

УДК 539.3

© 1994 г. П. Т. КОЩАВЕЦ, В. С. ПРОЦЕНКО

**ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА, СОДЕРЖАЩЕГО
СФЕРОИДАЛЬНУЮ ПОЛОСТЬ**

На основании формул, связывающих гармонические функции в цилиндрической и сжатой сфероидальной системах координат [1], получены формулы переразложения векторных решений уравнения Ламе¹. С помощью полученных формул решена задача о концентрации напряжений в бесконечном упругом цилиндре, растягиваемом на бесконечности усилиями $\epsilon_z = p$, и содержащая полость в форме сжатого сфероида. Такая задача была решена Нейбером в [2], но в предположении, что радиус цилиндра много больше, чем большая полуось сфероида. Проведен сравнительный анализ полученного решения с решением Нейбера. Установлены границы применимости решения Нейбера. В [3] решена задача о растяжении бесконечного упругого цилиндра с шаровой полостью. В статье проводится сравнение полученного решения с решением [3]. В [4] задача о концентрации напряжений в упругом цилиндре, содержащем сжато-сфероидальную полость или дискообразную трещину, сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Анализ полученной системы в [4] не дан. Результаты численного счета, полученные в публикуемой работе и в работе [4] совпадают.

Введем одинаково ориентированные цилиндрическую (ρ, φ, z) и сжатую сфероидальную (α, β, φ) системы координат. Центры этих систем совпадают и координаты связаны между собой следующими соотношениями:

$$\rho = a \operatorname{ch} \alpha \sin \beta, \quad z = a \operatorname{sh} \alpha \cos \beta \quad (1)$$

Частные решения уравнений Ламе принимаются в форме, предложенной в [5]. В системе координат сжатого сфероида они будут иметь вид

$$V_{1,n,m}^{\pm}(\alpha, \beta, \varphi) = \frac{ia}{2n+1} \operatorname{grad} v_{1,n,m}^{\pm}(\alpha, \beta, \varphi),$$

$$V_{2,n,m}^{\pm}(\alpha, \beta, \varphi) = \frac{ia}{2n+1} L(v_{1,n,m}^{\pm}(\alpha, \beta, \varphi)) + \\ + ia \operatorname{ch}^2 \alpha_0 \frac{n+1/2 \mp (m-1/2)}{n+1/2 \pm (m+1/2)} \operatorname{grad} v_{2,n\pm 1,m}^{\pm}(\alpha, \beta, \varphi),$$

$$V_{3,n,m}^{\pm}(\alpha, \beta, \varphi) = -\frac{a}{2n+1} \operatorname{rot}(e_z v_{1,n,m}^{\pm}(\alpha, \beta, \varphi)) \quad (2)$$

$$v_{2,n,m}^{\pm}(\alpha, \beta, \varphi) = P_{n,m}^{\pm} P_n^m(\cos \beta) e^{im\varphi}, \quad P_{n,m}^{+} = Q_n^m(i \operatorname{sh} \alpha), \quad P_{n,m}^{-} = P_n^m(i \operatorname{sh} \alpha)$$

$$v_{1,n,m}^{\pm}(\alpha, \beta, \varphi) = \frac{n+m}{n-m} v_{2,n-1,m}^{\pm}(\alpha, \beta, \varphi) - \frac{n-m+1}{n+m+1} v_{2,n+1,m}^{\pm}(\alpha, \beta, \varphi)$$

$$L = \operatorname{grad} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - 4(\nu-1) \left(\operatorname{grad} - e_z \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

¹ См. также: В. Т. Ерофеевко. Теоремы сложения. Минск: Наука и техника, 1989. 256 с.

где $P_n^m(z)$, $Q_n^m(z)$ — функции Лежандра первого и второго рода, ν — коэффициент Пуассона.

В цилиндрической системе координат частные решения уравнений Ламе берем следующие:

$$\begin{aligned} W_{1,m}^{\pm}(\rho, \varphi, z) &= \lambda^{-1} \text{grad } w_m^{\pm}(\rho, \varphi, z; \lambda), \quad W_{2,m}^{\pm}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} L(w_m^{\pm}(\rho, \varphi, z; \lambda)) \\ W_{3,m}^{\pm}(\rho, \varphi, z) &= i\lambda^{-1} \text{rot}(w_m^{\pm}(\rho, \varphi, z; \lambda)), \quad w_m^{\pm}(\rho, \varphi, z; \lambda) = K_m^{\pm}(\lambda\rho) \exp[i(\lambda z + m\varphi)] \\ w_m^{-}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= I_m(\lambda\rho) \exp[i(\lambda z + m\varphi)] \end{aligned} \quad (3)$$

$$K_m^+(x) = K_m(x) \quad (x > 0), \quad K_m^-(x) = (-1)^m K_m(-x) \quad (x < 0)$$

где $K_m(x)$, $I_m(x)$ — модифицированные функции Бесселя.

Векторные решения (2), (3) позволяют получать точные решения внутренних и внешних задач для сжатого сфероида и кругового цилиндра.

Непосредственным вычислением с использованием формул [1] доказываются две теоремы.

Теорема 1. При $\alpha \geq 0$ справедливы тождества

$$\begin{aligned} W_{k,m}^{-}(\rho, \varphi, z) &= \sum_{n=|m|}^{\infty} A_{nm}^1 [I_{n+\nu}(\lambda a) V_{k,n,m}^{-}(\alpha, \beta, \varphi) + \\ &+ \lambda a \text{ch}^2 \alpha_0 \delta_{k2} I_{n+\nu}(\lambda a) V_{1,n,m}^{-}(\alpha, \beta, \varphi)] \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4)$$

$$A_{nm}^1 = (2n+1) i^{m+1} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda a}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$

Теорема 2. При $\rho > 0$ имеют место разложения

$$\begin{aligned} V_{k,n,m}^{+}(\alpha, \beta, \varphi) &= A_{nm}^2 \int_{-\infty}^{\infty} [I_{n+\nu}(\lambda a) W_{k,m}^{+}(\rho, \varphi, z) + \\ &+ \lambda a \text{ch}^2 \alpha_0 \delta_{k2} I_{n+\nu}(\lambda a) W_{1,m}^{+}(\rho, \varphi, z)] \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \\ A_{nm}^2 &= i^m (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (5)$$

где δ_{kj} — символ Кронекера. В формуле (4) штрих у знака суммы обозначает, что при $m=0$ суммировать необходимо с $n=0$.

Исследуем концентрацию напряжений у сжатой сфероидальной полости, находящейся в бесконечном круговом цилиндре при наличии внешних воздействий на достаточно далеком удалении от полости.

Напряженное состояние в упругом цилиндре представим в виде суммы двух состояний: основного, определяемого заданным напряжением $\sigma_z = p$ на бесконечности и добавочного, вызванного наличием полости. Цилиндр растягивается вдоль оси z , которая совпадает с осью симметрии цилиндра и полости.

Граничные условия будут следующие:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0 \quad (\rho = \rho_0), \quad \sigma_z = p \quad (z \rightarrow \infty) \\ \sigma_\alpha = \tau_{\alpha\varphi} = \tau_{\alpha z} = 0 \quad (\alpha = \alpha_0) \end{aligned} \quad (6)$$

где $\rho = \rho_0$ уравнение цилиндра, $\alpha = \alpha_0$ уравнение сфероидальной полости.

В силу симметрии задачи по оси z и нечетности относительно плоскости $z = 0$ перемещение для добавочного напряженного состояния будут

$$u = \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k V_{k,2n-1,0}^+ (\alpha, \beta, \varphi) + \int_0^{\infty} B_k(\lambda) W_{k,0}^-(\rho, \varphi, z) d\lambda \right) \quad (7)$$

Коэффициенты рядов a_n^k и плотности интегралов $B_k(\lambda)$ находятся из граничных условий

$$F_\rho = 0, \quad F_z = -hp \operatorname{ch} \alpha_0 \cos \beta \quad (\alpha = \alpha_0) \quad (8)$$

$$F_\rho = F_z = 0 \quad (\rho = \rho_0), \quad h^{-2} = \operatorname{ch}^2 \alpha_0 - \sin^2 \beta$$

где F_ρ и F_z — проекции вектора поверхностных сил на соответствующие оси.

Используя теорему 2, вектор перемещений представим в цилиндрической системе координат. Удовлетворяя граничным условиям для добавочного напряженного состояния на цилиндре, получаем выражения плотностей интегралов через коэффициенты рядов

$$B_m(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 a_n^k \beta_n^{mk}(\lambda) \quad (m = 1, 2) \quad (9)$$

$$\beta_n^{mk}(\lambda) = A_{2n-1,0}^2 \lambda^{-1/2} (\alpha_m^k(\lambda) I_{2n-1/2}(\lambda a) + \alpha_m^1(\lambda) \delta_{k2} \lambda a \operatorname{ch} \alpha_0 I_{2n+1/2}(\lambda a))$$

$$\alpha_m^k(\lambda) = \Delta_1^{-1} (h_{1k}^2(\lambda \rho_0) h_{2m}^1(\lambda \rho_0) - h_{2k}^2(\lambda \rho_0) h_{1m}^1(\lambda \rho_0))$$

$$h_{11}^1(x) = (x + 4(1 - \nu) x^{-1}) J_1'(x) + (2\nu - 3) J_1(x)$$

$$h_{12}^1(x) = J_1''(x), \quad h_{21}^1(x) = x J_1(x) + 2(\nu - 1) J_1'(x)$$

$$h_{22}^1(x) = J_1'(x), \quad J_1(x) = I_0(x), \quad J_2(x) = K_0(x)$$

$$\Delta_1 = h_{21}^1(\lambda \rho_0) h_{12}^1(\lambda \rho_0) - h_{11}^1(\lambda \rho_0) h_{22}^1(\lambda \rho_0)$$

С помощью теоремы 1 перемещения для добавочного напряженного состояния (7) запишем в системе координат сжатого сфероида. Удовлетворяя граничным условиям на поверхности сфероидальной полости, получаем связь между коэффициентами рядов и плотностями интегралов. Исключив плотности интегралов с помощью равенства (9), приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$a_n^m = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 a_k^j A_{nk}^{mj} + a_n^{m3} \quad (m = 1, 2) \quad (10)$$

$$\left\| \begin{array}{cc} A_{nk}^{11} & A_{nk}^{12} \\ A_{nk}^{21} & A_{nk}^{22} \end{array} \right\| = \int_0^{\infty} \left\| \begin{array}{cc} a_{11}^n & a_{12}^n \\ a_{21}^n & a_{22}^n \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{array} \right\| d\lambda$$

$$a_{1k}^n = \Delta_2^{-1} (e_{12}^+ e_{2k}^- - e_{22}^+ e_{1k}^-), \quad a_{2k}^n = \Delta_2^{-1} (e_{11}^+ e_{2k}^- - e_{21}^+ e_{1k}^-)$$

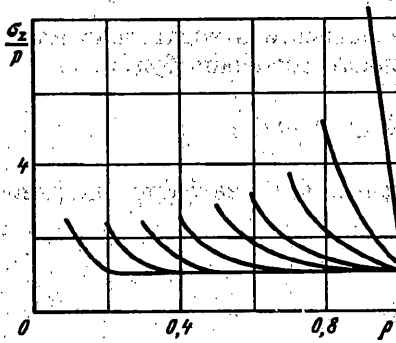
$$e_{11}^{\pm} = \frac{1}{2n(2n-1)} \frac{d}{d\alpha} P_{2n-1,1}^{\pm}, \quad e_{12}^{\pm} = \frac{2n-1/2 \pm 3/2}{2n-1/2 \pm 1/2} i \operatorname{ch} \alpha_0 P_{2n-1 \pm 1,1}^{\pm} +$$

$$+ i \operatorname{sh} \alpha_0 P_{2n-1 \pm 1,0}^{\pm} + \frac{2(\nu-1)}{n(2n-1)} \frac{d}{d\alpha} P_{2n-1,1}^{\pm}$$

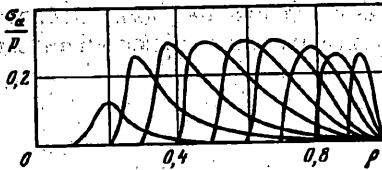
$$e_{21}^{\pm} = P_{2n-1,1}^{\pm}, \quad e_{22}^{\pm} = 2\nu P_{2n-1,1}^{\pm} - i \operatorname{sh} \alpha_0 P_{2n-1 \pm 1,1}^{\pm} + i \operatorname{ch} \alpha_0 \frac{d}{d\alpha} P_{2n-1 \pm 1,1}^{\pm}$$

$$\Delta_2 = e_{11}^+ e_{22}^+ - e_{21}^+ e_{12}^+, \quad a_n^{13} = p \operatorname{ch} \alpha_0 \delta_{n1} e_{12}^+ \Delta_2^{-1}, \quad a_n^{23} = -p \operatorname{ch} \alpha_0 \delta_{n1} e_{11}^+ \Delta_2^{-1}$$

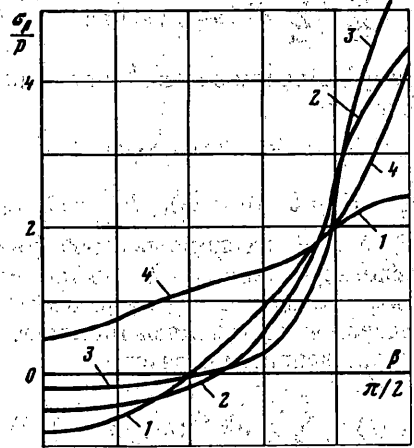
$$S_{jm} = A_{2n-1,0}^1 \lambda^{-1/2} (\beta_k^{jm}(\lambda) I_{2n-1/2}(\lambda a) + i a \lambda \operatorname{ch}^2 \alpha_0 \beta_k^{2m}(\lambda) I_{2n+1/2}(\lambda a) \delta_{j1})$$



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

Асимптотический анализ матричных коэффициентов и свободных членов системы (10) показывает, что двойные ряды из квадратов этих коэффициентов сходятся при условии $\rho_0 > a \operatorname{ch} \alpha_0$ и свободные члены принадлежат l_2 ($a \operatorname{ch} \alpha_0$ — большая полуось сжатого сфероида). Следовательно, матричный оператор бесконечной системы (10) действует вполне непрерывно в l_2 . Для таких уравнений справедлива альтернатива Гильберта о разрешимости. Причем, приближенное решение может быть получено методом редукции.

Зная коэффициенты рядов, по формулам (9) можно найти плотности интегралов $B_m(\lambda)$, а затем все интересующие нас характеристики напряженно-деформируемого состояния, отвечающие перемещению (7).

Численные расчеты проводились при $\nu = 1/3$, $\rho_0 = 1$. Параметр $\varepsilon = a\rho_0^{-1} \operatorname{ch} \alpha_0$ задавался различным, но меньше 1 (ρ_0 — радиус цилиндра).

На фиг. 1 приведены графики величины σ_z/p на площадке $z = 0$ при различных значениях параметра ε . На фиг. 2 изображены графики величины σ_r/p на поверхности полости. Кривые 1—4 соответствуют $\varepsilon = 0, 0,1; 0,7; 0,8; 0,9$. Сравнивались напряжения σ_r на поверхности полости [2] и полученные в данной работе. При $\varepsilon = 0,1$ относительная погрешность решения Нейбера = 0,16%. Чем больше параметр ε , тем больше относительная погрешность. При $\varepsilon = 0,4$ погрешность = 4,5%. Таким образом приближенное решение Нейбера можно использовать при $\varepsilon \leq 0,4$. Погрешность при этом не будет превышать 4,5%.

Если положить $\alpha_0 = 2,5$, то отношение большей полуоси сфероида к меньшей полуоси будет равно 1,013, т. е. сфероид близок к сфере. В таблице приведены значения напряжений σ_z/p при $z = 0$ полученных в [3] (первые строки) и

r_0/ρ_0	$r/\rho_0 = 0,25$	$r/\rho_0 = 0,5$	$r/\rho_0 = 0,75$	$r/\rho_0 = 1$
0,25	2,1632	1,0708	1,0213	0,9906
0,5	2,1166	1,0712	1,0163	0,9891
	—	2,8446	1,3456	0,9847
	—	2,6239	1,2877	0,9762

полученных в публикуемой работе при $\alpha_0 = 2,5$ (вторые строки), r_0 — радиус шаровой полости, r — координата точки, в которой находится напряжение σ_z .

На фиг. 3 изображены графики напряжений σ_α/ρ при $z = 0$ для различных значений параметра ε .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Проценко В. С., Томилова Е. П. Формулы переразложения гармонических функций в цилиндрической и сжато-сфероидальной системах координат//Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 2. С. 20—22.
2. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.: Гостехиздат, 1947. 204 с.
3. Соляник — Красса К. В. Напряженное состояние цилиндра с шаровой полостью//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 62—70.
4. Tsuchida, Uchiyama T. Stresses in an elastic circular cylinder with an oblate spheroidal cavity or an internal penny — shaped crack under tension//Bull ISME. 1980. V. 23. № 175. P. 1—8.
5. Николаев А. Г. Формулы переразложения векторных решений уравнения Ламе в сферической и сфероидальной системах координат//Математические методы анализа динамических систем. Харьков: Харьковский авиац. ин-т. 1984. Вып. 8. С. 100—104.

Харьков

Поступила в редакцию
8.IV.1991