

УДК 539.374

© 1994 г. В. Н. КУКУДЖАНОВ

О СОУДАРЕНИИ СТЕРЖНЕЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ИЗ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С УПРОЧНЕНИЕМ

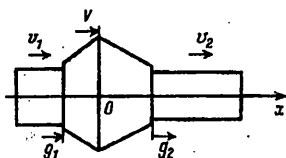
Впервые жесткопластическая постановка задачи о соударении была дана Дж. Тейлором, который рассмотрел удар стержня о жесткую преграду и на основе полученного решения предложил способ экспериментального определения динамического предела текучести [1]. Большой вклад в развитие такой постановки задач соударения внес А. Ю. Ишлинский [2, 3], который предложил учитывать динамические свойства материала на основе вязкопластической модели. В работе [3] была решена задача об ударе стержня из жесткоидеальновязкопластического материала о жесткую преграду. В работах [4] и [5] были даны решения этой же задачи для упругопластического материала. В [5] было проведено сравнение с жесткопластическим решением Тейлора и показано, что она хорошо аппроксимирует упругопластическое, сглаживая скачки в распределении остаточных деформаций, возникающие за счет упругих волн.

В [6] исследовалось время соударения с жесткой преградой стержней из упругопластического и упруговязкопластического материалов численным методом и проводилось сравнение с экспериментом. Известно очень небольшое число аналитических неавтомодельных решений для задач об ударе нелинейных стержней конечной длины, полученных еще в 50—60-х годах. В настоящее время эти задачи решаются, в основном, численными методами в более сложной одномерной постановке. Однако, несмотря на огромные возможности современной вычислительной техники необходимость в простых и, особенно, аналитических решениях задач такого класса не пропала, параметрический анализ численными методами, а тем более оптимизация по параметрам затруднительны, даже в одномерной постановке.

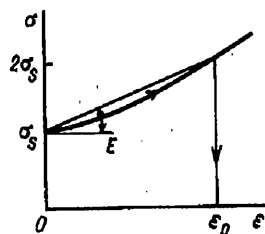
В настоящей работе получено точное решение неупругого соударения двух стержней задачи в жесткопластической постановке. В случае выпуклой диаграммы материала $\sigma - \epsilon$, решение задачи сведено к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, существование и единственность которой доказаны. Приведено ее численное решение. Для вогнутой диаграммы при кусочно-линейной аппроксимации получено простое аналитическое решение.

1. Постановка задачи. Рассмотрим соударение двух стержней с разными начальными длинами l_{01} и l_{02} и поперечным сечением F_{01} и F_{02} , двигающимися со скоростями v_{01} и v_{02} вдоль оси x (фиг. 1). Движение стержня будем предполагать одномерным, т. е. напряжения σ , скорости v и деформации ϵ считаются осредненными по сечению. Площади поперечных сечений в процессе движения изменяются, т. к. скорости соударения v_{01} и v_{02} предполагаются достаточно большими, чтобы вызвать значительные пластические деформации, при которых можно пренебречь упругими деформациями и исходить из модели жесткопластического упрочняющегося материала. Это позволяет существенно упростить задачу.

Пусть для каждого из стержней известны условные кривые одноосного сжатия $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ ($i = 1, 2$), где напряжения σ_i и деформации ϵ_i отнесены соответственно к начальным F_{0i} и l_{0i} . Если эти кривые $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ обращены выпуклостью к оси ϵ , то в материале большие по величине деформации ϵ распространяются быстрее, чем меньшие и в стержне образуются ударные волны [1]. Тогда при соударении стержней в момент $t=0$ от сечения соударения в разные стороны будут распространяться ударные волны со скоростями g_i (фиг. 1), оставляя за собой



Фиг. 1



Фиг. 2

разгружающийся материал, т. е. нагружение будет мгновенным на фронте волны, а за ее фронтом будет происходить разгрузка. Перед фронтом волны материал будет находиться в жестком состоянии на пределе текучести материала $\sigma_t = \sigma_{st}$. За фронтом волны напряжение σ_t по мере движения фронта будет падать и в каждом сечении будет своя остаточная деформация, которая после прохождения фронта остается замороженной в соответствии с кривой разгрузки (фиг. 2). Материал за фронтом волны будет находиться в жестком состоянии и следовательно напряженное состояние в нем остается неопределенным, но все остальные величины v_i , ϵ_i , F_i , g_i и их изменения во времени могут быть найдены, исходя из законов сохранения на фронтах ударных волн и уравнений движения для жестких частей стержней.

Из закона сохранения массы на фронте ударной волны, распространяющейся по стержню переменного сечения F_i имеем

$$[\rho F (g - v)] = 0 \quad (1.1)$$

Квадратными скобками обозначается скачок величины на фронте ударной волны. Примем за положительные направления движения ударных волн g_i и направления скоростей стержней v_i такие, как показаны на фиг. 1. Можно зафиксировать знаки скоростей, положив $g_1 < 0$, а $g_2 > 0$.

Считая материал стержня несжимаемым $\rho_1 = \rho_0$ и обозначая скорость движения деформированных частей стержней, которые двигаются как жесткое целое до того момента времени пока не произойдет отскок, через V , получим

$$F_{01} (g_1 - v_1) = F_1 (g_1 - V) \quad (1.2)$$

$$F_{02} (g_2 - v_2) = F_2 (g_2 - V)$$

На основании закона сохранения количества движения на фронте ударной волны в стержне имеем

$$[\rho F v (g - v)] + [P] = 0 \quad (1.3)$$

где через P обозначена сила, действующая в сечении стержня. Учитывая, что всюду используются условные напряжения, получаем из (1.3) соответственно для первого и второго стержней

$$v_1 F_{01} (g_1 - v_1) = V F_1 (g_1 - V) - [\sigma_1 F_{01}] \quad (1.4)$$

$$v_2 F_{02} (g_2 - v_2) = V F_2 (g_2 - V) - [\sigma_2 F_{02}]$$

Эти соотношения можно преобразовать, исключив из них с помощью (1.2) отношения F_i/F_{0i} :

$$\rho_1 (v_1 - V) (g_1 - v_1) = -[\sigma_1] = \sigma_{1s} + \sigma_1 \quad (\sigma_{1s} > 0, \sigma_1 < 0) \quad (1.5)$$

$$\rho_2 (v_2 - V) (g_2 - v_2) = -[\sigma_2] = \sigma_{2s} + \sigma_2$$

где учтено, что материал перед фронтом волны находится постоянно на пределе

текучести. Это свойство следует из рассмотрения распространения волн на основе упругопластической модели: перед фронтом пластической волны всегда распространяется упругий предвестник, напряженное состояние, которого соответствует пределу текучести материала.

Изменение площадей поперечного сечения можно выразить через продольную деформацию ε , используя условие несжимаемости материала в виде

$$F_0 dl_0 = F dl \quad (1.6)$$

где dl_0 длина элемента стержня до деформации, а dl после нее.

$$\varepsilon = (dl - dl_0)/dl_0 = F_0/F - 1 \quad (1.7)$$

Откуда находим, что

$$\varepsilon_1 = (v_1 - V)/(g_1 - v_1), \quad \varepsilon_2 = (v_2 - V)/(g_2 - v_2) \quad (1.8)$$

Составим теперь уравнения для жестких частей стержней. Обозначим переменные длины недеформированных частей в момент времени t через l_i (фиг. 1). Тогда можно записать следующие движения:

$$dl_1/dt = (g_1 - v_1), \quad dl_2/dt = -(g_2 - v_2) \quad (1.9)$$

Уравнения для недеформированных жестких частей стержней запишутся в таком виде

$$\rho_1 l_1 dv_1/dt = -\sigma_{1s}, \quad \rho_2 l_2 dv_2/dt = \sigma_{2s} \quad (1.10)$$

Уравнение движения деформированной части, двигающаяся со скоростью V (фиг. 1) запишется так

$$M dV/dt = -(\sigma_1 F_{01} - \sigma_2 F_{02}) \quad (1.11)$$

где масса M изменяется в процессе движения и равна первоначальной массе стержней за вычетом массы частей, которые в момент времени t остаются жесткими $M = \rho_1 (l_{01} - l_1) F_{01} + \rho_2 (l_{02} - l_2) F_{02}$. Уравнения (1.2)–(1.11) образуют замкнутую систему уравнений, которую однако, прежде чем решать, целесообразно упростить, проведя некоторые преобразования.

2. Преобразование и решение уравнений в случае выпуклой к оси ε диаграммы. Преобразуем соотношения на разрывах так, чтобы все величины выразить через скорости жестких частей, это позволит существенно сократить число неизвестных и получить систему уравнений только относительно скоростей v_1 , v_2 и V . Определим из уравнений (1.5) и (1.8) скорости ударных волн

$$(g_1 - v_1)^2 = \frac{1}{\rho_1 \varepsilon_1} (\sigma_1 + \sigma_{s1}), \quad (g_2 - v_2)^2 = \frac{1}{\rho_2 \varepsilon_2} (\sigma_2 + \sigma_{s2}) \quad (2.1)$$

Примем степенную зависимость между напряжениями и деформациями с тремя независимыми параметрами σ_{si} , ε_{0i} , и n_i , в следующем виде

$$\sigma_1 = -\sigma_{s1} (1 + |\varepsilon/\varepsilon_{01}|^n), \quad \sigma_2 = -\sigma_{s2} (1 + |\varepsilon/\varepsilon_{02}|^k) \quad (2.2)$$

$$n \geq 1, \quad k \geq 1$$

Для дальнейшего удобно ввести характерные модули E_i и скорости c_i , v_{si} :

$$E_i = \sigma_{si}/\varepsilon_{0i}, \quad c_i = (E_i/\rho_i)^{1/2}, \quad v_{si} = c_i \varepsilon_{0i}$$

Перейдем к безразмерным величинам

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_{si}}, \quad \bar{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{0i}}, \quad \bar{v}_i = \frac{v_i}{v_{si}}, \quad \bar{t} = \frac{tc_1}{l_{01}} \quad (2.3)$$

Тогда уравнения (2.1) и (2.2) примут вид

$$(\bar{g}_1 - \bar{v}_1)^2 = \varepsilon_{01}^{-2} |\bar{\varepsilon}_1|^{n-1}, \quad (\bar{g}_2 - \bar{v}_2)^2 = \left(\frac{c_2}{c_1 \varepsilon_{01}} \right)^2 \left| \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_{02}} \bar{\varepsilon}_2 \right|^{k-1} \quad (2.4)$$

$$\bar{\sigma}_1 = - (1 + |\bar{\varepsilon}_1|^n), \quad \bar{\sigma}_2 = - \frac{\sigma_{s2}}{\sigma_{s1}} \left(1 + \left| \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_{02}} \bar{\varepsilon}_2 \right|^k \right)$$

Исключая из (1.8) с помощью (2.4) скорости ударных волн получим

$$|\bar{\varepsilon}_1|^{(n+1)/2} = \bar{v}_1 - \bar{V}, \quad \bar{v}_2 - \bar{V} = \eta^{-1} \left| \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_{02}} \bar{\varepsilon}_2 \right|^{(k+1)/2}, \quad \eta = \frac{v_{s1}}{v_{s2}}$$

Откуда получаем явные выражения для деформаций и напряжений через скорости

$$|\bar{\varepsilon}_1| = (\bar{v}_1 - \bar{V})^{2/(n+1)}, \quad \left| \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_{02}} \bar{\varepsilon}_2 \right| = [(\bar{V} - \bar{v}_2) \eta]^{2/(k+1)}$$

$$\bar{\sigma}_1 = -1 - (\bar{v}_1 - \bar{V})^p, \quad \bar{\sigma}_2 = - \frac{\sigma_{s2}}{\sigma_{s1}} \{1 + [(\bar{V} - \bar{v}_2) \eta]^q\} \quad (2.5)$$

$$(\bar{g}_1 - \bar{v}_1) = - \varepsilon_{01}^{-1} (\bar{v}_1 - \bar{V})^r, \quad (\bar{g}_2 - \bar{v}_2) = \frac{c_2}{c_1 \varepsilon_{01}} [(\bar{V} - \bar{v}_2) \eta]^s$$

$$\frac{2n}{n+1} = p, \quad \frac{2k}{k+1} = q, \quad \frac{n-1}{n+1} = r, \quad \frac{k-1}{k+1} = s$$

Подставляя выражения (2.5) в дифференциальные уравнения для жестких частей стержней (1.9), получим

$$\frac{d\bar{l}_1}{dt} = - (\bar{v}_1 - \bar{V})^r, \quad \frac{d\bar{l}_2}{dt} = - \frac{c_2}{c_1} [(\bar{V} - \bar{v}_2) \eta]^s \quad (2.6)$$

Уравнение (1.11) примет такой вид

$$\left[1 - \bar{l}_1 + \frac{\rho_2 F_{02}}{\rho_1 F_{01}} \left(\frac{l_{02}}{l_{01}} - \bar{l}_2 \right) \right] \frac{d\bar{V}}{dt} = [1 + (\bar{v}_1 - \bar{V})^p] - \frac{F_{02} \sigma_{s2}}{F_{01} \sigma_{s1}} \{1 + [(\bar{V} - \bar{v}_2) \eta]^q\} \quad (2.7)$$

Преобразуя уравнения (1.10) к безразмерным переменным (2.3)

$$\bar{l}_1 \frac{d\bar{v}_1}{dt} = -1, \quad \bar{l}_2 \frac{d\bar{v}_2}{dt} = \left(\frac{v_{s2} c_2}{v_{s1} c_1} \right) = \eta^{-1} \frac{c_2}{c_1} \quad (2.8)$$

получим нелинейную систему пяти уравнений (2.6)–(2.8) относительно вектора U с компонентами l_1, l_2, v_1, v_2, V , которую можно записать в векторном виде

$$dU/dt = Q(U) \quad (2.9)$$

В уравнениях (2.6)–(2.8) в дальнейшем над безразмерными величинами опущен знак черты. Для решения необходимо использовать начальные условия. Для функций v_i и l_i в безразмерных переменных получаем

$$\text{при } t=0: v_i = v_{i0}, \quad l_1 = 1, \quad l_2 = l_{02}/l_{01} \quad (2.10)$$

Для определения значения $V(0) = V_0$ необходимо рассмотреть задачу о распаде разрыва, образующегося в момент соударения стержней. При $t \geq +0$, после распада начального разрыва, в сечении $x=0$ образуется контактный разрыв, на котором должны выполняться условия

$$x=0, \quad \sigma_{01} F_{01} = \sigma_{02} F_{02}, \quad V(t, +0) = V(t, -0) \quad (2.11)$$

Вправо и влево от сечения $x=0$ распространяются ударные волны, на фронтах

которых выполняются соотношения (1.1)—(1.8) при $t = +0$ с учетом условий (2.10).

Поскольку выше уже были определены напряжения σ_1 и σ_2 за фронтами ударных волн для произвольного момента времени t формулами (2.5), то можно воспользоваться ими при $t = +0$, положив $\bar{v}_i = v_{0i}$, найдем σ_{0i} . Подставляя в (2.11), получим следующее уравнение относительно V_0 :

$$Q_5(U_0) = 1 + (v_{01} - V_0)^p - \frac{F_{02}\sigma_{s2}}{F_{01}\sigma_{s1}} \{1 + [(V_0 - v_{02})\eta]^q\} = 0 \quad (2.12)$$

Это нелинейное уравнение в интервале $v_{01} \geq V_0 \geq v_{02}$ имеет единственное решение и может быть решено численно методом последовательных приближений Ньютона

$$\begin{aligned} \Delta V_0^{(i+1)} &= \left\{ 1 + (v_{01} - V_0^{(i)})^p - \frac{F_{02}\sigma_{s2}}{F_{01}\sigma_{s1}} [1 + ((V_0^{(i)} - v_{02})\eta)^q] \right\} [F_5'(V_0^{(i)})]^{-1} \\ Q_5'(V_0^{(i)}) &= \left\{ -\frac{2n}{n+1} (v_{01} - V_0^{(i)})^{p-1} - \frac{F_{02}\sigma_{s2}\eta}{F_{01}\sigma_{s1}} \frac{2k}{k+1} [(V_0^{(i)} - v_{02})\eta]^{q-1} \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

где индекс i соответствует номеру приближения. Хорошее начальное приближение $V_0^{(0)}$ можно получить в аналитическом виде, решив уравнение (2.12) при $n = k = 1$. Это соответствует замене нелинейных значимостей $\sigma_i - \varepsilon_i$ линейными с секущими модулями E_i :

$$V_0^{(0)} = (1 + \alpha)^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{\eta} + v_{01} + v_{02}\alpha \right), \quad \alpha = \frac{F_{02}c_2\rho_2}{F_{01}c_1\rho_1} \quad (2.14)$$

После того как определено начальное условие, необходимо решить задачу Коши для системы (2.9). Нетрудно показать, что правая часть $F(U)$ при $n \geq 1$, $k \geq 1$ непрерывна вместе со своими производными в интервале $0 < t \leq t_0$, кроме точки $t = 0$, где имеется устранимая особенность типа $\frac{0}{0}$. Переходя к пределу при $t \rightarrow 0$, находим уравнение для определения $\dot{V}(0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dV}{dt} = \dot{V}_0 &= \left\{ -\frac{2n}{n+1} (v_{01} - V_0)^{p-1} + \frac{2k}{k+1} \frac{\alpha}{\eta} \frac{c_2}{c_1} \frac{l_{01}}{l_{02}} [\eta (V_0 - v_{02})]^{q-1} \right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{3n+1}{n+1} (v_{01} - V_0)^{p-2} + \frac{3k+1}{k+1} \alpha [\eta (V_0 - v_{02})]^{q-2} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Итак доказаны условия существования и единственности решения рассматриваемой задачи.

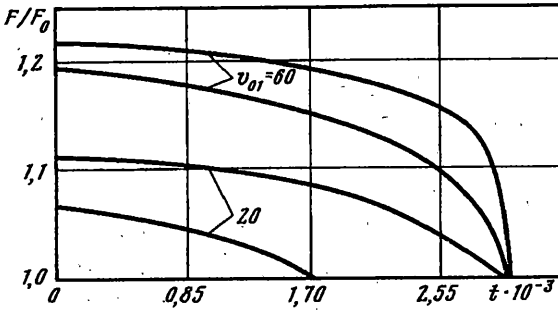
Система уравнений (2.10)—(2.13) в виде (2.9) легко интегрируется по схеме второго порядка точности $U^{n+1} = (U^n + Q(U^n + U^{n+1}))/2$. Момент времени t_0 определяется из условия вырождения ударной волны в одном из стержней, например, во втором, когда $\sigma_2 = -\sigma_{2s}$ и $V = v_2$. Начиная с этого момента для $t \geq t_0$ масса жесткой части второго стержня остается неизменной и движется вместе с деформированной частью стержней со скоростью V .

Система уравнений (2.6)—(2.7) переходит в систему 3-х уравнений относительно неизвестных v_1 , l_1 и V . Уравнение (2.7) преобразуется в следующее

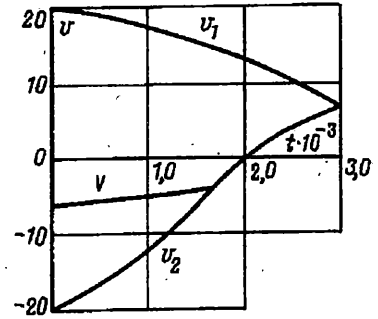
$$\left(1 - l_1 + \frac{\rho_2 F_{02} l_{02}}{\rho_1 F_{01} l_{01}} \right) \frac{dV}{dt} = [1 - (v_1 - V)^p] \quad (2.16)$$

а начальные условия для нее следуют из решения системы уравнений (2.6)—(2.8) при $t = t_0$.

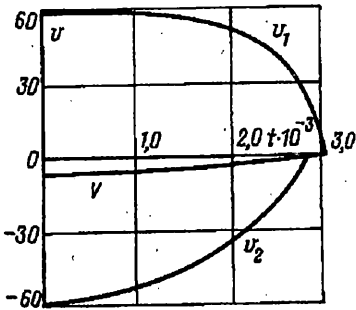
Однако, возможна и другая трактовка, если учесть, что на этом этапе



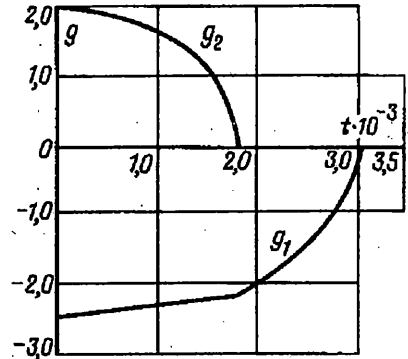
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

движения в реальном материале остаются упругие деформации и в стержне распространяются упругие волны. Поэтому очевидно, что как только упругая волна распространяющаяся со скоростью $a_1 \gg g_1$ дойдет до сечения $x = 0$ и отразится, произойдет отскок стержней и при $t > t_0$ пластически деформироваться будет только первый стержень. Время $t = t_0$ можно приближенно считать временем неупругого соударения стержней.

В этом случае для определения деформации первого стержня ($\sigma_{s1} < \sigma_{s2}$) и момента окончания движения $t = t_*$, в уравнениях (2.6)–(2.8) при $t > t_0$ необходимо отбросить уравнения для определения l_2 и v_2 , а в (2.7) положить $l_2 = 0$ и $\sigma_2 = 0$. Тогда скорость V будет определяться из уравнения

$$(1 - l_1) \frac{dV}{dt} = [1 + (v_1 - V)^p] \quad (t_* \geq t \geq t_0) \quad (2.17)$$

Деформация первого стержня закончится в момент времени $t = t_*$, когда вырождается ударная волна и выполнится условие $\sigma_1 = -\sigma_{s1}$ и $v_1 = V$. Следует помнить, что так определенное решение при $t > t_0$ верно с точностью до движения, вызванного движением упругих волн.

На фиг. 3–6, приведены результаты расчетов соударения двух стержней,двигающихся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями и различающихся только пределами текучести $\sigma_{s1}/\sigma_{s2} = 3$, $n = k = 2$, $v_{01} = -v_{02} = 20$ м/с, $v_{01} = -v_{02} = 60$ м/с. На фиг. 3 показано изменение площадей поперечного сечения по длине стержней. Графики приведены для двух значений скоростей соударения. Сравнение их показывает, что при скорости $v_{01} = -v_{02} = 60$ м/с оба стержня почти полностью переходят в пластическое состояние. Различие в пределах

текучности при $v_{01} = -v_{02} = 20$ м/с сказывается гораздо более существенно, чем при $v_{01} = -v_{02} = 60$ м/с. На фиг. 4 и 5 показано изменение скоростей v_1 , v_2 и V во времени при $v_{01} = 20$ м/с и $v_{01} = 60$ м/с. Как видно из графиков скорости центральной части V изменяется значительно медленнее, чем скорости жестких частей и при $t = t_0$ $v_{02} = V$. С увеличением скорости влияние различия в пределах текучности материалов уменьшается, а скорость V близка к нулю. В момент времени $t = t_0$ предполагалось, что произошел отскок стержней. На фиг. 6 показано, как изменяется скорость ударных волн в стержне. При больших скоростях соударения скорости ударных волн в течение длительного времени слабо меняются и близки для обоих стержней. По мере падения интенсивностей волн скорости распространения падают, все более резко по мере приближения к моменту своего вырождения, при котором скорость g_2 обращается в нуль.

3. Решение для линейно-упрочняющегося материала. В случае линейно упрочняющегося материала в уравнениях (2.2) следует положить $n = k = 1$. Геометрической нелинейностью не пренебрегаем, т. е. будем учитывать изменение площадей в стержне в соответствии с формулами (1.2), (1.6) и (1.7). Скорости ударных волн относительно частиц стержня на основании (2.5) будут постоянными

$$g_1 - v_1 = -1, \quad g_2 - v_2 = c_2/(c_1 \epsilon_{01}) \quad (3.1)$$

благодаря этому система уравнений (2.6)–(2.7) существенно упрощается и распадается. В безразмерных переменных (2.7) она принимает следующий вид

$$dl_1/dt = -1, \quad l_1 dv_1/dt = -1 \quad (3.2)$$

$$dl_2/dt = -c_2/c_1, \quad l_2 dv_2/dt = c_2/(c_1 \eta)$$

Из уравнения (2.7) находим

$$\left[1 - l_1 + \frac{\rho_2 F_{02}}{\rho_1 F_{01}} \left(\frac{l_{02}}{l_{01}} - l_2 \right) \right] \frac{dV}{dt} = 1 + v_1 - V - \frac{F_{02} \sigma_{s2}}{F_{01} \sigma_{s1}} - \alpha (V - v_2) \quad (3.3)$$

Уравнения интегрируются последовательно и независимо друг от друга, решение можно получить в замкнутом виде.

Начальное условие для V_0 также находится в явном виде из уравнения (2.14) или приравниванием правой части (3.3) нулю:

$$V_0 = \left[\left(1 - \frac{\alpha}{\eta} \right) + v_{01} + \alpha v_{02} \right] (1 + \alpha)^{-1} \quad (3.4)$$

Интегрируя уравнения (3.2), получаем

$$l_1 = 1 - t, \quad v_1 = v_{01} + \ln(1 - t) \quad (3.5)$$

$$l_2 = \frac{l_{02}}{l_{01}} - \frac{c_2}{c_1} t, \quad v_2 = v_{02} - \eta^{-1} \ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)$$

Уравнение для V следует из (3.3) и (3.5):

$$(1 + \alpha) t \frac{dV}{dt} = 1 + \frac{\alpha}{\eta} + v_{01} + \alpha v_{02} + \ln(1 - t) - \frac{\alpha}{\eta} \ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) - (1 + \alpha) V \quad (3.6)$$

$$\tau = c_2 l_{01} / (c_1 l_{02})$$

и может быть преобразовано с учетом (3.4) к более простому виду

$$t \frac{dV}{dt} = -(V - V_0) + (1 + \alpha)^{-1} \left[\ln(1 - t) - \frac{\alpha}{\eta} \ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \right] \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) как и (2.7) имеет устранимую особенность в нуле, раскрывая которую, находим

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} (1 + \alpha)^{-1} \left(-1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{c_2}{c_1} \frac{l_{01}}{l_{02}} \right) \quad (3.8)$$

Уравнение (3.7) интегрируется и для скорости V получаем замкнутое решение

$$V - V_0 = (1 + \alpha)^{-1} \left\{ \frac{1-t}{t} [1 - \ln(1-t)] - \frac{1}{t} - \frac{\alpha}{\eta} \left[\frac{\tau-t}{t} \left(1 - \ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \right) - \frac{\tau}{t} \right] \right\} \quad (3.9)$$

которое легко анализируется. При $t = t_0$ происходит вырождение ударной волны во втором стержне при выполнении условия $V = v_2$. Подставляя в (3.9) выражение $V = v_2$ из (3.5) получаем следующее уравнение для определения $t = t_0$:

$$v_{02} - \eta \ln \left(1 - \frac{t_0}{\tau} \right) - V_0 = (1 + \alpha)^{-1} \left\{ \frac{1-t_0}{t_0} [1 - \ln(1-t_0)] - \frac{1}{t_0} - \frac{\alpha}{\eta} \left[\frac{\tau-t_0}{t_0} \left(1 - \ln \left(1 - \frac{t_0}{\tau} \right) \right) - \frac{\tau}{t_0} \right] \right\} \quad (3.10)$$

Для $t \geq t_0$ уравнение (3.3) необходимо преобразовать учитывая, что теперь весь второй стержень движется со скоростью $v_2 = V$:

при $t = t_0$: $V = v_{02} - \eta \ln(1 - t_0/\tau)$

$$(\beta + t) \frac{dV}{dt} = (V_1 - V) + \ln(1-t) \quad (3.11)$$

$$V_1 = 1 + v_{01} - \alpha/\eta, \quad \beta = (\rho_2 F_{02} l_{02}) / (\rho_1 F_{01} l_{01})$$

Решение этого уравнения также легко может быть получено в элементарном виде

$$V - V_1 = \frac{1-t}{\beta+t} [1 - \ln(1-t)] + \frac{t_0 + \beta}{t + \beta} \left[v_{02} - v_{01} - 1 + \frac{\alpha}{\eta} - \eta \ln \left(1 - \frac{t_0}{\tau} \right) \right] - \frac{1-t_0}{\beta+t_0} [1 - \ln(1-t_0)] \quad (3.12)$$

Аналогично определяется решение, если вырождение ударной волны происходит в первом стержне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Taylor G. The testing of materials at high rate of loading//J. Inst. Civil Eng. 1946. V. 26. P. 486.
2. Ишлинский А. Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последствия и релаксации//ПММ. Т. 4. Вып. 1. 1940. С. 79—93.
3. Баренблатт Г. И., Ишлинский А. Ю. Об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду//ПММ. 1962. Т. 24. Вып. 3. С. 497—503.
4. Ленский В. С. Об упругопластическом ударе стержня о жесткую преграду//ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 2. С. 165—170.
5. Lee E., Tupper S. Plastic deformation in a steel cylinder striking a rigid target//J. Appl. Mech. 1951. V. 21. N 1. P. 63—72.
6. Кукуджанов В. Н. Одномерные задачи распространения волн напряжений в стержнях. Сообщения по прикладной математике. М.: Изд-е ВЦ АН СССР. Вып. 7. 1977. С. 55.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика. Т. 2. М.—Л.: ГИТТЛ. 1948. С. 727.