля и течению по наклонной плоскости в поле силы тяжести [13, 14], а также их линейным комбинациям. Задачи устойчивости рассматриваются и для других типов течений с произвольным профилем $v(x_3)$, не являющимся точным решением уравнений движения. Обоснование такого подхода для ньютоновских жидкостей дается в [11].

Заметим также, что при выводе уравнения (1.1) использовались лишь двумерные возмущения. Класс трехмерных возмущений, которые можно свести к двумерным, определяется аналогом теоремы Сквайра для вязкопластических течений [10].

2. Течение Куэтта. Если течение происходит между движущимися вдоль оси (Ox_1) с постоянными скоростями границами, то $v(x_3) = x_3$, и максимальная скорость скольжения всюду равна единице (плоское течение Куэтта). Жесткие зоны отсутствуют, и граничные условия имеют следующий вид

$$x_3 = 0;\ 1: \quad \varphi = \varphi' = 0 \tag{2.1}$$

Для общности примем, что основное течение характеризуется произвольной монотонно возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией $v(x_3)$, такой, что $|v'| \le q$ и $\int dx_3/|v'| < \infty$ $(0 \le x_3 \le 1)$.

Пусть φ — элемент комплекснозначного гильбертова пространства $\overline{H}_2(\Omega)$ с нормой

$$\|\varphi\| = \left(\int_0^1 |\varphi''|^2\, dx_3\right)^{1/2} \tag{2.2}$$

имеющий четыре непрерывные производные. Умножим (1.1) на комплексно-сопряженную функцию $\overline{\varphi}$ и проинтегрируем по x_3 от 0 до 1. Принимая во внимание (2.1), получим

$$I_2^2 + 2s^2I_1^2 + s^4I_0^2 + 4\varkappa s^2 I_v^2 = -\,[\alpha(I_1^2 + s^2I_0^2) + isQ]\,\mathrm{Re} \tag{2.3}$$

$$I_m^2 = \int_0^1 |\varphi^{(m)}|^2\, dx_3 \quad (m = 0, 1, 2), \quad I_v^2 = \int_0^1 \frac{|\varphi'|^2}{|v'|}\, dx_3$$

$$Q = Q_* + iQ_{**}, \quad Q_* = \int_0^1 \left\{ v\,|\varphi'|^2 + \left(\frac{1}{2}v'' + s^2v\right)|\varphi|^2\right\} dx_3,$$

$$Q_{**} = \int_0^1 v'\,(\varphi'\overline{\varphi})_{**}\, dx_3$$

Выделим в (2.3) действительную и мнимую части

$$\alpha_* = \frac{1}{I_1^2 + s^2I_0^2}\left(sQ_{**} - \frac{I_2^2 + 2s^2I_1^2 + s^4I_0^2 + 4\varkappa s^2I_v^2}{\mathrm{Re}}\right) \tag{2.4}$$

$$\alpha_{**} = -sQ_*/(I_1^2 + s^2I_0^2) \tag{2.5}$$

и воспользуемся неравенством Шварца [15] в пространстве $\overline{H}_2(\Omega)$ с нормой (2.2)

$$|Q_{**}| \le \int_0^1 |v'|\,|\varphi'|\,|\varphi|\, dx_3 \le qI_0I_1 \tag{2.6}$$

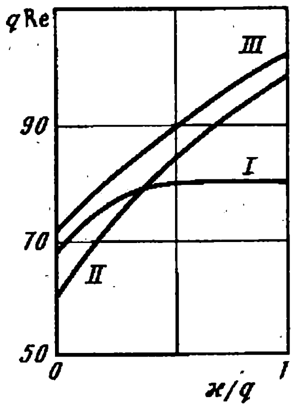
Из (2.4) и (2.6) следует

Теорема 1. Пусть $\alpha(s, \mathrm{Re}, \varkappa)$ — произвольное собственное число обобщенной задачи Орра — Зоммерфельда (ОЗОЗ) для течения Куэтта. Тогда

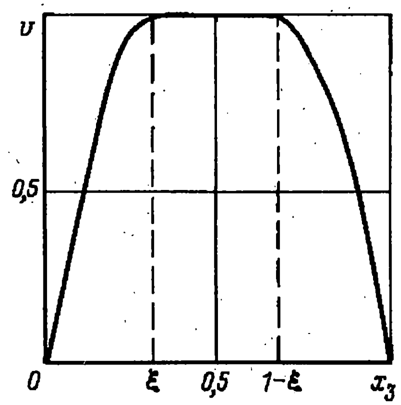
$$\alpha_* \le \frac{qsI_0I_1\,\mathrm{Re} - (I_2^2 + 2s^2I_1^2 + s^4I_0^2 + 4\varkappa s^2I_v^2)}{(I_1^2 + s^2I_0^2)\,\mathrm{Re}} \tag{2.7}$$

Достаточным условием устойчивости движения, следовательно, является отрицательность правой части неравенства (2.7).

Аналогичное утверждение в теории устойчивости ньютоновских несжимаемых жидкостей было получено еще в [16].



Фиг. 1



Фиг. 2

Следствие 1.1. Если

$$q\,\mathrm{Re} < 2\,\frac{4\pi^4 + 2\pi^2 s^2\,(1 + 2\varkappa/q) + s^4}{\pi^2 + s^2} \tag{2.8}$$

то $\alpha_* < 0$.

Доказательство следует из теоремы 1, очевидного соотношения $sI_0 I_1 \leq \leq (I_1^2 + s^2 I_0^2)/2$ и изопериметрических неравенств для квадратичных функционалов (неравенств Фридрихса [1, 15]): $I_1^2 \geq \pi^2 I_0^2$, $I_2^2 \geq 4\pi^2 I_1^2$, $qI_v^2 \geq I_1^2$.

Для того чтобы получить нижнюю оценку критического числа Рейнольдса Re^*, необходимо найти минимальное значение правой части (2.8) по s. Проводя соответствующий анализ, придем к следующему результату: если $\varkappa \geq q/2$, то $\mathrm{Re}^* > 8\pi^2/q$. и самыми медленно затухающими будут длинноволновые возмущения $s \to 0$; если $0 \leq \varkappa < q/2$, то $\mathrm{Re}^* > 4\pi^2\,[2\varkappa/q + (3 - 4\varkappa/q)^{1/2}]/q$ и самыми медленно затухающими будут гармоники $s = \pi\,[(3 - 4\varkappa/q)^{1/2} - 1]^{1/2}$.

На плоскости ($\varkappa/q$; $q\,\mathrm{Re}$) (фиг. 1) кривая *1* построена по достаточным оценкам устойчивости, выведенным выше. Для вязкого предела ($\varkappa = 0$) $\mathrm{Re}_0^* > 68{,}38$.

Следствие 1.2. Если

$$q\,\mathrm{Re} < 2\pi\lambda_1/s + 2\pi s\,(1 + 2\varkappa/q) \tag{2.9}$$

где $\lambda_1 \approx 22{,}373$ — наименьший положительный корень уравнения $\cos\sqrt{\lambda_1} \times \times \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1} = 1$, то $\alpha_* < 0$.

Доказательство аналогично предыдущему, в нем надо использовать еще одно неравенство Фридрихса $I_2^2 \geq \lambda_1^2 I_0^2$.

Найдем нижнюю оценку критического числа Рейнольдса Re^*, пользуясь следствием 1.2: $q\,\mathrm{Re}^* > 4\pi\,[\lambda_1\,(1 + 2\varkappa/q)]^{1/2}$. При этом самыми медленно затухающими будут гармоники $s = [\lambda_1/(1 + 2\varkappa/q)]^{1/2}$. Кривая $q\,\mathrm{Re} = 4\pi\,[\lambda_1\,(1 + 2\varkappa/q)]^{1/2}$ построена на фиг. 1 (кривая *2*). В вязком пределе ($\varkappa = 0$) будем иметь $\mathrm{Re}_0^* > 59{,}43$.

Следствие 1.3. Если

$$q\,\mathrm{Re} < 2\pi\lambda_1/s + 4\pi\varkappa s/q + 2\sqrt{2}\,s^2 \tag{2.10}$$

то $\alpha_* < 0$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.2.

По данной оценке самым медленно затухающим возмущением будет возмущение с волновым числом s_-, являющимся корнем уравнения $s^3 + (\pi/\sqrt{2})\varkappa s^2/q - \pi\lambda_1/(2\sqrt{2}) = 0$.

Следовательно, нижняя оценка имеет вид $q\,\mathrm{Re}^* > 2\pi\lambda_1/s_- + 4\pi\varkappa s_-/q + 2^{3/2}s^2$. Соответствующая кривая (*3*) изображена на фиг. 1, при $\varkappa \to 0$ она стремится к $q\,\mathrm{Re} = 72{,}25$ (вязкий предел).

Достаточные интегральные оценки устойчивости (2.8)—(2.10) независимы, поэтому можно дать общую нижнюю оценку критического числа Рейнольдса. При фиксированном (см. фиг. 1) $\varkappa/q$:

$$q\,\mathrm{Re}^* > \max\{1,\ 2,\ 3\} \tag{2.11}$$

т. е. область параметров ($\varkappa/q$; $q\,\mathrm{Re}$) под верхней огибающей кривых *1 — 3* — область абсолютной устойчивости вязкопластического течения Куэтта. Для течения Куэтта в узком смысле ($v = x_3$) везде необходимо положить $q = 1$. Как видно, все три кривые *1 — 3* являются неубывающими, что позволяет сделать важный вывод о стабилизирующем влиянии пластичности в данной задаче.

Обратимся теперь к фазовой частоте колебаний α_{**} (2.5). Ни в (2.5), ни в выражение для Q_* пластические составляющие не входят, поэтому следующая теорема будет справедлива как для вязких жикостей, так и для вязкопластических тел. Сформулируем ее как и в [1].

Теорема 2. Пусть $\alpha(s, \mathrm{Re}, \varkappa)$ — произвольное собственное число ОЗОЗ для течения Куэтта. Тогда

$$v_{\min} < \frac{\alpha_{**}}{s} < v_{\max} + \frac{v''_{\max}}{\pi^2 + 4s^2}, \quad v''_{\min} \geq 0$$

$$v_{\min} + \frac{2v''_{\min}}{\pi^2 + 4s^2} < \frac{\alpha_{**}}{s} < v_{\max} + \frac{2v''_{\max}}{\pi^2 + 4s^2}, \quad v''_{\min} \leq 0 \leq v''_{\max}$$

$$v_{\min} + \frac{2v''_{\min}}{\pi^2 + 4s^2} < \frac{\alpha_{**}}{s} < v_{\max}, \quad v''_{\max} \leq 0$$

Доказательство полностью переносится из [1].

Заметим, что, как и в вязких течениях, фазовая скорость α_{**}/s может выходить за пределы основного потока $[v_{\min};\ v_{\max}]$.

3. Течение Пуазейля. Невозмущенное вязкопластическое течение Пуазейля в плоском канале с постоянным перепадом давления Δp имеет вид [17]:

$$v = x_3(2\xi - x_3)/\xi^2, \quad 0 < x_3 < \xi \tag{3.1}$$

$$v = (1 - x_3)\,[2\xi - (1 - x_3)]/\xi^2, \quad 1 - \xi < x_3 < 1$$

Здесь $\xi = 1/2 - \tau/\Delta p$, область $\Omega_r = \{\xi < x_3 < 1 - \xi\}$ занята жесткой зоной, которая присутствует всегда и занимает всю область $\Omega = \{0 < x_3 < 1\}$, если $\Delta p < 2\tau$. Характерная скорость V при обезразмеривании в (3.1) выбрана так, чтобы $v(\xi) = 1$ (фиг. 2), т. е. $V = \Delta p\xi^2/(2\mu)$.

В силу симметрии основного течения относительно плоскости $x_3 = 1/2$ достаточно исследовать его устойчивость в области $\Omega_\xi = \{0 < x_3 < \xi\}$. Как и в п. 2, будем полагать, что вместо (3.1) в Ω_ξ имеется произвольная монотонно возрастающая непрерывно дифференцируемая функция $v(x_3)$ такая, что $|v'| \leq q$ и $\int \chi dx_3/|v'| < \infty$ $(0 \leq x_3 \leq \xi)$ для любой функции $\chi(x_3)$, удовлетворяющей условию $\chi'(\xi) = 0$.

Граничные условия в краевой задаче возмущенного движения для данного случая имеют вид [10]:

$$x_3 = 0: \quad \varphi = \varphi' = 0, \quad x_3 = \xi: \quad \varphi' = 0, \quad \varphi'' + s\left(s - \frac{iv''}{\alpha + isv}\right)\varphi = 0 \tag{3.2}$$

Они выписаны с учетом движения жесткой зоны в процессе потери устойчивости.

Пусть, как и ранее, φ — элемент комплекснозначного гильбертова пространства $\bar{H}_2(\Omega_\xi)$ с нормой

$$\|\varphi\| = \left(\int_0^\xi |\varphi''|^2 \, dx_3\right)^{1/2} \tag{3.3}$$

имеющий четыре непрерывные производные. Умножим обе части равенства (1.1) на $\bar{\varphi}$ и проинтегрируем по x_3 в пределах от 0 до ξ. Учитывая граничные условия (3.2), получим

$$I_2^2 + 2s^2 I_1^2 + s^4 I_0^2 + 4\varkappa s^2 I_v^2 + \left(\frac{isv''}{\alpha + isv}|\varphi|^2\right)'(\xi) -$$

$$- s^2 (|\varphi|^2)'(\xi) = -\alpha(I_1^2 + s^2 I_0^2)\,\mathrm{Re} - isQ\,\mathrm{Re} \tag{3.4}$$

$$I_m^2 = \int_0^\xi |\varphi^{(m)}|^2 \, dx_3 \quad (m = 0, 1, 2), \quad I_v^2 = \int_0^\xi \frac{|\varphi'|^2}{|v'|} \, dx_3$$

Величина Q принимает то же значение, что и в формулах (2.3). Заметим, что $I_v^2 < \infty$ в силу того, что $\varphi'(\xi) = 0$ и оговоренных выше требований на $v(x_3)$. Разделяя действительную и мнимую части в (3.4), получим

$$I_2^2 + 2s^2 I_1^2 + s^4 I_0^2 + 4\varkappa s^2 I_v^2 + \left[\frac{sv''(\alpha_{**} + sv)}{\alpha_*^2 + (\alpha_{**} + sv)^2}|\varphi|^2\right]'(\xi) -$$

$$- s^2(|\varphi|^2)'(\xi) = -\alpha_*(I_1^2 + s^2 I_0^2)\,\mathrm{Re} + sQ_{**}\,\mathrm{Re} \tag{3.5}$$

$$\left[\frac{sv''\alpha_*}{\alpha_*^2 + (\alpha_{**} + sv)^2}|\varphi|^2\right]'(\xi) = -\alpha_{**}(I_1^2 + s^2 I_0^2)\,\mathrm{Re} - sQ_*\,\mathrm{Re}$$

Эту систему можно рассматривать как систему двух уравнений для α_* и α_{**}; после чего подробный анализ должен быть проведен с основным параметром устойчивости α_*.

Ограничимся рассмотрением случая, когда граница жесткой зоны в возмущенном движении деформируется незначительно, и можно принять, что ее уравнение в любой момент времени имеет вид $x_3 = \xi$. Такое ограничение допустимо для медленного движения в задачах, связанных, например, с деформацией пластов земной коры, грунтов и т. п. Вместо условий (3.2) при $x_3 = \xi$ тогда будем иметь [10]:

$$x_3 = \xi: \quad \varphi' = 0, \quad \varphi'' + s^2\varphi = 0 \tag{3.6}$$

а система (3.5) перепишется в виде

$$\alpha_* = \frac{1}{I_1^2 + s^2 I_0^2}\left[sQ_{**} - \frac{I_2^2 + 2s^2 I_1^2 + s^4 I_0^2 + 4\varkappa s^2 I_v^2 - s^2(|\varphi|^2)'(\xi)}{\mathrm{Re}}\right] \tag{3.7}$$

$$\alpha_{**} = -sQ_*/(I_1^2 + s^2 I_0^2) \tag{3.8}$$

Теорема 3. Пусть $\alpha(s, \mathrm{Re}, \varkappa)$ — произвольное собственное число ОЗОЗ для течения Пуазейля. Тогда

$$\alpha_* \le \frac{qs\,\mathrm{Re} - [I_2^2 + 2s^2 I_1^2 + s^4 I_0^2 + 4\varkappa s^2 I_v^2 - s^2 (|\varphi|^2)'(\xi)}{(I_1^2 + s^2 I_0^2)\,\mathrm{Re}} \tag{3.9}$$

Доказательство данной теоремы непосредственно следует из неравенства Шварца [15] в пространстве $\bar{H}_2(\Omega_\xi)$ с нормой (3.3):

$$|Q_{**}| \le \int_0^\xi |v'|\,|\varphi'|\,|\varphi|\,dx_3 \le qI_0 I_1 \tag{3.10}$$

Для вывода следствий теоремы 3 воспользуемся неравенствами Фридрихса [1, 15]

$$\xi^2 I_1^2 \ge \pi^2 I_0^2, \quad qI_v^2 \ge I_1^2, \quad I_2^2 - s^2(|\varphi|^2)'(\xi) \ge \lambda_2^2(s)\, I_1^2$$

$$I_2^2 - s^2(|\varphi|^2)'(\xi) \ge \lambda_3^2(s)\, I_0^2, \quad \inf_s \lambda_2(s) = \pi/\xi, \quad \inf_s \lambda_3(s) = \pi^2/\xi^2$$

которые получаются из решения соответствующих изопериметрических краевых задач. Здесь $\lambda_2(s)$ — минимальный положительный корень уравнения $s^2\lambda\xi = (2s^2 - \lambda^2)\,\mathrm{tg}\,(\lambda\xi/2)$, а $\lambda_3(s)$ — минимальный положительный корень уравнения $\lambda \sin(\sqrt{\lambda}\,\xi)\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{\lambda}\,\xi) = s^2(1 - \cos(\sqrt{\lambda}\,\xi)\,\mathrm{ch}\,(\sqrt{\lambda}\,\xi))$.

Следствие 3.1. Если

$$q\,\mathrm{Re} < 2\,\frac{\lambda_2^2(s)\,\pi^2 + 2\pi^2(1 + 2\varkappa/q)\,s^2 + s^4\xi^2}{\pi^2 + s^2\xi^2} \tag{3.11}$$

то $\alpha_* < 0$.

Следствие 3.2. Если

$$q\,\mathrm{Re} < \frac{\pi^3}{\xi^3 s} + 2\pi s\left(\frac{1}{\xi} + \frac{2\varkappa}{q\xi}\right) \tag{3.12}$$

то $\alpha_* < 0$.

Следствие 3.3. Если

$$q\,\mathrm{Re} < \frac{\pi^3}{\xi^3 s} + 2s^2\sqrt{2} + \frac{4\varkappa\pi s}{q\xi} \tag{3.13}$$

то $\alpha_* < 0$.

Для получения нижних оценок критического числа Рейнольдса Re* найдем минимальные по s значения правых частей неравенств (3.11)—(3.13).

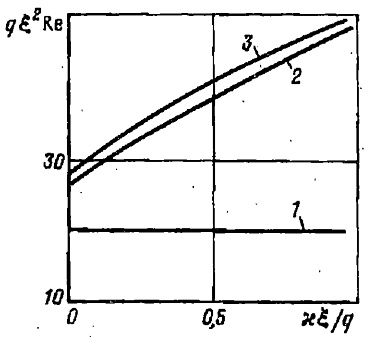
Из (3.11) следует, что $\mathrm{Re}^* > 2\pi^2/q\xi^2$ и самые медленно затухающие возмущения — длинноволновые ($s \to 0$). Неравенство (3.12) дает $\mathrm{Re}^* > 2\pi^2\,[2(1 + 2\varkappa/q)]^{1/2}/(q\xi^2)$, а неравенство (3.13) — $q\,\mathrm{Re}^* > \pi^3/(\xi^3 s_-) + 4\varkappa\pi s_-/(q\xi) + 2^{3/2}s_-^2$, где s_- — корень уравнения $4s^3\sqrt{2} + 4\pi\varkappa s^2/q - \pi^3/\xi^3 = 0$.

На фиг. 3 по полученным выше оценкам построены три достаточные границы устойчивости *1* — *3*. В силу независимости следствий 3.1—3.3 можно дать общую нижнюю оценку критического числа Рейнольдса

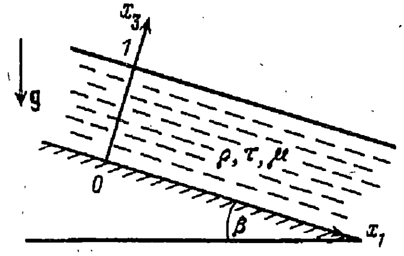
$$q\xi^2\,\mathrm{Re}^* > \max\{1,\ 2,\ 3\} \tag{3.14}$$

Для течения Пуазейля в узком смысле ($v(x_3)$ выбирается в виде (3.1)) необходимо везде положить $q = 2/\xi$. Как и для течения Куэтта, все три кривые на фиг. 3 являются неубывающими, что говорит о стабилизирующем действии пластичности по отношению к идеально вязкому течению. Однако прямого вязкого предела здесь нет, поскольку граничные условия (3.2) при $\varkappa \to 0$ не сводятся к классическим условиям вязкого течения Пуазейля (2.1).

4. Движение по наклонной плоскости в поле силы тяжести *g*. Стационарное



Фиг. 3



Фиг. 4

движение тяжелого вязкопластического слоя по наклонной плоскости (фиг. 4) характеризуется следующим профилем скоростей

$$v = \frac{x_3\,(2\xi - x_3)}{\xi^2}, \qquad 0 < x_3 < \xi, \qquad \xi = 1 - \frac{\tau\,\mathrm{Fr}}{\sin\beta} \tag{4.1}$$

где $\mathrm{Fr} = V^2/(gh)$ — число Фруда. Область $\Omega_r = \{\xi < x_3 < 1\}$ занята жесткой зоной, движущейся как твердое тело со скоростью $v(\xi) = 1$. В случае $\tau\,\mathrm{Fr} > \sin\beta$ слой не деформируется и $\Omega_r \equiv \Omega$. Характерная скорость V при обезразмеривании в (4.1) выбрана следующим образом: $V = \rho g\,(\xi h)^2 \sin\beta/(2\mu)$.

Как видно, основное течение (4.1) полностью совпадает с течением Пуазейля (3.1) в области $\{0 < x_3 < \xi\}$, кроме того, граничные условия ОЗОЗ (3.2) имеют место и здесь. Следовательно, математические постановки краевых задач возмущенного движения в п. 3, 4 идентичны и все оценки устойчивости течения Пуазейля могут быть перенесены на течение тяжелого слоя по наклонной плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Joseph D. D.* Eigenvalue bounds for the Orr — Sommerfeld equation. Pt 1//J. Fluid Mech. 1968. V. 33. Pt 3. P. 617—621.
2. *Joseph D. D.* Eigenvalue bounds for the Orr — Sommerfeld equation. Pt 2//J. Fluid Mech. 1969. V. 36. Pt 4. P. 721—734.
3. *Yin C.-S.* Note on eigenvalue bounds for the Orr — Sommerfeld equation//J. Fluid Mech. 1969. V. 38. Pt 2. P. 273—278.
4. *Drazin P. G.* On stability of parallel flow of an incompressible fluid of variable density and viscosity//Proc. Cambr. Phil. Soc. 1962. V. 58. No. 4. P. 646—661.
5. *Козырев О. Р., Степанянц Ю. А.* Об оценке параметров нарастающих возмущений в сдвиговых течениях вязкой стратифицированной жидкости//ПММ. 1989. Т. 53. № 3. С. 522—525.
6. *Ильюшин А. А.* Деформация вязкопластических тел//Учен. зап. МГУ. Механика. 1940. Т. 39. С. 3—81.
7. *Магомедов О. Б., Победря Б. Е.* Некоторые задачи вязкоупругопластического течения//Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып 4. С. 152—169.
8. *Bukowski R., Wojewodzki W.* Dynamic buckling of viscoplastic spherical shell//Int. J. Solids Struct. 1984. V. 20. No. 8. P. 761—776.
9. *Ержанов Ж. С., Егоров А. К.* Устойчивость неоднородного деформирования нелинейных тел. Алма-Ата: Наука, 1987. 278 с.
10. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость двумерных и трехмерных вязкопластических течений и обобщенная теорема Сквайра//Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 117—123.

11. *Козырев О. Р., Степанянц Ю. А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости//Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. 1991. Т. 25. С. 3—89.
12. *Betchov R., Criminale W. O.* Stability of Parallel Flows. L.; N. Y.: Acad. Press, 1967. 330 p.
13. *Иванилов Ю. П.* Об устойчивости плоскопараллельного течения вязкой жидкости над наклонным дном//ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 380—381.
14. *Шкадов В. Я.* К образованию волн на поверхности вязкой тяжелой жидкости под действием касательного напряжения//Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 133—137.
15. *Rektorys K.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Dordrecht: Reidel Publ. Co., 1980. 571 p.
16. *Synge J. L.* Hydrodynamical stability//Semicentenn. Publ. Amer. Math. Soc. 1938. V. 2. P. 227—269.
17. *Смольский Б. М., Шульман З. П., Гориславец В. М.* Реодинамика и теплообмен нелинейно-вязкопластичных материалов. Минск: Наука и техника, 1970. 446 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.II.1992