МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1994

УДК 539.3

© 1994 г. В. В. КУЗНЕЦОВ, С. В. ЛЕВЯКОВ

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Рассмотрена теория кинематических групп, ассоциированных с конечными элементами деформируемого тела. Определены понятия обобщенного метрического тензора группы и тензора деформаций. Сформулирована вариационная задача для кинематической группы и дано ее решение для некоторых видов ограничений, накладываемых на радиусы-векторы и метрические свойства векторов группы. Определены основные формы связей деформаций континуума и его энергии с деформациями группы. Исследованы кинематические группы элементов трехмерного континуума, оболочки и стержня. Для формулировки законов состояния использованы понятия инвариантов.

В настоящее время широкое распространение в механике деформируемого тела получили методологические концепции, основанные на дискретизации континуума. Наиболее систематизированным подходом, имеющим многочисленные приложения, является метод конечных элементов (МКЭ) [1, 2].

Вопросы кусочной аппроксимации имеют многие общие черты независимо от природы функций, что обусловило распространение МКЭ на задачи теплопроводности, механики жидкости и газов и другие [1]. Эта общность и применение вариационных принципов послужили основой для представления МКЭ с единых позиций в различных разделах механики и физики.

В [3] для представления деформаций конечных элементов оболочек были введены величины, определяющие взаимное положение узлов элемента и присоединенных векторов-нормалей в узлах. Совокупность таких величин в общем случае характеризует некоторую геометрическую систему, названную в публикуемой статье кинематической группой[1].

Кинематическая группа — это геометрический объект, представляющий собой систему, состоящую из конечного числа точек (узлов) трехмерного пространства с присоединенными векторами и обладающую определенными свойствами геометрической изменяемости.

Для характеристики длин векторов, расстояний между узлами и взаимных угловых положений различных векторов вводится понятие обобщенного метрического тензора группы. Аналогично, степень изменяемости кинематической группы характеризуется обобщенным тензором деформаций группы. Считается, что деформации некоторого конечного элемента континуума, ассоциированного с данной кинематической группой связаны определенным образом с деформациями группы. Следовательно, энергия деформации конечного элемента может быть выражена как функция деформаций группы. Операции, связанные с варьированием энергии, сводятся к вариационной задаче для кинематической группы.

В общем случае рассматриваемые группы — «скелеты» конечных элементов — представляют собой геометрические системы с конечным числом степеней свободы, деформации которых связаны с перемещениями нелинейными зависимостями. Расширение класса кинематических групп путем присоединения любого количества векторов к точкам пространства позволяет описать кинематические схемы тел, полученных из трехмерного континуума на основе гипотез о сохранении направленных отрезков (гипотезы Кирхгофа — Лява, Тимошенко и т. д.). При этом анализ кинематических групп проводится методами векторной алгебры.

Кинематические группы могут совершать большие перемещения в пространстве. Если построена дискретная модель континуума при больших перемещениях, то аналогичная модель при малых перемещениях получается путем линеаризации деформационных соотношений группы.

---

[1] См. также *Кузнецов В. В.* Элементарный анализ геометрии поверхностей и метод конечных элементов в механике упругих оболочек при произвольных перемещениях. М., 1984. 138 с. — Деп. ВИМИ 01.11.84, № ДО6203.

В ряде работ [1, 4—6] отмечалось, что одним из критериев применимости конечных элементов является отсутствие деформаций при перемещениях твердого тела. Определенные затруднения, связанные с выполнением этого критерия, возникали при построении функций форм для криволинейных элементов оболочек. Как показано в настоящей статье, данный вопрос может быть решен в рамках ассоциирования с деформациями кинематических групп. При этом оставляется большая степень свободы в выборе функций, описывающих связь деформаций континуума с деформациями группы.

Рассматриваемая ниже теория кинематических групп может быть применена для построения и изучения дискретных аналогов сложных нелинейных моделей деформируемых тел [7—14].

1. Метрические тензоры и тензоры деформаций. Обозначим радиусы-векторы узлов группы через $\mathbf{R}_i$, а присоединенные векторы в i-ом узле через $\mathbf{d}_{ik}$ $(i = 0, \ldots, n)$. Узел с номером 0 является полюсом группы. Введем основные векторы группы $\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0$ $(i = 1, \ldots, n)$, характеризующие положение узлов относительно полюса (фиг. 1). Векторы $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{d}_{jk}$ образуют совокупность метрических векторов $\mathbf{m}_k$ группы. В дальнейшем, если дается какое-либо выражение для векторов $\mathbf{m}_k$, то оно справедливо для любых векторов $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{d}_{jk}$.

Введем обобщенный метрический тензор группы g_{ij} с помощью формулы

$$g_{ij} = \mathbf{m}_i\mathbf{m}_j \tag{1.1}$$

При этом обобщенный метрический тензор эквивалентен введению первого a_{ij}, второго b_{ijk} и третьего c_{ijkl} метрических тензоров группы

$$a_{ij} = \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j, \quad b_{ijk} = \mathbf{r}_i\mathbf{d}_{jk}, \quad c_{ijkl} = \mathbf{d}_{ij}\mathbf{d}_{kl} \tag{1.2}$$

Первый метрический тензор позволяет определить расстояния l_{ij} между узлами группы и косинусы углов между любыми векторами, соединяющими узлы группы. Действительно, обозначая $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, имеем

$$l_{ij}^2 = \mathbf{r}_{ij}^2 = a_{ii} - 2a_{ij} + a_{jj} \tag{1.3}$$

$$\cos(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_{kl}) = (a_{ik} - a_{il} - a_{jk} + a_{jl})\,(l_{ij}l_{kl})^{-1}$$

Аналогично, третий метрический тензор определяет длины присоединенных векторов и косинусы углов между ними. Положение присоединенных векторов относительно основных векторов определяется вторым метрическим тензором.

Заметим, что в общем случае не все компоненты тензора g_{ij} являются независимыми. Данное обстоятельство связано с тем, что базис трехмерного пространства определяется тремя линейно независимыми векторами. Однако это не противоречит свободе выбора любого количества метрических векторов группы.

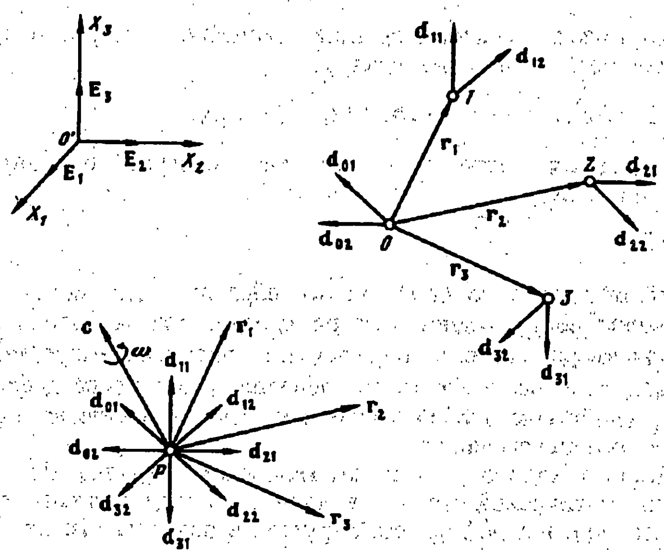
Установим соотношения, связывающие компоненты обобщенного метрического тензора. Пусть заданы две подгруппы векторов $\mathbf{m}_i$, $\mathbf{m}_j$, $\mathbf{m}_k$ и $\mathbf{m}_r$, $\mathbf{m}_s$, $\mathbf{m}_p$. Вводя обозначение для смешанного произведения векторов $\mathbf{m}_i\mathbf{m}_j\mathbf{m}_k = (\mathbf{m}_i \times \mathbf{m}_j)\,\mathbf{m}_k$ имеем тождество

$$[(\mathbf{m}_i\mathbf{m}_j\mathbf{m}_k)\,(\mathbf{m}_r\mathbf{m}_s\mathbf{m}_p)]^2 = (\mathbf{m}_i\mathbf{m}_j\mathbf{m}_k)^2\,(\mathbf{m}_r\mathbf{m}_s\mathbf{m}_p)^2 \tag{1.4}$$

Раскрывая это выражение через компоненты обобщенного метрического тензора, получим:

$$\begin{vmatrix} g_{ir} & g_{is} & g_{ip} \\ g_{jr} & g_{js} & g_{jp} \\ g_{kr} & g_{ks} & g_{kp} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} g_{ii} & g_{ij} & g_{ik} \\ g_{ji} & g_{jj} & g_{jk} \\ g_{ki} & g_{kj} & g_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_{rr} & g_{rs} & g_{rp} \\ g_{sr} & g_{ss} & g_{sp} \\ g_{pr} & g_{ps} & g_{pp} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

Данное условие имеет следующий смысл: скалярные произведения векторов



Фиг. 1

одной подгруппы на векторы другой подгруппы связаны со скалярными произведениями векторов внутри каждой из подгрупп соотношением (1.5)[2].

Если дано n метрических векторов, то тензор g_{ij} определяется $n(n+1)/2$ компонентами (с учетом симметрии $g_{ij} = g_{ji}$). Количество независимых уравнений вида (1.5), связывающих указанное число компонент между собой, определяется формулой $(n-3)(n-2)/2$ при $n > 3$. При $1 \le n \le 3$ при $n(n+1)/2$ компонент тензора g_{ij} являются независимыми.

Допустим, что узлы группы с присоединенными векторами перемещаются в пространстве. Обобщенный тензор деформаций кинематической группы e_{ij} определим следующим образом[3].

$$e_{ij} = \tfrac{1}{2}(\overset{\vee}{g}_{ij} - g_{ij}) \tag{1.6}$$

где галочка относится к деформированному состоянию.

Тензор e_{ij} эквивалентен введению соответственно первого, второго и третьего тензоров деформаций, определяющих изменение относительной конфигурации группы

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(\overset{\vee}{a}_{ij} - a_{ij}), \quad \vartheta_{ijk} = \tfrac{1}{2}(\overset{\vee}{b}_{ijk} - b_{ijk})$$

$$\nu_{ijkl} = \tfrac{1}{2}(\overset{\vee}{c}_{ijkl} - c_{ijkl}) \tag{1.7}$$

Условия связи компонент обобщенного метрического тензора в деформированном состоянии также даются формулами (1.5) с заменой g_{ij} на $\overset{\vee}{g}_{ij}$. Выражая компоненты $\overset{\vee}{g}_{ij}$ согласно определению (1.6) через e_{ij}, получим соотношения, связывающие компоненты обобщенного тензора деформаций. Число независимых компонент тензора e_{ij} также определяется формулой $(n-3)(n-2)/2$ при $n > 3$.

2. Перемещение группы как твердого тела и вращение метрических векторов. Представим для удобства, что все метрические векторы группы сведены в произвольную точку пространства P (фиг. 1). Рассмотрим преобразование, при

[2] В механике континуума компоненты метрического тензора связаны дифференциальными зависимостями.

[3] Множитель 1/2 в (1.6) несуществен и здесь введен, следуя традиции, установившейся в механике деформируемого тела.

котором все метрические векторы группы совершают поворот вокруг некоторой оси, характеризуемой ортом $\mathbf{c}$ на угол ω:

$$\mathbf{m}_i^{\vee} = \mathbf{m}_i + \sin\omega \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{m}_i + (1 - \cos\omega)\, \mathbf{c} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{m}_i) \tag{2.1}$$

При этом радиусы-векторы узлов, как следует из определения $\mathbf{r}_i^{\vee}$, преобразуются по закону

$$\mathbf{R}_i^{\vee} = \mathbf{R}_0^{\vee} + \mathbf{r}_i^{\vee} \tag{2.2}$$

где $\mathbf{r}_i^{\vee}$ определяются согласно (2.1). Таким образом, если метрические векторы совершают поворот вокруг одной оси на один и тот же угол, то вся группа перемещается как твердое тело. Далее, составляя произведения $\mathbf{m}_i^{\vee}\mathbf{m}_j^{\vee}$, убеждаемся, что $\mathbf{m}_i^{\vee}\mathbf{m}_j^{\vee} = \mathbf{m}_i\mathbf{m}_j$, т. е. все компоненты обобщенного тензора деформаций равны нулю. Отсюда, свойством любой свободной группы является возможность ее бездеформационного перемещения.

3. Вариационная задача для кинематической группы. Под вариационной задачей для кинематической группы в данном случае понимается определение вариаций любого порядка деформаций группы в зависимости от вариаций обобщенных координат. Общие формулы имеют вид

$$\delta e_{ij} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{m}_i^{\vee}\delta\mathbf{m}_j^{\vee} + \mathbf{m}_j^{\vee}\delta\mathbf{m}_i^{\vee}) \tag{3.1}$$

$$\delta^2 e_{ij} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{m}_i^{\vee}\delta^2\mathbf{m}_j^{\vee} + 2\delta\mathbf{m}_i^{\vee}\delta\mathbf{m}_j^{\vee} + \mathbf{m}_j^{\vee}\delta^2\mathbf{m}_i^{\vee})$$

$$\delta^k e_{ij} = \tfrac{1}{2}\,\Big(\sum_{s=0}^{k} C_k^s\,\delta^s\mathbf{m}_i^{\vee}\,\delta^{k-s}\mathbf{m}_j^{\vee} - \mathbf{m}_i\mathbf{m}_j\delta_{k0}\Big)$$

$$\delta^0 e_{ij} = e_{ij},\quad C_k^s = \frac{k\,!}{s\,!\,(k-s)\,!}$$

где δ_{k0} — символ Кронекера. Заметим, что справедливо следующее соотношение, вытекающее из определения рядов Тейлора, составленных по вариациям e_{ij}, $\mathbf{m}_i^{\vee}$:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p\,!}\,\delta^p e_{ij} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{m}_i^{\vee\vee}\mathbf{m}_j^{\vee\vee} - \mathbf{m}_i\mathbf{m}_j), \tag{3.2}$$

$$\mathbf{m}_i^{\vee\vee} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p\,!}\,\delta^p\mathbf{m}_i^{\vee}$$

Дальнейшее раскрытие содержания вариаций векторов $\mathbf{m}_i^{\vee}$ требует введения обобщенных координат и связанных с ними понятий. Обобщенные координаты позволяют описать возможные состояния группы. Следует отметить, что их введение в данном случае связано именно с рассматриваемой вариационной задачей.

Поэтому имеет смысл говорить не о самых обобщенных координатах, а об их вариациях. При этом, рассматривая переход векторов $\mathbf{m}_i^{\vee}$ в положение $\mathbf{m}_i^{\vee\vee}$, можно считать, что положению $\mathbf{m}_i^{\vee}$ отвечают нулевые значения вариаций обобщенных координат. Выражения для вариаций векторов определяются ограничениями, наложенными на кинематическую группу. При этом могут быть использованы различные формы представления вариаций.

Простейший тип связи — ограничения, накладываемые на изменения радиусов-векторов отдельных узлов группы. Более сложный тип связей определяется ограничениями, накладываемыми на метрические свойства векторов.

В случае отсутствия каких-либо ограничений на радиусы-векторы узлов вариации основных векторов имеют вид (суммирование по k):

$$\delta \mathbf{r}_i^\vee = \delta \mathbf{R}_i^\vee - \delta \mathbf{R}_0^\vee, \; \delta R_j^\vee = \mathbf{E}_k \delta X_{jk}^\vee \; (i = 0, 1, 2, \ldots; \; k = 1, 2, 3) \tag{3.3}$$

где $\delta X_{jk}^\vee$ — вариации обобщенных координат, $\mathbf{E}_k$ — базис трехмерного пространства. При отсутствии ограничений на присоединенные векторы, имеем

$$\delta \mathbf{d}_{ij}^\vee = \mathbf{E}_k \delta d_{ijk}^\vee \tag{3.4}$$

где $\delta d_{ijk}^\vee$ — вариации проекций вектора $\mathbf{d}_{ij}^\vee$ на орты $\mathbf{E}_k$. При ограничениях, накладываемых на некоторые радиусы-векторы узлов, соответствующие $\delta X_{jk}^\vee$ полагаются равными нулю. Замечая, что в силу (3.3), (3.4) $\delta^2 \mathbf{m}_i^\vee = 0$, получаем $\delta^k e_{ij} = 0$ при $k > 2$.

Рассмотрим вариации векторов при ограничениях, накладываемых на их метрические свойства. Нахождение явных выражений для вариаций векторов при ограничениях общего вида связано, по-видимому, с определенными математическими трудностями. Однако, существуют частные случаи ограничений, которые наиболее часто встречаются в приложениях. Они представляют собой ограничения, выраженные равенством нулю некоторого количества компонент обобщенного тензора деформаций.

Пусть уравнение связи имеет вид $e_{ii} = 0$:

$$\mathbf{m}_i^{\vee 2} = \mathbf{m}_i^2 \tag{3.5}$$

т. е. при деформации группы отдельный метрический вектор $\mathbf{m}_i$ не меняет своей длины. Варьируя равенство (3.5), получим

$$\mathbf{m}_i^\vee \delta \mathbf{m}_i^\vee = 0 \tag{3.6}$$

Решение уравнения (3.6) имеет вид (суммирование по k):

$$\delta \mathbf{m}_i^\vee = \mathbf{e}_k^\vee \delta \varphi_k \; (k = 1, 2) \tag{3.7}$$

где $\mathbf{e}_k^\vee$; — базисные векторы плоскости, ортогональной к вектору $\mathbf{m}_i^\vee$; $\delta \varphi_k$ — вариации обобщенных координат.

Вариации произвольного порядка вектора $\mathbf{m}_i^\vee$ выражаются формулами [15]:

$$\delta^{2k+1} \mathbf{m}_i^\vee = (-1)^k \, \delta \varphi^{2k} \delta \mathbf{m}_i^\vee, \; \delta \varphi = |\delta \mathbf{m}_i^\vee| \tag{3.8}$$

$$\delta^{2k} \mathbf{m}_i^\vee = (-1)^k \, \delta \varphi^{2k} \mathbf{m}_i^\vee \; (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Рассмотрим случай связей, накладываемых на некоторые подгруппы метрических векторов

$$e_{ij} = 0, \quad \mathbf{m}_i^\vee \mathbf{m}_j^\vee = \mathbf{m}_i \mathbf{m}_j \tag{3.9}$$

так что совокупность равенств (3.9) образует некоторое количество нулевых, не пересекающихся между собой подматриц не менее 2-го порядка, в обобщенном тензоре деформаций

$$\|e_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} 0 & \vdots & e_{mn} & \vdots \\ \dots & e_{kk} & \dots & \dots \\ e_{nm} & \vdots & 0 & \vdots \\ \dots & \vdots & \dots & e_{rr} \end{matrix} \right\|$$

Тогда решение вариационной задачи для каждой подгруппы векторов находится независимо, а вариации ненулевых компонент e_{ij}, зависящих от векторов выделенных подгрупп, выражаются через вариации обобщенных координат этих подгрупп. Варьируя равенства (3.9), получим

$$m_i^\vee \delta m_j^\vee + m_j^\vee \delta m_i^\vee = 0 \tag{3.10}$$

Решение вариационных уравнений (3.10) имеет вид (суммирование по k):

$$\delta m_i^\vee = \delta\omega \times m_i^\vee, \ \delta\omega = \delta\omega_k E_k \ (k = 1, 2, 3) \tag{3.11}$$

Для вариаций высших порядков имеют место формулы [16]:

$$\delta^2 m_i^\vee = \delta\omega \times (\delta\omega \times m_i^\vee), \quad \delta^{2k+1} m_i^\vee = (-1)^k \delta\omega^{2k} \delta m_i^\vee$$

$$\delta^{2k+2} m_i^\vee = (-1)^k \delta\omega^{2k} \delta^2 m_i^\vee, \quad \delta\omega = |\delta\omega| \tag{3.12}$$

Здесь $\delta\omega$ — произвольный вектор с проекциями $\delta\omega_k$ на орты E_k. Очевидно, что в рассматриваемом случае вектор $\delta\omega$ для каждой подгруппы векторов принимает свои значения.

Обратим внимание на существование вариаций любого порядка от ненулевых компонент тензора деформации e_{ij}, содержащих векторы, удовлетворяющие уравнениям связей (3.5), (3.9). Соответствующие выражения получаются подстановкой $\delta^k m_i^\vee$ в формулы (3.1). Как следует из (3.7), (3.11), вариация каждого вектора $m_i^\vee$, удовлетворяющего ограничению (3.5), зависит от вариаций двух обобщенных координат, а вариация каждого вектора $m_i^\vee$, входящего в подгруппу с ограничениями (3.9), зависит от вариаций трех обобщенных координат, общих для всех векторов данной подгруппы.

Введенные понятия вариаций обобщенных координат для векторов с ограничениями связаны в данном случае с компонентами некоторых произвольных векторов. Таким вектором в формулах (3.8) является δm_i, а в формулах (3.12) — $\delta\omega$.

Имея вариации любого порядка, можно получить выражение для вектора $m_i^{\vee\vee}$ через вариации обобщенных координат (3.2).

В рассмотренных выше случаях ряды (3.2) обладают сходимостью при любых значениях вариаций. Так, при ограничениях типа (3.5) получаем

$$m_i^{\vee\vee} = m_i^\vee \cos\delta\varphi + \delta m_i^\vee \sin\delta\varphi/\delta\varphi \tag{3.13}$$

При ограничениях типа (3.9) имеем

$$m_i^{\vee\vee} = m_i^\vee + \frac{\sin\delta\omega}{\delta\omega}\delta\omega \times m_i^\vee + \frac{1-\cos\delta\omega}{\delta\omega^2}\delta\omega \times (\delta\omega \times m_i^\vee) \tag{3.14}$$

Если вариации обобщенных координат известны, то с помощью формул (3.13), (3.14) определяются новые положения векторов $m_i^{\vee\vee}$. Очевидно, что как только найдено новое положение векторов, предыдущее состояние может быть «забыто», поскольку компоненты тензоров деформаций не зависят от промежуточных положений. Поэтому при последующих варьированиях можно считать, что достигнутому состоянию группы отвечают нулевые значения вариаций обобщенных координат. Такой процесс последовательного перевода группы из одного положения в другое применяется при поисках состояний, отвечающих стационарному значению энергии деформируемых тел.

4. Малые перемещения кинематических групп. В предыдущем изложении теории деформаций кинематических групп считалось, что величины деформаций, перемещений и углов поворота могут принимать любые значения. При малых значениях указанных величин, полученные выше соотношения можно упростить, используя приемы линеаризации. Обозначая $\mathbf{u}_i = \mathbf{m}_i^\vee - \mathbf{m}_i$, $\mathbf{t}_i = \mathbf{r}_i^\vee - \mathbf{r}_i$, $\mathbf{w}_{ij} = \mathbf{d}_{ij}^\vee - \mathbf{d}_{ij}$ и сохраняя в выражениях для компонент тензоров деформаций члены, линейные относительно $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{t}_i$, $\mathbf{w}_{ij}$ получаем

$$e_{ij} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{m}_i\mathbf{u}_j + \mathbf{m}_j\mathbf{u}_i), \quad \varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_i\mathbf{t}_j + \mathbf{r}_j\mathbf{t}_i) \tag{4.1}$$

$$\vartheta_{ijk} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_i\mathbf{w}_{jk} + \mathbf{d}_{jk}\mathbf{t}_i), \quad \nu_{ijkl} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}_{ij}\mathbf{w}_{kl} + \mathbf{d}_{kl}\mathbf{w}_{ij}) \tag{4.2}$$

Здесь $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{w}_{ij}$ — приращения метрических и присоединенных векторов, $\mathbf{t}_i$ — приращения основных векторов.

Аналогично, принимая вариации обобщенных координат малыми, запишем линеаризованные соотношения для рассмотренных типов ограничений, накладываемых на метрические векторы

$$\delta\mathbf{u}_i = \delta\mathbf{m}_i^\vee = \mathbf{e}_k\delta\varphi_k, \quad \delta\mathbf{u}_i = \delta\mathbf{m}_i^\vee = \delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}_i \tag{4.3}$$

Как следует из выражений (4.1), вариации второго и выше порядков для компонент обобщенного тензора деформаций равны нулю. Переход векторов $\mathbf{m}_i^\vee$ в новое состояние описывается формулами (в соответствии с (3.13), (3.14):

$$\mathbf{m}_i^{\vee\vee} = \mathbf{m}_i^\vee + \delta\mathbf{m}_i^\vee, \quad \mathbf{m}_i^{\vee\vee} = \mathbf{m}_i^\vee + \delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}_i^\vee \tag{4.4}$$

Аналогично можно установить, что если метрические векторы преобразуются по линеаризованной формуле (2.1), т. е.

$$\mathbf{m}_i^\vee = \mathbf{m}_i + \boldsymbol{\omega}\mathbf{c} \times \mathbf{m}_i, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{m}_i^\vee - \mathbf{m}_i = \boldsymbol{\omega}\mathbf{c} \times \mathbf{m}_i \tag{4.5}$$

то векторы перемещений узлов группы преобразуются по закону

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\mathbf{c} \times \mathbf{r}_i, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{R}_i^\vee - \mathbf{R}_i \tag{4.6}$$

Выражения (4.5), (4.6) представляют собой линеаризованные формулы для перемещения группы как твердого тела. Несложно убедиться, что при этом все компоненты линеаризованного тензора деформаций (4.1) обращаются в нуль.

5. Кинематические группы и конечные элементы континуума. Выделение понятия кинематической группы тесно связано с методами анализа деформируемых тел, основанными на дискретизации континуума. Это, прежде всего, относится к методу конечных элементов, где применяется аппарат интерполирования неизвестных функций в элементах континуума по некоторым их дискретным значениям.

Определение. Конечный элемент континуума называется ассоциированным с какой-либо кинематической группой, если деформации E_{ij} в каждой точке элемента непрерывно зависят от деформаций группы $E_{ij} = E_{ij}(e_{11}, e_{12}, \ldots)$, причем

$$E_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad e_{11} = e_{12} = \ldots = 0 \tag{5.1}$$

Аппроксимация полей деформаций в пределах элемента осуществляется с помощью процедуры интерполирования через деформации группы. Простейшая форма связи деформаций элемента с деформациями группы выглядит следующим образом (суммирование по k, m):

$$E_{ij} = N_{ijkm} e_{km} \tag{5.2}$$

где N_{ijkm} — функции положения точки в объеме элемента.

Данное выше определение функциональной связи деформаций элемента сплошной среды с деформациями группы позволяет сделать заключение о некоторых свойствах конечных элементов. Согласно выводу п. 2, при перемещениях твердого тела все деформации группы равны нулю. С учетом (5.1) таким же свойством будут обладать деформации конечного элемента континууму, ассоциированного с любой кинематической группой. Нарушение данного свойства возможно только для элементов, не ассоциированных ни с одной кинематической группой.

Заметим, что в линейной механике деформируемого тела выражение (5.2) является единственно возможной формой связи деформаций континуума с деформациями группы, поскольку формула (5.2) устанавливает общий вид линейной зависимости между E_{ij} и e_{km}.

Физические свойства элемента континуума определяются зависимостью потенциальной энергии деформации П от компонент тензора деформаций E_{ij}. Предполагая, что конечный элемент континуума ассоциирован с некоторой кинематической группой, можно получить зависимость П от деформаций группы

$$\Pi\,(e_{11},\ e_{12}, \ldots) = \Pi\,[E_{ij}\,(e_{11}, e_{12}, \ldots)] \tag{5.3}$$

Учитывая, что не все компоненты e_{ij} являются независимыми, можно с помощью выделения независимых компонент тензора деформаций γ_k определить энергию через меньшее число параметров $\Pi = \Pi\,(\gamma_1,\ \gamma_2, \ldots)$.

В качестве независимых компонент тензора деформаций кинематической группы γ_k можно использовать как независимые компоненты e_{ij}, так и их линейные комбинации. В более широкой трактовке γ_k могут представлять собой нелинейные функции e_{ij}.

Следует заметить, что зависимость вида $\Pi = \Pi\,(\gamma_1,\ \gamma_2, \ldots)$ включает в себя информацию не только о физических свойствах элемента, но также о его геометрии и способах аппроксимации полей деформаций.

В общем случае потенциальная энергия конечного элемента может быть представлена в окрестности некоторого состояния рядом Тейлора по своим вариациям

$$\Pi^* = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\,\delta^p\Pi \tag{5.4}$$

Для конечных элементов сложной структуры определение вариаций энергии является достаточно трудоемкой задачей. Однако ее решение весьма важно для приложений, поскольку в терминах вариаций формулируются условия равновесия и устойчивости континуума, а также итерационные методы нахождения равновесных состояний нелинейных систем.

Рассмотрим один из наиболее распространенных классов конечных элементов континуума, для которого внутренние обобщенные силы $\partial\Pi/\partial\gamma_i$ являются линейными функциями обобщенных деформаций кинематической группы (суммирование по j)

$$\partial\Pi/\partial\gamma_i = K_{ij}\,\gamma_j \tag{5.5}$$

Здесь K_{ij} — коэффициенты симметричной положительно определенной матрицы, не зависящие от γ_i. В этом случае потенциальная энергия имеет вид (суммирование по i, j):

$$\Pi = \tfrac{1}{2} K_{ij}\,\gamma_i\gamma_j \tag{5.6}$$

Поскольку внутренние обобщенные силы линейны относительно γ_l, назовем такие конечные элементы физически линейными. В общем случае γ_l нелинейно связаны с перемещениями и поворотами кинематической группы и определяют поведение элементов континуума при больших перемещениях и поворотах. В рассматриваемом случае можно указать конечные формулы для вариаций энергии, имеющие вид (суммирование по i, j):

$$\delta\Pi = K_{lj}\gamma_l\delta\gamma_j, \quad \delta^p\Pi = 1/2K_{lj}\sum_{s=0}^{p} C_p^s\delta^s\gamma_l\delta^{p-s}\gamma_j \tag{5.7}$$

Ввиду того, что коэффициенты K_{lj} образуют симметричную матрицу, число суммирований в выражении для $\delta^p\Pi$ можно уменьшить вдвое. В результате получим

$$\begin{aligned} &\delta^p\Pi = K_{lj}\Big(\sum_{s=0}^{p/2-1} C_p^s\delta^s\gamma_l\delta^{p-s}\gamma_j + \frac{1}{2}C_p^{p/2}\delta^{p/2}\gamma_l\delta^{p/2}\gamma_j\Big) \ (p \text{ — четное}) \\ &\delta^p\Pi = K_{lj}\sum_{s=0}^{(p-1)/2} C_p^s\delta^s\gamma_l\delta^{p-s}\gamma_j \ (p \text{ — нечетное}) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Формулы (5.8) с учетом выражений (3.1) показывают, что вариационная задача для конечного элемента континуума с энергией вида (5.6) сводится к вариационной задаче для кинематической группы.

В приложениях, как правило, требуется определение первых двух вариаций потенциальной энергии элемента, которые являются соответственно линейной и квадратичной формами вида (суммирование по i, j):

$$\delta\Pi = g_l\delta q_l, \quad \delta^2\Pi = h_{lj}\,\delta q_l\delta q_j \tag{5.9}$$

где g_l, h_{lj} — коэффициенты первой и второй вариаций энергии; δq_l — вариации обобщенных координат кинематической группы.

Если ограничиться определением первых двух вариаций энергии (5.9), то можно указать эффективный алгоритмический процесс вычисления для весьма сложных зависимостей $\Pi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$. Будем рассматривать зависимость $\Pi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ как формулу с большой степенью вложенности выражений вида

$$\begin{aligned} &\Pi = \Pi(u_1^1, u_2^1, \ldots), \quad u_l^1 = u_l^1(u_1^2, u_2^2, \ldots) \\ &u_l^2 = u_l^2(u_1^3, u_2^3, \ldots), \ \ldots, \ u_l^n = \gamma_l \end{aligned} \tag{5.10}$$

Здесь u_l^k — переменные k-го уровня, причем переменные n-го уровня равны независимым деформациям кинематической группы, а переменными $(n+1)$-го уровня являются вариации обобщенных координат кинематической группы. Тогда вычисление коэффициентов вариаций энергии проводится по следующим рекуррентным соотношениям [17] (суммирование по j, k):

$$\begin{aligned} &g_s^1 = \frac{\partial\Pi}{\partial u_s^1}, \quad h_{sr}^1 = \frac{\partial^2\Pi}{\partial u_s^1\partial u_r^1}, \quad g_s^{l+1} = (g_l u_j{}^{,s})^l \\ &h_{sr}^{l+1} = (h_{jk}u_j{}^{,s}u_k{}^{,r} + g_k u_k{}^{,sr})^l \end{aligned} \tag{5.11}$$

Здесь верхний индекс, вынесенный за скобки, показывает, к какому уровню относятся величины, стоящие в скобках; индексы после запятой означают дифференцирование по переменным $(i+1)$-го уровня.

Если определены значения g_s^n, h_{sr}^n, то первая и вторая вариации Π сводятся к вариационной задаче для кинематической группы [18]:

$$\delta\Pi = g_s^n\delta\gamma_s, \quad \delta^2\Pi = h_{sr}^n\delta\gamma_s\delta\gamma_r + g_s^n\delta^2\gamma_s \tag{5.12}$$

Искомые значения g_i, h_{ij}, входящие в (5.9), находятся как коэффициенты при вариациях обобщенных координат кинематической группы δq_i после раскрытия выражений $\delta\gamma_s$, $\delta^2\gamma_s$ согласно (3.1). В случае $n = 1$ (двухуровневое представление) значения g_s^n, h_{sr}^n определяются как частные производные по γ_s:

$$g_s^n = \partial\Pi/\partial\gamma_s, \quad h_{sr}^n = \partial^2\Pi/\partial\gamma_s\partial\gamma_r \tag{5.13}$$

Для энергии вида (5.6) имеем

$$g_s^n = K_{sl}\gamma_l, \quad h_{sr}^n = K_{sr} \tag{5.14}$$

Выражения для первых двух вариаций (5.12) позволяют получить аппроксимацию потенциальной энергии ансамбля конечных элементов в виде отрезка ряда Тейлора в окрестности некоторого состояния кинематической группы

$$\Pi^* = \Pi + \delta\Pi + \tfrac{1}{2}\delta^2\Pi \tag{5.15}$$

Если применить данное разложение для записи необходимого условия стационарности полной потенциальной энергии ансамбля конечных элементов $\delta Э = 0$ ($Э = \Pi^* + W$, где W — потенциал внешних сил), то для определения δq_i получим систему линейных алгебраических уравнений итерационного метода Ньютона (суммирование по j):

$$(h_{ij} + h_{ij}^W)\,\delta q_j + g_i + g_i^W = 0 \tag{5.16}$$

где g_i^W, h_{ij}^W — коэффициенты первой и второй вариации потенциала внешних сил.

Решение линейной задачи получается на первой итерации метода Ньютона (5.16).

6. Кинематическая группа элемента трехмерного континуума. Выделим в трехмерном континууме элемент в виде треугольной пирамиды. Такой элемент принадлежит кинематической группе, характеризуемой тремя линейно независимыми основными векторами (фиг. 2).

Первый метрический тензор и тензор деформации определяются соотношениями

$$a_{ij} = \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j, \quad \varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_i^{\mathrm{v}}\mathbf{r}_j^{\mathrm{v}} - \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j) \tag{6.1}$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{r}_i^{\mathrm{v}} = \mathbf{R}_i^{\mathrm{v}} - \mathbf{R}_0^{\mathrm{v}} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

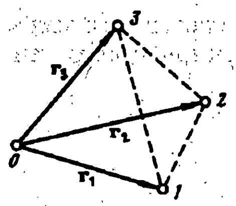
Для тензора деформаций (6.1) существует первая и вторая вариации, имеющие вид

$$\delta\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{r}_i^{\mathrm{v}}(\delta\mathbf{R}_j^{\mathrm{v}} - \delta\mathbf{R}_0^{\mathrm{v}}) + \mathbf{r}_j^{\mathrm{v}}(\delta\mathbf{R}_i^{\mathrm{v}} - \delta\mathbf{R}_0^{\mathrm{v}})\right]$$

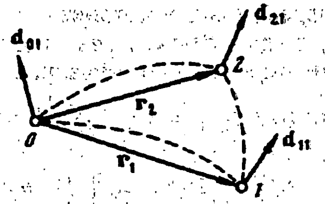
$$\delta^2\varepsilon_{ij} = (\delta\mathbf{R}_i^{\mathrm{v}} - \delta\mathbf{R}_0^{\mathrm{v}})(\delta\mathbf{R}_j^{\mathrm{v}} - \delta\mathbf{R}_0^{\mathrm{v}}) \tag{6.2}$$

Вариации высших порядков равны нулю в случае отсутствия каких-либо ограничений на метрические векторы $\mathbf{r}_i^{\mathrm{v}}$. Здесь за вариации обобщенных координат принимаются вариации проекций векторов группы $\mathbf{R}_i^{\mathrm{v}}$ ($i = 0, 1, 2, 3$) на оси декартовой системы координат. Состояние группы определяется шестью независимыми параметрами γ_k, в качестве которых принимаются компоненты первого тензора деформаций: ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}, ε_{12}, ε_{13}, ε_{23}. Если элемент является достаточно малым, то ковариантные компоненты тензора деформаций E_{ij} в объеме элемента можно принять постоянными, так что $E_{ij} = \varepsilon_{ij}$.

Следует отметить, что величины ε_{ij} не являются физическими деформациями, а выступают в качестве мер деформаций. Определение физических деформаций не потребуется, если при записи потенциальной энергии воспользоваться инвариантными величинами [19].



Фиг. 2



Фиг. 3

Первый и второй инварианты тензора деформаций рассматриваемого элемента соответственно имеют вид

$$I_E = d_{aaa}^{-1}\,(d_{Eaa} + d_{aEa} + d_{aaE}) \tag{6.3}$$

$$I_{EE} = d_{aaa}^{-1}\,(d_{EEa} + d_{EaE} + d_{aEE})$$

$$d_{ABC} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \tag{6.4}$$

Если в качестве физических деформаций принять главные деформации ε_1, ε_2, ε_3, то выражения (6.3) эквивалентны формулам:

$$I_E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad I_{EE} = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 \tag{6.5}$$

В соответствии с законом состояния потенциальная энергия в изотропном линейно упругом теле имеет вид

$$\Pi = 1/2 \int [(\lambda + 2\mu)\, I_E^2 - 4\mu I_{EE}]\, dV \tag{6.6}$$

где λ, μ — постоянные Ламе, V — объем элемента.

Поскольку подынтегральное выражение (6.6) постоянно в пределах элемента, то потенциальную энергию можно записать в конечном виде

$$\Pi = 1/12\, [(\lambda + 2\mu)\, I_E^2 - 4\mu I_{EE}]\, d_{aaa}^{1/2} \tag{6.7}$$

Как следует из соотношений (6.3), (6.7), потенциальная энергия является квадратичной формой вида (5.6), коэффициенты которой K_{ij} определяются как вторые частные производные по γ_i, γ_j от выражения (6.7).

Для вычисления коэффициентов первой и второй вариаций потенциальной энергии, необходимых для формулировки уравнений равновесия, используется двухуровневая схема варьирования (5.12), (5.14).

Приведенные выше соотношения описывают поведение элемента трехмерного континуума при больших перемещениях. В случае малых перемещений энергия по-прежнему определяется формулами (6.3), (6.7), а соотношения (6.1) линеаризуются в соответствии с п. 4

$$\varepsilon_{ij} = 1/2\,(\mathbf{r}_i\mathbf{t}_j + \mathbf{r}_j\mathbf{t}_i) \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{6.8}$$

7. **Кинематическая группа элемента оболочки.** Образуем кинематическую группу элемента оболочки, выбрав на ее срединной поверхности три узловые точки с присоединенными векторами $\mathbf{d}_{ij}$, которые являются нормалями к поверхности (фиг. 3). Такая группа характеризуется тремя метрическими тензорами

$$a_{ij} = \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j, \quad b_{ikl} = \mathbf{r}_i\mathbf{d}_{kl} \tag{7.1}$$

$$c_{klml} = \mathbf{d}_{kl}\mathbf{d}_{ml} \quad (i, j = 1, 2; \; k, m = 0, 1, 2)$$

Будем считать, что векторы $\mathbf{d}_{kl}$ имеют единичную длину, так что $c_{klkl} = 1$.

Из приведенных компонент тензоров не все являются независимыми. Соотношения, выражающие связь компонент третьего метрического тензора с компонентами первых двух тензоров (7.1) имеют вид[4]

$$[(\mathbf{d}_{il}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)(\mathbf{d}_{jl}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)]^2 = (\mathbf{d}_{il}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)^2(\mathbf{d}_{jl}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)^2 \tag{7.2}$$

$$\begin{vmatrix} c_{ilsl} & b_{1il} & b_{2il} \\ b_{1sl} & a_{11} & a_{12} \\ b_{2sl} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & b_{1il} & b_{2il} \\ b_{1il} & a_{11} & a_{12} \\ b_{2il} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b_{1sl} & b_{2sl} \\ b_{1sl} & a_{11} & a_{12} \\ b_{2sl} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Выражения (7.2) показывают, что все c_{ilsl} при $i \neq s$ выражаются через компоненты a_{jk}, b_{jil}. Для данной группы, состоящей из пяти векторов, можно выписать три соотношения вида (7.2).

Составим выражения для тензоров деформаций группы

$$\varepsilon_{ij} = 1/2\,(\mathbf{r}_i^{\vee}\mathbf{r}_j^{\vee} - \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j), \quad \vartheta_{ikl} = 1/2\,(\mathbf{r}_i^{\vee}\mathbf{d}_{kl}^{\vee} - \mathbf{r}_i\mathbf{d}_{kl})$$

$$\gamma_{klml} = 1/2\,(\mathbf{d}_{kl}^{\vee}\mathbf{d}_{ml}^{\vee} - \mathbf{d}_{kl}\mathbf{d}_{ml}) \tag{7.3}$$

Рассмотрим решение вариационной задачи для данной кинематической группы при условии, что присоединенные векторы сохраняют свою длину, т. е.

$$\mathbf{d}_{il}^{\vee 2} = 1 \tag{7.4}$$

Для компонент первого тензора деформаций существуют только две отличные от нуля вариации

$$\delta\varepsilon_{ij} = 1/2\,[\mathbf{r}_i^{\vee}(\delta\mathbf{R}_j^{\vee} - \delta\mathbf{R}_0^{\vee}) + \mathbf{r}_j^{\vee}(\delta\mathbf{R}_i^{\vee} - \delta\mathbf{R}_0^{\vee})] \tag{7.5}$$

$$\delta^2\varepsilon_{ij} = (\delta\mathbf{R}_i^{\vee} - \delta\mathbf{R}_0^{\vee})(\delta\mathbf{R}_j^{\vee} - \delta\mathbf{R}_0^{\vee}) \quad (i, j = 1, 2)$$

В п.3 было показано, что при ограничениях типа (7.4) существуют отличные от нуля вариации произвольного порядка вектора $\mathbf{d}_{il}^{\vee}$. Первая вариация имеет выражение (суммирование по j)

$$\delta\mathbf{d}_{il}^{\vee} = \mathbf{e}_{ij}^{\vee}\delta\varphi_{ij} \quad (i = 0, 1, 2;\ j = 1, 2) \tag{7.6}$$

где $\mathbf{e}_{ij}^{\vee}$ — базисные векторы, ортогональные к вектору $\mathbf{d}_{il}^{\vee}$; $\delta\varphi_{ij}$ — вариации обобщенных координат. Вариации произвольного порядка даются формулами

$$\delta^{2k+1}\mathbf{d}_{il}^{\vee} = (-1)^k\,\delta\varphi_i^{2k}\delta\mathbf{d}_{il}^{\vee}, \quad \delta^{2k}\mathbf{d}_{il}^{\vee} = (-1)^k\,\delta\varphi_i^{2k}\mathbf{d}_{il}^{\vee}, \tag{7.7}$$

$$\delta\varphi_i = |\delta\mathbf{d}_{il}^{\vee}| \quad (k = 0, 1, 2, \ldots;\ i = 0, 1, 2)$$

Отсюда для второго тензора деформаций ϑ_{ijl}, вообще говоря, существуют вариации любого порядка, вычисляемые по формуле

$$\delta^k\,\vartheta_{ijl} = 1/2\,(\mathbf{r}_i^{\vee}\delta^k\mathbf{d}_{jl}^{\vee} + k\delta\mathbf{r}_i^{\vee}\delta^{k-1}\mathbf{d}_{jl}^{\vee})$$

$$\delta\mathbf{r}_i^{\vee} = \delta\mathbf{R}_i^{\vee} - \delta\mathbf{R}_0^{\vee} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{7.8}$$

Из приведенного решения вариационной задачи следует, что в каждом узле группы вариациями обобщенных координат являются три вариации декартовых координат узла и две вариации присоединенного вектора согласно (7.6). Состояние группы в целом определяется пятнадцатью вариациями обобщенных координат.

Учитывая условия связи (7.2), применительно к деформированному состоянию, заключаем, что отличными от нуля независимыми компонентами тензоров деформаций являются следующие девять параметров: ε_{11}, ε_{22}, ε_{12}, ϑ_{101}, ϑ_{201}, ϑ_{111}, ϑ_{211}, ϑ_{121}, ϑ_{221}.

---

[4] В теории поверхностей третий основной тензор также выражается через первые два тензора.

Рассмотрим ассоциированный с данной кинематической группой треугольный элемент оболочки, следующей гипотезам Кирхгофа — Лява (фиг. 3). Если узлы группы выбраны достаточно близко друг от друга, то элемент будет пологим относительно плоскости, проходящей через узлы. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки на плоскости задается с помощью аффинных координат α_1, α_2 (суммирование по i, j):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i\alpha_i, \quad \mathbf{r}^2 = a_{ij}\alpha_i\alpha_j \tag{7.9}$$

Компоненты ε_{ij} (7.3) отождествим с ковариантными компонентами тензора деформаций срединной поверхности элемента, а ковариантные компоненты тензора искривлений запишем как функции аффинных координат и тензора ϑ_{kml} (суммирование по k, m):

$$\varkappa_{ij} = N^*_{km,\,ij}\vartheta_{kml} \tag{7.10}$$

Здесь N^*_{km} — соответствующим образом построенные функции координат α_1, α_2; индексы после запятой означают дифференцирование по α_i. Функции N^*_{km} из класса кубических полиномов даны в работе [3].

Ковариантные компоненты E_{ij} тензора деформаций в объеме элемента определяются формулой $E_{ij} = \varepsilon_{ij} + z\varkappa_{ij}$, которая может быть приведена к виду (5.2).

При записи потенциальной энергии деформации элемента используем инвариантные величины. Пусть задана некоторая квадратичная форма $g_{ij}d\alpha_i d\alpha_j$ аффинных координат α_1, α_2. Определим инварианты I_g, I_{gg} данной формы в метрике a_{ij} соотношениями

$$I_g = d^{-1}_{aa}(d_{ag} + d_{ga}), \quad I_{gg} = d^{-1}_{aa}d_{gg} \tag{7.11}$$

$$d_{AB} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}$$

Тогда I_ε, $I_{\varepsilon\varepsilon}$ ($I_\varkappa$, $I_{\varkappa\varkappa}$) будут первым и вторым инвариантами тензора деформаций (искривлений) поверхности [20]. Если материал является линейно упругим и изотропным, то потенциальная энергия элемента оболочки записывается в виде

$$\Pi = \int \Pi_F dF, \quad dF = d^{1/2}_{aa}d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{7.12}$$

$$\Pi_F = {}^1\!/_2 B\,[I^2_\varepsilon - 2(1-\nu)I_{\varepsilon\varepsilon}] + {}^1\!/_2 D\,[I^2_\varkappa - 2(1-\nu)I_{\varkappa\varkappa}]$$

$$B = Eh/(1-\nu^2), \quad D = Bh^2/12$$

где E, ν — модуль упругости, коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки. Можно убедиться на основании формул (7.11), что энергия (7.12) есть квадратичная форма относительно независимых параметров γ_i. При этом коэффициенты формы K_{ij} (5.6) зависят от упругих свойств материала и от способа аппроксимации искривлений.

Вариации произвольного порядка потенциальной энергии элемента отличны от нуля и определяются по формулам (5.8). Отметим, что для части энергии (7.12), связанной с деформациями срединной поверхности, существует конечное число отличных от нуля вариаций. Вариации пятого и выше порядков будут определяться варьированием компонент ϑ_{ijl}, т. е. варьированием части энергии, связанной с искривлением (изгибом) поверхности оболочки.

В случае малых перемещений и углов поворота оболочки применимы линеаризованные соотношения для деформаций кинематической группы (4.1):

$$\varepsilon_{ij} = {}^1\!/_2(\mathbf{r}_j\mathbf{t}_i + \mathbf{r}_i\mathbf{t}_j) \tag{7.13}$$

Фиг. 4

$$\vartheta_{ikl} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{r}_i\mathbf{w}_{kl} + \mathbf{d}_{kl}\mathbf{t}_i) \quad (i, j = 1, 2;\ k = 0, 1, 2)$$

Формулы для вариаций деформаций (7.13) имеют вид (суммирование по j):

$$\delta\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{r}_i\delta\mathbf{v}_j + \mathbf{r}_j\delta\mathbf{v}_i - \mathbf{r}_i\delta\mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_j\delta\mathbf{v}_0)$$

$$\delta\vartheta_{ikl} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{r}_i\delta\mathbf{w}_{kl} + \mathbf{d}_{kl}\delta\mathbf{v}_i - \mathbf{d}_{kl}\delta\mathbf{v}_0)$$

$$\delta\mathbf{w}_{kl} = \mathbf{e}_{kl}\delta\varphi_{kj} \tag{7.14}$$

Конечные элементы оболочек рассмотренной кинематической группы были впервые получены в работах[5] [3] и систематически применялись к анализу нелинейного напряженно-деформированного состояния различных конструкций в ряде работ [21—24].

8. Кинематическая группа элемента стержня. Рассмотрим пространственный криволинейный стержень. Выберем на его осевой линии две узловые точки, в каждую из которых поместим два единичных и ортогональных вектора $\mathbf{d}_{ij}$, лежащих в плоскости поперечного сечения стержня (фиг. 4). Кинематическая группа элемента стержня характеризуется пятью метрическими векторами ($n = 5$) и следующими тремя метрическими тензорами, первый из которых является скаляром

$$a_{11} = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_1, \quad b_{1ij} = \mathbf{r}_1\mathbf{d}_{ij} \tag{8.1}$$

$$c_{ijkm} = \mathbf{d}_{ij}\mathbf{d}_{km} \quad (i, k = 0, 1;\ j = 1, 2)$$

Условие единичности и ортогональности векторов d_{ij} в каждом узле имеют вид $c_{ijik} = \delta_{jk}$. Выпишем соотношения, связывающие компоненты метрических тензоров (8.1):

$$[(\mathbf{d}_{02}\mathbf{r}_1\mathbf{d}_{01})\,(\mathbf{d}_{12}\mathbf{r}_1\mathbf{d}_{01})\,]^2 = (\mathbf{d}_{02}\mathbf{r}_1\mathbf{d}_{01})^2\,(\mathbf{d}_{12}\mathbf{r}_1\mathbf{d}_{01})^2$$

$$[(\mathbf{d}_{01}\mathbf{r}_1\mathbf{d}_{12})\,(\mathbf{d}_{11}\mathbf{r}_1\mathbf{d}_{12})\,]^2 = (\mathbf{d}_{01}\mathbf{r}_1\mathbf{d}_{12})^2\,(\mathbf{d}_{11}\mathbf{r}_1\mathbf{d}_{12})^2 \tag{8.2}$$

$$[(\mathbf{d}_{02}\mathbf{r}_1\mathbf{d}_{01})\,(\mathbf{d}_{11}\mathbf{r}_1\mathbf{d}_{01})\,]^2 = (\mathbf{d}_{02}\mathbf{r}_1\mathbf{d}_{01})^2\,(\mathbf{d}_{11}\mathbf{r}_1\mathbf{d}_{01})^2$$

Раскрытие выражений (8.2) проводится с помощью формулы (1.5). Соотношения (8.2) показывают, что из $n(n+1)/2$ компонент метрических тензоров независимых компонент будет двенадцать.

Положим, что в процессе деформирования группы присоединенные векторы в узлах сохраняют свойства единичности и ортогональности, т. е. $\nu_{ijik} = 0$.

Тензоры деформаций группы определяются формулами

$$\varepsilon_{11} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{r}_1^{\vee}\mathbf{r}_1^{\vee} - \mathbf{r}_1\mathbf{r}_1), \quad \vartheta_{1ij} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{r}_1^{\vee}\mathbf{d}_{ij}^{\vee} - \mathbf{r}_1\mathbf{d}_{ij})$$

$$\nu_{ijkm} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{d}_{ij}^{\vee}\mathbf{d}_{km}^{\vee} - \mathbf{d}_{ij}\mathbf{d}_{km}) \tag{8.3}$$

Вариации компонент тензоров деформаций (8.3) имеют вид

$$\delta\varepsilon_{11} = r_1^{\vee}\,(\delta\mathbf{R}_1^{\vee} - \delta\mathbf{R}_0^{\vee}), \quad \delta^2\varepsilon_{11} = (\delta\mathbf{R}_1^{\vee} - \delta\mathbf{R}_0^{\vee})^2$$

---

[5] См. также *Кузнецов В. В.* Элементарный анализ геометрии поверхностей и метод конечных элементов в механике упругих оболочек при произвольных перемещениях. М., 1984. 138 с.— Деп. ВИМИ 01.11.84, № Д06203.

$$\delta^k \vartheta_{1ij} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{r}_1^{\mathrm{v}} \delta^k \mathbf{d}_{ij}^{\mathrm{v}} + k \delta \mathbf{r}_1^{\mathrm{v}} \delta^{k-1} \mathbf{d}_{ij}\right) \tag{8.4}$$

$$\delta^k \nu_{ijmn} = \tfrac{1}{2} \sum_{s=0}^{k} C_k^s \delta^s \mathbf{d}_{ij}^{\mathrm{v}} \delta^{k-s} \mathbf{d}_{mn}^{\mathrm{v}} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Выражения (8.4) справедливы при условии сохранения единичности и ортогональности присоединенных векторов $\nu_{ijk} = 0$. Число вариаций ε_{11} равно двум, а для второго и третьего тензоров деформаций существуют вариации произвольного порядка. Вариации присоединенных векторов находятся по формулам

$$\delta \mathbf{d}_{ij}^{\mathrm{v}} = \delta \omega_i \times \mathbf{d}_{ij}^{\mathrm{v}}, \quad \delta^2 \mathbf{d}_{ij}^{\mathrm{v}} = \delta \omega_i \times (\delta \omega_i \times \mathbf{d}_{ij}^{\mathrm{v}})$$

$$\delta^{2k+1} \mathbf{d}_{ij}^{\mathrm{v}} = (-1)^k \delta \omega_i^{2k} \delta \mathbf{d}_{ij}^{\mathrm{v}}, \quad \delta^{2k+2} \mathbf{d}_{ij}^{\mathrm{v}} = (-1)^k \delta \omega_i^{2k} \delta^2 \mathbf{d}_{ij}^{\mathrm{v}}$$

$$\delta \omega_i = |\delta \boldsymbol{\omega}_i| \quad (i = 0, 1; \; j = 1, 2; \; k = 1, 2, 3 \ldots) \tag{8.5}$$

Решение вариационной задачи для кинематической группы стержня показывает, что каждому узлу соответствуют три вариации декартовых координат и три вариации компонент вектора углового вращения ω_i. Таким образом, возможные состояния группы определяют двенадцать вариаций обобщенных координат.

В качестве независимых деформаций группы выберем следующие шесть отличных от нуля компонент: ε_{11}, ϑ_{101}, ϑ_{102}, ϑ_{111}, ϑ_{112}, $\theta = \nu_{1102} - \nu_{1201}$. Параметр θ характеризует взаимный поворот плоскостей поперечных сечений стержня.

Запишем выражение потенциальной энергии элемента в общепринятой форме (суммирование по i, j):

$$\Pi = \tfrac{1}{2} \int \left(EF\varepsilon^2 + EJ_{ij}\varkappa_i \varkappa_j + GJ\chi^2\right) ds \tag{8.6}$$

где EF, EJ_{ij}, GJ — жесткости стержня на растяжение, изгиб и кручение. Если узлы группы выбраны достаточно близко друг от друга, то соответствующие деформационные параметры стержня можно выразить через деформации рассмотренной кинематической группы следующим образом (суммирование по k):

$$\varepsilon = a_{11}^{-1} \varepsilon_{11}, \quad \varkappa_i = a_{11}^{-1/2} N_{k,ss} \vartheta_{1ki}, \quad \chi = a_{11}^{-1/2} \theta \tag{8.7}$$

В качестве функций N_k выбираются кубические функции вида $(0 \le s \le a_{11}^{1/2})$:

$$N_1 = 2a_{11}^{-1} s \left(a_{11}^{1/2} - s\right)^2, \quad N_2 = 2a_{11}^{-1} s^2 \left(s - a_{11}^{1/2}\right) \tag{8.8}$$

Интегрирование в выражении (8.6) связано только с энергией изгиба, поскольку ε и χ (8.7) постоянны в пределах элемента.

Варьирование потенциальной энергии как квадратичной формы шести деформационных параметров осуществляется с помощью формул (5.8). Существование вариации любого порядка для энергии стержня обусловлено варьированием энергии изгиба и кручения, поскольку число вариаций энергии, связанной с растяжением стержня конечно.

Рассмотренные соотношения для кинематической группы стержня относятся к случаю больших перемещений и поворотов. При малых перемещениях соответствующие зависимости могут быть упрощены с использованием приемов линеаризации

$$\varepsilon_{11} = \mathbf{r}_1 \mathbf{t}_1, \quad \vartheta_{1ij} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{r}_1 \mathbf{w}_{ij} + \mathbf{d}_{ij} \mathbf{t}_1\right)$$

$$\nu_{ijkm} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{d}_{ij} \mathbf{w}_{km} + \mathbf{d}_{km} \mathbf{w}_{ij}\right) \tag{8.9}$$

Вариации деформаций (8.9) вычисляются по формулам:

$$\delta \varepsilon_{11} = \mathbf{r}_1 (\delta \mathbf{v}_1 - \delta \mathbf{v}_0), \quad \delta \vartheta_{1ij} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{r}_1 \delta \mathbf{w}_{ij} + \mathbf{d}_{ij} \delta \mathbf{v}_1 - \mathbf{d}_{ij} \delta \mathbf{v}_0\right)$$

$$\delta \nu_{ijkm} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{d}_{ij} \delta \mathbf{w}_{km} + \mathbf{d}_{km} \delta \mathbf{w}_{ij}\right) \tag{8.10}$$

Формулы для вариаций векторов w_{ij} имеют вид

$$\delta \mathbf{w}_{ij} = \delta \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{d}_{ij} \quad (8.11)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.
2. *Оден Д.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
3. *Кузнецов В. В., Сойников Ю. В.* Анализ деформаций оболочек при произвольных перемещениях методом конечных элементов//Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. 131—138.
4. *Железнов Л. П., Кабанов В. В.* Функции перемещений конечных элементов оболочки вращения как твердых тел//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 131—136.
5. *Кантин Д., Клауф Р.* Искривленный дискретный элемент цилиндрической оболочки//Ракетная техника и космонавтика. 1968. Т. 6. № 6. С. 82—88.
6. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислоокий, В. В. Киричевский и др. Киев: Вища шк.; Лейпциг; ФЕБ, 1982, 479 с.
7. *Васильев В. В., Разин А. Ф.* Геометрически нелинейная прикладная теория композитных оболочек//Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. С. 97—112.
8. *Черных К. Ф.* Теория тонких оболочек из эластомеров//Тр. XIV Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та. 1987. Т. 2. С. 549—562.
9. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 335 с.
10. *Черных К. Ф.* Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 190 с.
11. *Шкутин Л. И.* Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Наука, 1988. 128 с.
12. *Шкутин Л. И.* Точная формулировка уравнений нелинейного деформирования тонких оболочек//Прикл. проблемы прочности и пластичности. 1977. Вып. 7. С. 3—9.
13. *Шкутин Л. И.* Точная формулировка уравнений нелинейного деформирования тонких оболочек//Прикл. проблемы прочности и пластичности. 1978. Вып. 8. С. 38—43.
14. *Шкутин Л. И.* Точная формулировка уравнений нелинейного деформирования тонких оболочек//Прикл. проблемы прочности и пластичности. 1978. Вып. 9. С. 19—25.
15. *Кузнецов В. В.* К определению произвольных вращений в нелинейном анализе тонкостенных конструкций//Расчет элементов конструкций летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1990. С. 59—64.
16. *Кузнецов В. В.* К определению вращений в трехмерном пространстве на основе понятия вариации вектора//Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 58—60.
17. *Кузнецов В. В.* Рекуррентные соотношения для коэффициентов вариаций энергии нелинейных упругих систем//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 182—183.
18. *Кузнецов В. В.* О структуре вариаций энергии нелинейных моделей оболочек//Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 10. С. 62—68.
19. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
20. *Кузнецов В. В.* Геометрические инварианты нелинейной теории оболочек//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 168—171.
21. *Кузнецов В. В., Сойников Ю. В.* Метод конечных элементов в задачах нелинейного деформирования подкрепленных оболочек произвольной формы//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 136—143.
22. *Кузнецов В. В., Сойников Ю. В.* Решение задач равновесия тонких упругих тел при больших перемещениях и поворотах//Тр. XIV Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Тбилиси: изд-во Тбил. ун-та, 1987. Т. 2. С. 110—115.
23. *Кузнецов В. В., Сойников Ю. В.* Анализ термонапряженного состояния оболочек произвольной формы//Проблемы прочности. 1990. № 10. С. 69—74.
24. *Кузнецов В. В., Сойников Ю. В.* Численный анализ пространственного деформирования упругих амортизаторов//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 182—184.

Новосибирск

Поступила в редакцию
24.IV.1991