

УДК 539.3:539.4

© 1994 г. И. П. ШАЦКИЙ

ИЗЛОМ ЖЕСТКОГО ЛИНЕЙНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ,  
ИЗГИБАЕМОГО В УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ

Исследована модельная задача об изломе линейного включения, изгибаемого в упругой матрице. Указан путь использования полученных результатов для прогнозирования механизма разрушения армированной среды.

1. В рамках плоской задачи теории упругости рассмотрим бесконечную изотропную плоскость  $(x, y) \in R^2$ , армированную вдоль отрезка оси абсцисс жестким прямолинейным включением длиной  $2a$  (фиг. 1, а). Пусть на бесконечности действуют напряжения

$$\sigma_x^\infty = \sigma^\infty y/L, \quad \sigma_y^\infty = 0, \quad \sigma_{xy}^\infty = 0 \quad (1.1)$$

имитирующие однородный изгиб в плоскости;  $L$  — некоторый линейный размер.

Рассмотрим вопрос о прочности включения в условиях его изгиба в поле напряжений (1.1). С целью упрощения задачи считаем включение обладающим бесконечной жесткостью, но конечной прочностью на изгиб. Прочность матрицы и адгезионной связи предполагается неограниченной.

Упругое равновесие плоскости исследуем при следующих условиях недеформируемости включения:

$$du/dx(x, 0) = 0, \quad dv/dx(x, 0) = \varepsilon, \quad x \in (-a, a) \quad (1.2)$$

где  $u, v$  — компоненты вектора упругого перемещения,  $\varepsilon$  — угол поворота включения как жесткого целого, отсчитываемый от оси абсцисс.

Учитывая антисимметрию задачи относительно оси  $x$ , следуя [1], из краевых условий (1.2) получаем интегральное уравнение относительно неизвестного скачка нормальных напряжений

$$[\sigma_y](x) = \sigma_y(x_1 + 0) - \sigma_y(x_1 - 0) \quad (1.3)$$

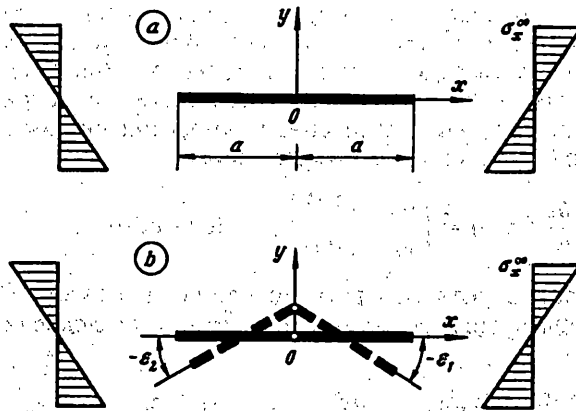
$$-\frac{\kappa}{2\mu(\kappa+1)} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{[\sigma_y](\xi) d\xi}{\xi-x} = -\frac{\partial v^\circ}{\partial x}(x, 0) + \varepsilon, \quad x \in (-a, a)$$

которое должно решаться при дополнительных условиях статики

$$\int_{-a}^a [\sigma_y](\xi) d\xi = 0, \quad \int_{-a}^a \xi [\sigma_y](\xi) d\xi = 0 \quad (1.4)$$

В уравнении (1.3)  $\mu$  — модуль сдвига материала плоскости,  $\kappa$  — константа Мусхелишвили [2]:

$$\frac{\partial v^\circ}{\partial x}(x, 0) = -\frac{\kappa+1}{8\mu} \sigma^\infty \frac{x}{L} \quad (1.5)$$



Фиг. 1

угол поворота линейного элемента оси абсцисс в поле напряжений (1.1) при отсутствии включения.

Задача (1.3), (1.4) с учетом выражения (1.5) имеет точное решение

$$[\sigma_y](x) = -(A/8)(2x^2 - a^2)(a^2 - x^2)^{1/2}, \quad \varepsilon = 0 \quad (1.6)$$

Здесь и дальше  $A = \sigma^0 (\kappa + 1)^2 / (\kappa L)$  — нормирующий множитель.

Пренебрегая действием касательных напряжений на берегах включения, перерезывающую силу  $Q$  и изгибающий момент  $M$  во включении определяем из дифференциальных уравнений изгиба

$$dQ/dx + [\sigma_y] = 0, \quad dM/dx - Q = 0 \quad (1.7)$$

Решая (1.7) при нулевых краевых условиях, находим

$$Q(x) = -(A/8)x(a^2 - x^2)^{1/2}, \quad M(x) = (A/24)(a^2 - x^2)^{3/2}$$

Наибольший по модулю изгибающий момент достигается посредством включения

$$\max_{x \in [-a, a]} |M(x)| = |M(0)| = \frac{|A|a^3}{24} \quad (1.8)$$

Принимая гипотезу прочности по максимальным растягивающим напряжениям

$$\frac{1}{W} \max_{x \in [-a, a]} |M(x)| \leq \sigma_B$$

где  $W$  — осевой момент сопротивления поперечного сечения включения,  $\sigma_B$  — предел прочности на растяжение его материала, приходим к условию прочности включения, изгибаемого в упругой плоскости  $|A|a^3 / (24W) \leq \sigma_B$ . В частности, для критической нагрузки, по достижению которой включение разломается пополам, имеем

$$|\sigma_B^*| = \alpha a^{-3}, \quad \alpha = 24\kappa\sigma_B W L / (\kappa + 1)^2 \quad (1.9)$$

т. е. в рассмотренной задаче критическая нагрузка обратно пропорциональна кубу длины включения.

Отметим, что учет упругости жесткой прослойки неизбежно приведет к уменьшению по сравнению с (1.8) максимального изгибающего момента. Поэтому формулу (1.9) следует рассматривать как нижнюю оценку критической нагрузки, соответствующую некоторому запасу прочности.

2. Как же изменится напряженно-деформированное состояние композиции после излома включения? Чтобы ответить на этот вопрос, предлагается следующий подход.

Хрупкий излом включения моделируется возникновением идеального шарнира, соединяющего фрагменты разрушенной прослойки и предоставляющего им дополнительную степень свободы (взаимный разворот) (фиг. 1, б).

Упругое равновесие плоскости со сломанным включением описывается уравнениями плоской задачи при заданных на бесконечности напряжениях (1.1) и следующих краевых условиях на включении:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, 0) = \begin{cases} \varepsilon_1, & x > 0 \\ \varepsilon_2, & x < 0 \end{cases}, \quad x \in (-a, a) \quad (2.1)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — неизвестные углы поворота половинок включения.

Аналогично предыдущей эта задача сводится к исследованию интегрального уравнения

$$-\frac{\kappa}{2\mu(\kappa+1)} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{[\sigma_y](\xi) d\xi}{\xi-x} = -\frac{\partial v^0}{\partial x}(x, 0) + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \operatorname{sgn} x, \quad x \in (-a, a) \quad (2.2)$$

дополненного условиями равновесия

$$\int_{-a}^a [\sigma_y](\xi) d\xi = 0, \quad \int_{-a}^a \xi [\sigma_y](\xi) d\xi = 0, \quad \int_0^a (\xi) [\sigma_y](\xi) d\xi = 0 \quad (2.3)$$

Отметим, что (2.2) — уравнение с разрядной правой частью.

Решение задачи (2.2), (2.3) построено в замкнутом виде

$$[\sigma_y](x) = -\frac{A}{24} \left( \frac{6x^2 - 5a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 2a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} \right) \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -(\kappa+1) \pi \sigma^* a / (48\mu L)$$

Отметим, что помимо степенной нерегулярности на концах включения, нормальные контактные напряжения имеют логарифмическую особенность в окрестности точки излома.

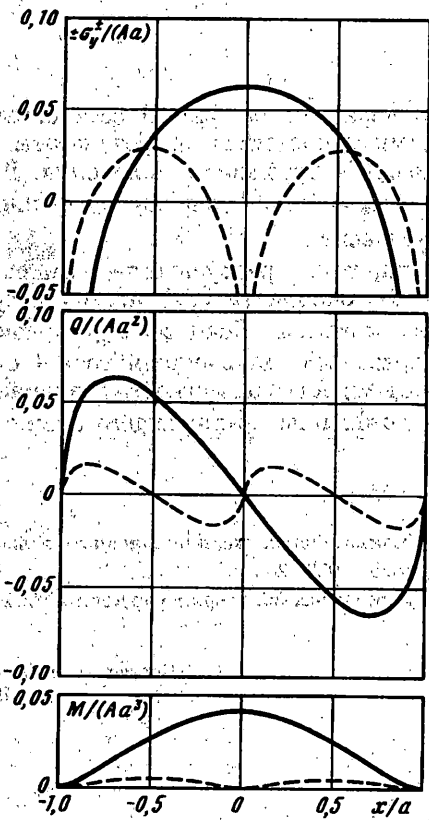
Выполнив операции интегрирования, находим перерезывающую силу и изгибающий момент в разрушенном включении

$$Q(x) = -\frac{Ax}{24} \left( 3\sqrt{a^2 - x^2} - 2a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} \right)$$

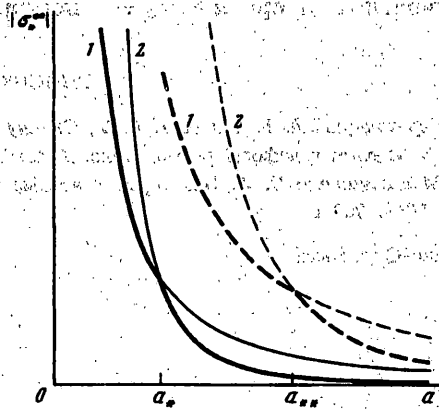
$$M(x) = -\frac{Ax^2}{24} \left( \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} \right)$$

На фиг. 2 показано распределение контактных напряжений  $\pm\sigma_y^* = [\sigma_y]/2$ , построены эпюры перерезывающей силы и изгибающего момента. При этом проиллюстрированы обе задачи: сплошные линии соответствуют неразрушенному, а штриховые — разрушенному включению. Из представленных графиков видно, что излом включения приводит к существенному перераспределению контактных напряжений и к значительной разгрузке продуктов разрушения. Так максимальное значение изгибающего момента уменьшается примерно в 10 раз. Это значит, что критическая нагрузка, приводящая к повторному дроблению включения, по сравнению с (1.9) увеличивается десятикратно.

$$|\sigma_y^*| \approx 10\alpha a^{-3} \quad (2.5)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Задача о перераспределении напряжений в среде с повторно разломанным (четырёхфрагментным) включением формулируется и решается аналогично предыдущей. При этом в правой части интегрального уравнения (2.2) будет фигурировать кусочно-постоянная функция с четырьмя неизвестными коэффициентами.

3. Рассмотрим вопрос о применении полученных результатов в механике разрушения композитных материалов. Напряжения в окрестности концов включения  $x = \pm a$  имеют асимптотику [1]:

$$\sigma_{ij}(r, \vartheta) = \frac{k_2^\pm}{4\sqrt{2r}} f_{ij}(\chi, \vartheta) + O(r^0)$$

где  $r, \vartheta$  — полярные координаты с центром в вершине включения,  $f_{ij}$  — известные функции полярного угла. Коэффициент интенсивности напряжений имеет вид

$$k_2^\pm = \pm \frac{\kappa}{\kappa + 1} \lim_{x \rightarrow \pm a} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a}} [\sigma_y](x)$$

Для первой задачи на основании (1.6) имеем  $k_2^\pm = \pm (\kappa + 1) \sigma^\infty a^{3/2} / (8L)$ . Для второй задачи из формулы (2.4) находим  $k_2^\pm = \mp (\kappa + 1) \sigma^\infty a^{3/2} / (24L)$ . Откажемся от предположения о неограниченной прочности матрицы и адгезионных связей. Принимая гипотезу предельного равновесия в виде  $|k_2^\pm| \leq k_*$  ( $k_*$  — постоянная материала), находим критическую нагрузку, приводящую к разрушению матрицы: для сплошного включения

$$|\sigma_*^\infty| = \beta a^{-3/2}, \quad \beta = 8k_* L / (\kappa + 1) \quad (3.1)$$

для разломанного включения

$$|\sigma_*^\infty| = 3\beta a^{-2} \quad (3.2)$$

Зависимости (3.1) и (3.2) качественно показаны на фиг. 3 соответственно сплошной и штриховой линиями 1. Кривыми 2 представлены результаты (1.9) и (2.5) для критической нагрузки, приводящей к дроблению включения. Линии 1 и 2 пересекаются в точках с абсциссами  $a_* = (\alpha/\beta)^{2/3}$  для неразрушенного и  $a_* \approx (10/3\alpha/\beta)^{2/3} \approx 2,23a_*$  для сломанного включения.

В рамках принятых допущений картина разрушения композиции представляется следующей. Для коротких включений ( $a < a_*$ ) потеря несущей способности происходит путем разрушения матрицы. Если  $a > a_*$ , включение ломается пополам, и происходит сброс напряжений. Дальнейший рост внешней нагрузки при  $a_* < a < a_{**}$  ведет к разрушению матрицы в окрестности разломанного включения, а при  $a > a_{**}$  — к повторному дроблению армирующего элемента.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стацук Н. Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Ивано-Франковск

Поступила в редакцию  
17.VII.1990