

УДК 539.3

© 1994 г. Г. А. ВАНИН

УПРУГОСТЬ СИНТЕЗИРУЕМОГО ЛИНЕЙНО АРМИРОВАННОГО СИКТАКТНОГО ПЕНОПЛАСТА

На основе пространственных моделей структуры упругой неоднородной среды с привлечением гипотезы о продольном состоянии рассматривается задача механики композиционных материалов, синтезируемых путем введения в структуру различных компонентов при заданных ограничениях на интегральные физико-механические характеристики. Решение строится с учетом технологического разброса ряда параметров компонентов для чего предлагаются новые функции распределения, соотношения принципа усреднения многофазных композитов с учетом пространственных флуктуаций напряжений и деформаций. На примере линейно ориентированной волокнистой среды с полыми волокнистыми и сферическими наполнителями выводятся приближенные соотношения для интегральных параметров, внутреннего поля напряжений и прогнозируются условия существования согласованных состояний в структуре материала.

1. Задача об управлении показателями свойств синтезируемых композитов включает разработку множества моделей их структуры, составление соотношений для определения эффективных физико-механических характеристик и параметров разрушения, формулировку ограничений на них, а также согласование внутреннего поля напряжений при заданных видах нагружения.

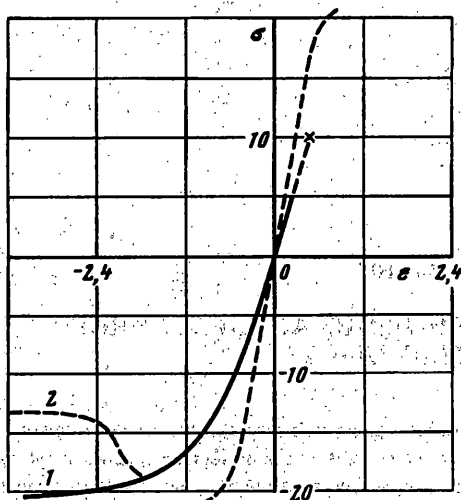
Для ограничения допустимых моделей состояния материалов разделяем на низко- и высоконаполненные; а внутреннее поле — на квазиоднородные, моментные и высокоградиентные, различной интенсивности. Предполагается, что параметры тонкой структуры среды и их дисперсия могут быть оценены по данным микроскопических исследований и интегральным характеристикам одновременно.

Синтактные пенопласты, обладая удовлетворительной плавучестью, выдерживают высокие однородные напряжения всестороннего сжатия [1]. Экспериментальная диаграмма механического состояния этих материалов при одноосном растяжении-сжатии в виде сплошной кривой представлена на фиг. 1 (σ в МПа). Кривые 1 и 2 построены для фенольных и стекломикросфер. Отметим низкую вязкость разрушения синтактных пенопластов при растяжении, что является их недостатком. Расширение области применения пористых композитов можно добиться путем введения в их структуру волокон, что изменит упомянутую диаграмму на типовую для конструкционных материалов, изображенную на фиг. 1 в виде штриховой кривой.

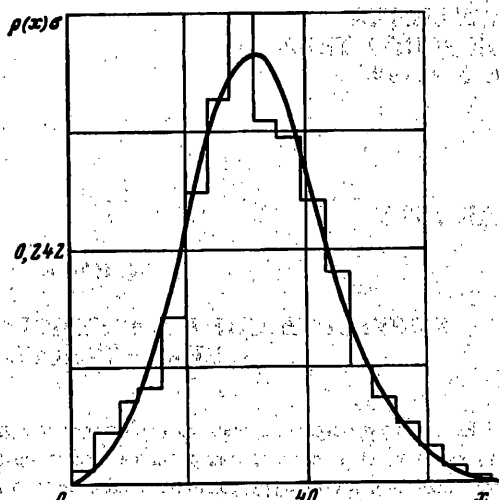
Обозначим ζ_v и ζ_m — относительное объемное содержание волокон и микросфер; выбор этих параметров при соблюдении ограничений на удельный вес, жесткость и характеристики прочности искомого композита с учетом неизбежного для существующих технологий разброса параметров наполнителей является искомым результатом решения задачи.

Учет разброса некоторых параметров удобно вести на основе предлагаемого четырехпараметрического несимметричного распределения вида ($\Gamma(z)$ — гамма-функция):

$$\rho(x; a, b, \alpha, \sigma) = Ax^b \exp\left(-\frac{x^{2\alpha}}{2\sigma^2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sigma} x^\alpha\right)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$(0 \leq x < \infty; a, \alpha, \sigma > 0; b \geq -\alpha) \quad (1.1)$$

$$A^{-1} = a/\alpha (\sigma \sqrt{2})^\nu \Gamma(\nu/2 + 1/2) \Phi(\nu/2 + 1/2, 3/2; a^2)$$

$$\langle x^\nu \rangle = (\sigma \sqrt{2})^{2\nu/\alpha} \frac{\Gamma(\kappa + 1/2) \Phi(\kappa + 1/2, 3/2; a^2)}{\Gamma(\nu/2 + 1/2) \Phi(\nu/2 + 1/2, 3/2; a^2)}$$

$$\nu = (b+1)/\alpha, \quad \kappa = (b+s+1)/(2\alpha)$$

$$\Phi(a, c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m}{(c)_m} \frac{z^m}{m!} \quad (a)_m = a(a+1) \dots (a+m-1)$$

Параметр b определяет поведение (1.1) при малых x и a ; с ростом последнего функция имеет явно выраженный максимум при $\sigma \rightarrow 0$ вблизи точки $x^* = a\sigma\sqrt{2}$:

$$\rho(x) = \frac{a\alpha x^b}{\sqrt{\pi} (a\sigma\sqrt{2})^\nu} \exp\left[-\frac{(x^\alpha - \sigma\sqrt{2})^2}{2\sigma^2}\right]$$

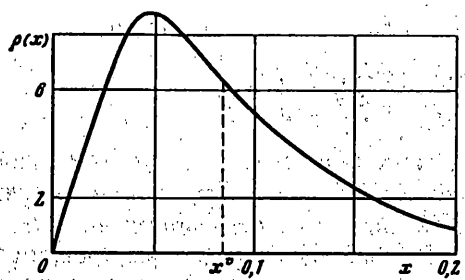
Распределение (1.1) для предельных значений параметров согласуется с многими стандартными функциями распределения, что позволяет получить оценку этих параметров. Отметим частное распределение, вытекающее из (1.1) и являющееся обобщением функций Вейбулла и Эрланга.

$$\rho(x; n, \alpha, \sigma) = \frac{\alpha}{xn!} \left(\frac{x^\alpha}{2\sigma^2}\right)^{n+1} \exp\left(-\frac{x^\alpha}{2\sigma^2}\right),$$

$$\langle x^\nu \rangle = \frac{1}{n!} (\sigma\sqrt{2})^{2\nu/\alpha} \Gamma\left(\frac{s}{\alpha} + n + 1\right) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$P(x; n, \alpha, \sigma) = \int_0^x \rho(x) dx = 1 - \exp\left(-\frac{x^\alpha}{2\sigma^2}\right) \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(\frac{x^\alpha}{2\sigma^2}\right)^j$$

В случае $\alpha = 1$ функция (1.1) согласуется с известным трехпараметрическим



Фиг. 3

распределением [2]. Данные 1500 замеров диаметров D_c полых стеклосфер [3] устанавливают следующие значения параметров (фиг. 2):

$$\rho(x) = \frac{x}{a\sigma^2\sqrt{\pi}} \exp\left(-a^2 - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sigma}x\right)$$

$$\alpha = 1, \quad b = 1, \quad x^v = D_c^v = 31,6 \text{ мкм}, \quad \sigma = 12,1 \text{ мкм}, \quad a = 1,485 \quad (1.2)$$

Интервал распространенных диаметров микросфер составляет [1] $D_c = (20 - 200)$ мкм. Здесь и в дальнейшем $x^v = \langle x \rangle$.

Распределение относительных толщин $x = 2h/D$ микросфер задается бета-функцией [4]:

$$\rho(x; \beta, \delta) = x^\beta (1-x)^\delta / B(\beta+1, \delta+1) \quad (0 \leq x \leq 1, \beta > 0, \delta = 1, 2) \quad (1.3)$$

Соответственно распределение относительных диаметров полостей $y = 1 - 2h/D$ будет

$$\rho(y; \beta, \delta) = y^\delta (1-y)^\beta / B(\beta+1, \delta+1) \quad (1.4)$$

Опытные данные по распределению диаметров микросфер в насыпном состоянии и по сечениям в сферопластике предполагаются эквивалентными их распределению в выделенном объеме V [3]. Экспериментальное исследование функций распределения относительных толщин и определение значений параметров для микросфер затруднительно, поэтому их оценку приводим по данным об удельном весе микросфер κ при заданном объемном содержании ζ_0 их в насыпном состоянии. Это условие приводит к равенству

$$\psi_c - \frac{\kappa}{\gamma_c \zeta_0} \frac{\langle D_c^3 \rangle}{\langle D^3 \rangle} = 0, \quad \psi_c = 3 \left\langle \frac{2h}{D} \right\rangle - 3 \left\langle \left(\frac{2h}{D} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{2h}{D} \right)^3 \right\rangle \quad (1.5)$$

где γ_c — удельный вес материала микросфер; величины, относящиеся к волокнам и сферам отмечаются индексами a и c ; к матрице — индексом s или без него. Для стеклосфер при $\kappa = \gamma_0/2$; $\zeta_0 = 0,7$, где γ_0 — удельный вес воды, из (1.5) находим

$$\beta \approx 0,9, \quad \delta = 20, \quad x^v = 0,083 \quad (1.6)$$

Уточненные значения их устанавливаются при известной дисперсии удельного веса микросфер. Распределение (1.2) при параметрах (1.6) представлено на фиг. 3. Согласно опытным данным [1] наиболее распространенные толщины стенок микросфер лежат в интервале $2h_c/D_c \approx 0,015 - 0,1$.

Типовое распределение диаметров D_c тонких волокон, построенное по данным 1650 замеров, приведено на фиг. 4, где точки — данные опытов [5], штриховая кривая — нормальное распределение, а сплошная кривая — распределение (1.1) при $\alpha = 1$, $b = 1$, $a = 5,25$, $\sigma = 0,8$ мкм, $x^v = 4,35$ мкм.

Учитывая неравенство $a^2/2 \gg 1$, из (1.1) получим

$$\rho(x) \approx \frac{x}{a\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - a\sigma)^2}{2\sigma^2} \right]$$

Нормальное распределение на фиг. 4 с учетом наименьшего уклонения определено параметрами $\sigma = 0,8$ мкм, $x^v = 4,2$ мкм. Согласно данным опытов наиболее распространенная капиллярность полых волокон составляет $(d_a/D_a)^2 = 0,4-0,5$ или $2h_a/D_a \approx 0,3-0,4$, где d_a и D_a — внутренний и внешний диаметры.

Распределение толщин стенок волокон описываем функцией (1.2), параметры которой оцениваются с привлечением данных по весовым и другим интегральным характеристикам.

Интегральная плотность и плавучесть композита определяются соотношением

$$\gamma^v = \gamma_a \zeta_N \varphi_a + \gamma_c \zeta_n \psi_c + \gamma_c (1 - \zeta_N - \zeta_n) < \gamma_0 \quad (1.7)$$

$$\varphi_a = 2 \langle 2h_a/D_a \rangle - \langle (2h_a/D_a)^2 \rangle$$

2. Поле напряжений в матрице композита представим в виде формального ряда, первые два члена которого определяют напряжения однородного взаимодействия сфер и волокон с матрицей, а последующие слагаемые учитывают многократно рассеянные напряжения включениями [6]:

$$\sigma_k = \sigma_k^0 + \sigma_k^* + \sigma_k^{**} + \dots, \quad \tau_k = \tau_k^0 + \tau_k^* + \tau_k^{**} + \dots \quad (2.1)$$

Для определения усредненных значений σ_k^v , τ_k^v и ε_k^v , γ_k^v при отсутствии градиентов внутреннего поля предлагается вариационное равенство (s — граница V):

$$\sigma_k^v \delta \varepsilon_k^v + \tau_k^v \delta \gamma_k^v + \delta U_0 = \frac{1}{V} \oint_s \sigma_{in} \delta u_i ds_n \quad (2.2)$$

где δU_0 учитывает вклад в (1.7) членов, начиная с третьего

$$\delta u_i = x_i \delta \varepsilon_i^v + 1/4 z \delta \gamma^v + 1/4 z \delta \bar{\gamma}^v + \delta u_i^* + \dots$$

$$\delta (u_2 + iu_3) = 1/2 x_i \delta \bar{\gamma}^v + 1/2 z \delta \varepsilon^v + 1/2 z \delta \varepsilon + \delta (u_2 + iu_3)^* + \dots$$

$$\gamma = \gamma_{12} - i\gamma_{13}, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + i\gamma_{23}, \quad z = x_2 + ix_3$$

На внутренних поверхностях сфер и волокон s' выполняются условия отсутствия напряжений $\sigma_{in}|_{s_a'} = 0$, $\sigma_{in}|_{s_c'} = 0$.

Решение задачи об упругом напряженном состоянии волокон строится с привлечением гипотезы о продольном состоянии, согласно которой условия равенства продольных смещений волокон и матрицы в каждой точке межфазной поверхности заменяются на равенство интегральных продольных деформаций [6] $\varepsilon_{ia}^v|_{s_a} = \varepsilon_{is}^v|_s$.

Остальные компоненты состояния подчинены условиям совершенного контакта на межфазных границах

$$\sigma_{in}^+ = \sigma_{in}^-, \quad u_n^+ = u_n^- \quad (s \in s_a, s \in s_c).$$

Сочетание перечисленных условий на межфазных поверхностях матрица-волокно или сфера и внутренних полостях компонентов приводит к 18 уравнениям, которые дополняются 12 условиями усреднения напряжений и деформаций согласно (2.2).

Решение задачи с учетом детального взаимодействия отдельных включений в пространстве сводится к исследованию состояний для последовательности моделей структуры композита согласно формальному разложению (2.1) и выбранной карты

структуры. Решение задачи строится суперпозицией функций, определяющих пространственное напряженное состояние около отдельных пустотелых сфер и непрерывных волокон с заданными функциями распределения параметров, характеризующих их технологический разброс. Анализ решений задачи показал, что в приближении, учитывающем квазиоднородное взаимодействие между включениями, удастся получить в явном виде зависимость эффективных параметров композита от характеристик компонентов. Используя ранее введенные обозначения напряжений [6], уравнения усреднения полей для симметричных упаковок линейно армированной среды с микросферами (фиг. 5) приводятся к виду

$$\begin{aligned}\sigma^v &= \sigma^0 (1 + \delta + \alpha_0 + \zeta_N \varphi_a \omega_0 E_a) + \sigma^0 (\beta_0 + \zeta_N \varphi_a \kappa_0 E_a) \\ \sigma^v &= \sigma^0 2\beta_0 + \sigma^0 (1 + \alpha_0 + \beta_0 + q) \\ \Sigma^v &= \Sigma^0 \left\{ 1 - (7 - 5\nu) H + \zeta_N \frac{1 - G/G_a}{\kappa + G/G_a} [1 + (1 - m\omega) J_a] \right\}\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\tau^v = \tau^0 \left[1 - (7 - 5\nu) H + \frac{1 + G/G_a}{1 - G/G_a} \zeta_N - \frac{4\zeta_N G/G_a}{1 - G^2/G_a^2} \left\langle \left(1 - \frac{1 - G/G_a}{1 + G/G_a} y_a^2 \right)^{-1} \right\rangle \right]$$

$$\delta = \zeta_N \varphi_a E_a / E - \zeta_N$$

$$\alpha_0 = \frac{4G}{9K} L - \frac{2}{3} (7 - 5\nu) H, \quad \beta_0 = \frac{4G}{9K} L + \frac{1}{3} (7 - 5\nu) H$$

$$\omega_0 = -\frac{L}{9K} + \frac{8 - 4\nu}{3G} H, \quad \kappa_0 = -\frac{L}{9K} - \frac{4 - 5\nu}{3G} H$$

$$q = \frac{\zeta_N (\kappa + 1)}{2(1 - G/G_a)} \left[1 - \frac{(\kappa + 1) G/G_a}{2 + (\kappa - 1) G/G_a} \left\langle \left(1 - \frac{2(1 - G/G_a)}{2 + (\kappa - 1) G/G_a} y_a^2 \right)^{-1} \right\rangle \right] - \zeta_N$$

$$H = \zeta_N \frac{7 - 5\nu_c + (8 - 10\nu_c) G/G_c}{(8 - 10\nu)(7 - 5\nu_c) + (7 - 5\nu)(8 - 10\nu_c) G/G_c} -$$

$$- \zeta_N \frac{G}{G_c} \frac{(7 - 5\nu_c)(15 - 15\nu) + (8 - 10\nu_c)(1 - 5\nu) + (14 - 10\nu)(8 - 10\nu_c) G/G_c}{[8 - 10\nu + (7 - 5\nu) G/G_c] [(8 - 10\nu)(7 - 5\nu_c) + (7 - 5\nu)(8 - 10\nu_c) G/G_c]} \times$$

$$\times \left\langle \left(1 - \frac{(8 - 10\nu)(7 - 5\nu_c) + (7 - 5\nu)(8 - 10\nu_c) G/G_c}{(7 - 5\nu_c)[8 - 10\nu + (7 - 5\nu) G/G_c]} y_c^2 \right)^{-1} \right\rangle$$

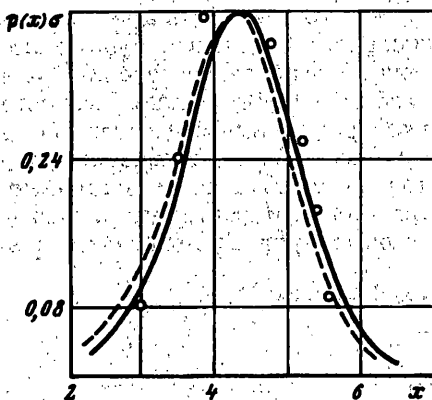
$$L = \frac{\zeta_N}{1 - G/G_c} \left[1 + \frac{3K}{4G_c} - \frac{(3K + 4G)(4 + 3K_c/G_c)}{4(3K_c + 4G)} \left\langle \left(1 - 3K_c \frac{1 - G/G_c}{3K_c + 4G} y_c^2 \right)^{-1} \right\rangle \right]$$

$$m = \frac{1 + \kappa G/G_a}{1 - G/G_a}, \quad \omega = \frac{\kappa + G/G_a}{\kappa - \kappa G/G_a}$$

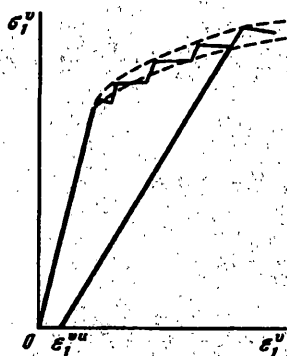
$$\langle (1 - \varepsilon y^n)^{-1} \rangle = \int_0^1 \frac{\rho(y) dy}{1 - \varepsilon y^n} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \frac{(\delta + 1)_{nj}}{(\delta + \beta + 2)_{nj}} \quad (n = 2, 3, \dots, \varepsilon < 1, \nu_c > 0, 2)$$

Для вычисления интеграла

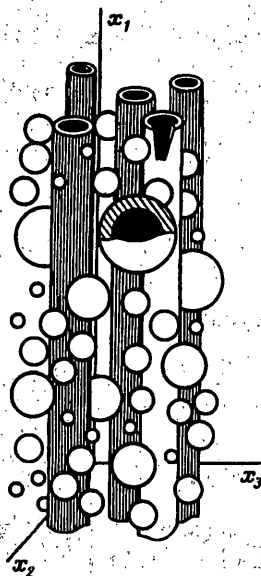
$$J_a = \frac{1}{B(\delta + 1, \beta + 1)} \int_0^1 \frac{y^{\delta+2} (1 - y)^\beta (m - y^2) dy}{(\omega - y^2)(m - y^2) - 3my^2(1 - y^2)^2}$$



Фиг. 4



Фиг. 6



Фиг. 5

воспользуемся известным представлением

$$(\omega - y^2)(m - y^6) - 3my^2(1 - y^2)^2 = \prod_{j=1}^4 (y^2 - y_j)$$

где корни найдены в явном виде

$$y_{1,2} = \omega + (\omega^2 - \omega + \Omega/2)^{1/2} \pm \{ [\omega + (\omega^2 - \omega + \Omega/2)^{1/2}]^2 - \omega - \Omega + \\ + [(\omega + \Omega)^2 - m\omega]^{1/2} \}^{1/2}, \quad y_{3,4} = \omega - (\omega^2 - \omega + \Omega/2)^{1/2} \pm \\ \pm \{ [\omega - (\omega^2 - \omega + \Omega/2)^{1/2}]^2 - \omega - \Omega - [(\omega + \Omega)^2 - m\omega]^{1/2} \}^{1/2} \\ \Omega = 1/2 [8\omega^3(2m - 1) - 24\omega^2m + (m + 3\omega^2)^{1/3}]$$

Почленным интегрированием при известных условиях находим

$$J_a = \sum_{k=1}^4 \frac{a_k}{y_k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\delta + 2j + 2)(\delta + 2j + 1)(\delta + 1)_{2j}}{y_k(\delta + 2j + \beta + 3)(\delta + 2j + \beta + 2)(\delta + \beta + 2)_{2j}} \times \\ \times \left[m - \frac{(\delta + 2j + 4)(\delta + 2j + 3)}{(\delta + 2j + \beta + 5)(\delta + 2j + \beta + 4)} \right] \\ a_k^{-1} = (y_k - y_{k+1})(y_k - y_{k+2})(y_k - y_{k+3})$$

где индексы пробегает циклическую перестановку чисел 1, 2, 3, 4.

Усредненные компоненты деформации среды будут

$$\varepsilon_1^v = \sigma_1^0 (1 + \omega_0 E)/E - \sigma^0 (\alpha - \kappa_0 E)/E \quad (2.4)$$

$$\varepsilon^v = -2\sigma_1^0 (v - \mu - \kappa_0 E)/E + \sigma^0 (1 - v + g + \kappa_0 E + \omega_0 E)/E$$

$$E^v = -\frac{1}{2G} \Sigma^0 \left\{ 1 + (8 - 10v) H - \kappa_N^2 \frac{1 - G/G_a}{\kappa + G/G_a} [1 + (1 - m\omega) J_a] \right\}$$

$$\gamma^v = \frac{\tau^0}{G} \left[1 + (8 - 10v) H - \frac{1 + G/G_a}{1 - G/G_a} \zeta_N + \frac{4\zeta_N G/G_a}{1 - G^2/G_a^2} \langle (1 - fy_a^2)^{-1} \rangle \right]$$

$$g = 2\alpha (v - \mu) - 2v^2 - q (1 + v), f = \frac{1 - G/G_a}{1 + G/G_a}, \alpha = \frac{1}{\delta + 1} [(1 - \zeta_N) v + (q + \zeta_N) v_a]$$

$$\mu = \frac{(\kappa + 1) (v - v_a) \zeta_N}{(\kappa + 1) \zeta_N + 2 - 2G/G_a} \left[1 + \frac{2 (\zeta_N - G/G_a) - (1 - \zeta_N) (\kappa - 1) G/G_a}{(\kappa + 1) \zeta_N + (1 - \zeta_N) [2 + (\kappa - 1) G/G_a]} \times \right. \\ \left. \times \left\langle \left(1 - \frac{(\kappa + 1) \zeta_N + 2 (1 - G/G_a)}{(\kappa + 1) \zeta_N + (1 - \zeta_N) [2 + (\kappa - 1) G/G_a]} y_a^2 \right)^{-1} \right\rangle \right]$$

где обозначения соответствуют общепринятым [7].

3. Приводим результаты преобразований систем (2.2) и (2.4) в виде приближенных формул для определения эффективных характеристик линейно армированного синтактного пенопласта в низконаполненном квазигоднородном поле (фиг. 5).

Модули продольного сдвига

$$G_{12} = G_{13} \approx G \frac{(1 - G^2/G_a^2) [1 - (7 - 5v) H] + \zeta_N [(1 + G/G_a)^2 - 4G/G_a \langle (1 - fy_a^2)^{-1} \rangle]}{(1 - G^2/G_a^2) [1 + (7 - 5v) H] - \kappa_N^2 [(1 + G/G_a)^2 - 4G/G_a \langle (1 - fy_a^2)^{-1} \rangle]} \quad (3.1)$$

Модуль поперечного сдвига

$$G_{23} \approx G \frac{(\kappa + G/G_a) [1 - (7 - 5v) H] + \zeta_N (1 - G/G_a) [1 + (1 - m\omega) J_a]}{(\kappa + G/G_a) [1 + (7 - 5v) H] - \kappa_N^2 (1 - G/G_a) [1 + (1 - m\omega) J_a]} \quad (3.2)$$

Модуль при продольном растяжении

$$E_{11} \approx \zeta_N \varphi_a E_a + E (1 + \omega_0 E)^{-1} \left[1 - \zeta_N + \alpha_0 - \right. \\ \left. - 2\beta_0 \frac{(1 + \omega_0 E) (\beta_0 + \alpha \zeta_N \varphi_a E_a/E) + (\alpha - \kappa_0 E) (1 - \zeta_N + \alpha_0)}{(1 + \omega_0 E) (1 + \alpha_0 + \beta_0 + q) + 2\beta_0 (\alpha - \kappa_0 E)} \right] \quad (3.3)$$

Коэффициент поперечного сужения при продольном растяжении

$$2\nu_{21} \approx \frac{(1 + \omega_0 E) (2\beta_0 + \alpha \zeta_N \varphi_a E_a/E) + \beta_0 (g - \mu) + (\alpha - \kappa_0 E) (1 - \zeta_N + \alpha_0) + (v - \mu - \kappa_0 E) (1 + \alpha_0 + q)}{(1 + \omega_0 E) (1 + \alpha_0 + \beta_0 + q) + 2\beta_0 (\alpha - \kappa_0 E)} \quad (3.4)$$

Поперечная податливость композита

$$\frac{1}{E_{22}} \approx \frac{1}{4G_{23}} + \\ + \frac{1}{2E} \frac{(1 - v + g + \kappa_0 E + \omega_0 E) Q + 2 (\beta_0 + \zeta_N \varphi_a \kappa_0 E_a) (v - \mu - \kappa_0 E)}{(1 + \alpha_0 + \beta_0 + q) Q - 2\beta_0 (\beta_0 + \zeta_N \varphi_a \kappa_0 E_a)} \quad (3.5)$$

$$Q = 1 + \delta + \alpha_0 + \zeta_N \varphi_a \omega_0 E_a$$

Соотношения (3.1)–(3.5) определяют полный комплект эффективных

характеристик линейно армированного синтактного пенопласта с наивысшей симметрией структуры

$$\varepsilon_i^v = \frac{\sigma_{11}^v}{E_{11}} - \frac{\nu_{21}}{E_{11}} \sigma^v, \quad \varepsilon^v = -2 \frac{\nu_{21}}{E_{11}} \sigma_{11}^v + \frac{1 - \nu_{23}}{E_{22}} \sigma^v \quad (3.6)$$

$$E^v = - (1/2 G_{23}) \bar{\Sigma}^v, \quad \gamma^v = \tau^v / G_{12}$$

В предельном случае малой дисперсии, когда значения параметров концентрируются вблизи своего среднего, следует положить $\beta \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow \infty$ при $\beta/\delta = (1 - \varepsilon)/\varepsilon$, где $\varepsilon_a = d_a/D_a$; или $\varepsilon_c = d_c/D_c$, что дает $y \rightarrow \varepsilon$:

$$\varphi_a = \frac{(\beta + 1)(2\delta + \beta + 4)}{(\delta + \beta + 2)(\delta + \beta + 3)} \rightarrow 1 - \varepsilon_a^2$$

$$\psi_a = (\beta + 1) \frac{\beta^2 + 3\delta^2 + 3\beta\delta + 8\beta + 15\delta + 18}{(\delta + \beta + 2)(\delta + \beta + 3)(\delta + \beta + 4)} \rightarrow 1 - \varepsilon_c^3$$

$$J_a \rightarrow \frac{m - \varepsilon_a^2}{1 - m_\infty} \frac{(1 - m\varepsilon_a^2)\omega - (m - \varepsilon_a^6)}{(m - \varepsilon_a^6)(m - \varepsilon_a^2) - 3\omega\varepsilon_a^2(1 - \varepsilon_a^2)^2}$$

Внося эти значения в (3.1)–(3.5), получим формулы для модулей при фиксированных геометрических параметрах компонентов.

4. В качестве примера рассматривается решение задачи о синтезе упругого волокнистого композиционного материала с дисперсными сферическими заполнителями. В общем случае решение включает определение состава и строения композита с учетом ограничений в виде системы неравенств на интегральные физико-механические характеристики и параметры диаграмм механического состояния. Для определенности здесь ограничимся рассмотрением линейно армированного слоя при неучете начальных технологических напряжений. В число ограничений включаем соотношение (1.7), а также легко выводимые неравенства для статистических характеристик удельного веса композита, учитывающие влияние разброса толщин волокон и микросфер. Формулы (3.1)–(3.5) накладывают ограничения на внутренние параметры материала при удовлетворении требованиям к его интегральным упругим модулям.

Особый интерес представляет исследование схем разрушения компонентов и изменение при этом их интегральных диаграмм механического состояния. В частности, при продольном растяжении синтезируемого композита в случае стеклянных микросфер и волокон разрушающие напряжения возникают на межфазной границе микросфера — полимерная (эпоксидная) матрица, что предшествует разрывам волокон. В принятом приближении межфазные напряжения у микросфер с максимальными диаметрами будут наивысшими

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_1^v} = \frac{1 + \alpha_0 + \beta_0 + q + (4G/9K) L_c (1 + \alpha_0 - \beta_0 + q) + (1 + \alpha_0 + 2\beta_0 + q) [12R - 5/3 (10 - 2\nu) H_c]}{(1 + \alpha_0 + \beta_0 + q) Q - 2\beta_0 (\beta_0 + \zeta_n \varphi_a \nu_0 E_a)} \quad (4.1)$$

$$\zeta_n L_c = \lim_{y \rightarrow \varepsilon} L, \quad \zeta_n H_c = \lim_{y \rightarrow \varepsilon} H$$

$$R = H_c - \frac{1 - \nu_c}{7 - 5\nu_c} \frac{35\varepsilon^2 [1 - (7 - 5\nu) H_c] G/G_c}{(7 + 5\nu_c) [1 - (1 - G/G_c) \varepsilon'] + (28 - 40\nu_c) G/G_c}$$

Остальные обозначения введены выше. Предельные межфазные напряжения при растяжении могут быть оценены по диаграмме (фиг. 1) для синтактного

пенопласта и формуле для напряжений (4.1) с учетом экспериментально наблюдаемых начальных отслоений микросфер с наибольшим диаметром [1]. Приближенно принимаем, что отслоение каждой микросферы при этом полное, а величина необратимой деформации ϵ_n^u , перпендикулярной плоскости подрастающей трещины на величину площадки ΔS_n , будет $\Delta \epsilon_n^u \approx \pi b \Delta S_n$, где b — параметр, характеризующий несовместность берегов трещины и определяемый по согласованию начального участка теоретической и экспериментальной диаграммы. Поэтому наблюдаемая необратимая деформация

$$\epsilon_1^u \approx \pi b \zeta_n \langle D_c^2 \rangle / \langle D_c^3 \rangle \approx \epsilon_2^u = \epsilon_3^u \quad (4.2)$$

Для диаметров микросфер, распределенных согласно (1.2), имеем

$$\frac{\langle D_c^2 \rangle}{\langle D_c^3 \rangle} = \frac{3 \sqrt{\pi} \Phi(5/2, 3/2; a^2)}{8 \Phi(3, 3/2; a^2)} \approx \frac{2a(3 + 2a^2)}{3 + 12a^2 + 4a^4}$$

Участок эффективной диаграммы механического состояния армированного синтактного пенопласта при продольном растяжении до разрыва волокон строится с учетом гистограммы распределения диаметров микросфер (фиг. 2). Непрерывный процесс отслоения или разрушения микросфер заменяется дискретным, начиная от максимальных и кончая минимальными диаметрами. Задаваясь величинами ζ_n и ζ_n , строим начальный участок диаграммы σ_1^V , ϵ_1^V на основе соотношения (3.3). При достижении предельных внутренних напряжений на границах микросфер с максимальными диаметрами, определяемых согласно (4.1), приращения необратимых деформаций подсчитываются также с учетом гистограммы (фиг. 2).

Изменение упругих модулей композита на каждом этапе разрушения микросфер производится по соотношениям (3.1)—(3.5), где разрушенные микросферы заменяются полостями. В результате расчетов строится ступенчатая диаграмма (фиг. 6), где огибающие изображены штриховыми кривыми. При сопоставлении расчетной и экспериментальной диаграмм уточняется значение параметра несовместности в формуле (4.2).

Из приведенной модели процесса разрушения композита на начальном этапе следует, что изменение характеристик диаграммы σ_1^V , ϵ_1^V определяется соотношениями между ζ_n и ζ_n и функциями распределения параметров микросфер. При этом рост дисперсии диаметров микросфер повышает вязкость разрушения матрицы, благодаря торможению поверхностями волокон начальных трещин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаксмур А. Р., Оуэн Д. Р. Дж. Синтактные пенопласты. Прикладная механика ячеистых пластмасс. М.: Мир, 1985. С. 328—356.
 2. Ванин Г. А. Новые функции распределения в механике композиционных сред. // Прикл. механика. 1984, Т. 20, № 5. С. 25—31.
 3. Ванин Г. А., Стеликов Н. Е. Исследование распределения микросфер в сферопластиках. // Механика композит. материалов. 1985. № 3. С. 404—408.
 4. Богданов Дж., Козин Ф. Вероятностные модели накопления повреждений. М.: Мир, 1989. 342 с.
 5. Ван Фо Фы Г. А., Клавлин В. В., Гордиенко В. П. Исследование распределения волокон в ориентированных стеклопластиках. // Механика полимеров. 1969. № 2. С. 282—287.
 6. Ванин Г. А. Упругость волокнистых сред пространственного строения. // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 47—54.
 7. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеориздат. 1955. 492 с.
- Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований.