

УДК 531.8

© 1994 г. Л. Г. ЛОБАС, В. Г. ХРЕВЕТ

БИФУРКАЦИЯ РОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА И ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ В МАЯТНИКОВЫХ ДУХЗВЕННЫХ СИСТЕМАХ С КАЧЕНИЕМ

Бифуркации рождения (генерации) и слияния (аннигиляции) стационарных состояний систем с качением, моделирующих одиночные и двухзвенные пневмоколесные машины, исследовались в [1—3]. В [4—9] с помощью приведения исходной системы к трехмерной системе на центральном многообразии, расщепления последней на одно- и двумерную подсистемы и удержания лишь главных частей нелинейностей (до третьего порядка включительно), выполнен постбифуркационный анализ связанных флаттерных и дивергентных движений в задаче о плоскопараллельном движении связки ведущего и одного ведомого звена. Случай двух последовательно соединенных ведомых звеньев при условии, что точка сцепки первого ведомого звена с ведущим звеном движется прямолинейно с постоянной скоростью v , рассмотрен в [10]. Основная идея работы связана с приведением уравнений кубического приближения исходной динамической системы к системе Ляпунова специального вида.

В данной работе для уравнений возмущенного движения, содержащих отклонения переменных до третьей степени включительно, методами Ляпунова и Пуанкаре построено приближенное периодическое решение в виде отрезка ряда, члены которого являются периодическими функциями времени. Приведены аппроксимации устойчивого и неустойчивого предельных циклов методом усреднения. Характерные случаи проиллюстрированы графиками.

1. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения двухзвенника [10]. Пусть ϑ_1, ϑ_2 — курсовые углы ведомых звеньев, определяющие их абсолютную ориентацию. Со стороны опорной плоскости на пневмоколеса действуют боковые реакции Y_3, Y_4 , которые в рамках аксиоматики Рокара [11] определяются эмпирически. Примем для них кубические аппроксимации [1, 12]:

$$Y_3 = k_3 \delta_3 - k_3' \delta_3^3 + \dots, \quad Y_4 = k_4 \delta_4 - k_4' \delta_4^3 + \dots, \quad \delta_3 = \arctg \frac{v \sin \vartheta_1 + L_1 \dot{\vartheta}_1}{v \cos \vartheta_1}$$

$$\delta_4 = \arctg \frac{v \sin \vartheta_2 + l_1 \dot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) + L_2 \dot{\vartheta}_2}{v \cos \vartheta_2 - l_1 \dot{\vartheta}_1 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}$$

В обозначениях [10] для определения углов ϑ_1, ϑ_2 имеем следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} (J_1 + m_2 l_1^2) \ddot{\vartheta}_1 + m_2 d_2 l_1 \ddot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) &= -L_1 Y_3 - l_1 Y_4 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \\ + m_2 d_2 l_1 \dot{\vartheta}_2^2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1), \quad J_2 \ddot{\vartheta}_2 + m_2 d_2 l_1 \dot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) &= \\ = -L_2 Y_4 - m_2 d_2 l_1 \dot{\vartheta}_1^2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Приняв величины m_1, d_1, k_3 в качестве базисных, запишем уравнения (1.1) в безразмерной форме, а затем при $v \neq v_0$ представим их в виде [10]:

$$\xi_1 = \varepsilon \xi_1 - \omega \xi_2 + \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(1)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots; \quad \xi_2 = \omega \xi_1 + \varepsilon \xi_2 + \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(2)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots \quad (1.2)$$

$$\dot{\xi}_3 = \kappa \xi_3 - \omega_1 \xi_4 + \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(3)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots; \quad \dot{\xi}_4 = \omega_1 \xi_3 + \kappa \xi_4 + \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(4)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots$$

Здесь $\omega > 0$, $\kappa < 0$, $\omega_1 > 0$ при $\forall v$; знак ε зависит от выбранных значений l и v . С целью анализа локальной бифуркации Андронова — Хопфа, описывающей движения с малыми амплитудами для $v > v_0$ (т. е. $\varepsilon > 0$ [10]) вблизи границы $v = v_0$ (l_i^0), положим $\xi_k = \sqrt{\varepsilon} \eta_k$ ($k = 1, \dots, 4$). Вместо (1.2) получим

$$\dot{\eta}_1 = -\omega \eta_2 + \varepsilon [\eta_1 + f(\eta_1, \dots, \eta_4)], \quad \dot{\eta}_2 = \omega \eta_1 + \varepsilon [\eta_2 + F(\eta_1, \dots, \eta_4)]$$

$$\dot{\eta}_3 = \kappa \eta_3 - \omega_1 \eta_4 + \varepsilon f_3(\eta_1, \dots, \eta_4), \quad \dot{\eta}_4 = \omega_1 \eta_3 + \kappa \eta_4 + \varepsilon f_4(\eta_1, \dots, \eta_4)$$

$$\text{col}(f, F, f_3, f_4) = \sum_{l, m, n} \text{col}(A_{lmn}^{(1)}, \dots, A_{lmn}^{(4)}) \eta_l \eta_m \eta_n + \dots$$

2. Построение периодического решения системы (1.3). Учитывая автономность системы и периодичность искомого решения ее, начало отсчета времени выберем из условия $\eta_2 \Big|_{t=0} = 0$. Перейдем от t к τ таким образом, чтобы решению с периодом $2\pi\omega^{-1} + \alpha = 2\pi\omega^{-1}(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots)$ по переменной t соответствовало 2π -периодическое решение системы (1.3) по переменной τ [13]. Систему, полученную из (1.3) заменой

$$t = \tau\omega^{-1}(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots) \quad (2.1)$$

пытаемся удовлетворить формальными рядами

$$\eta_j(\tau) = \eta_j^{(0)}(\tau) + \varepsilon \eta_j^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 \eta_j^{(2)}(\tau) + \dots \quad (2.2)$$

$$\eta_j^{(s)}(\tau + 2\pi) = \eta_j^{(s)}(\tau) \quad (s = 1, \dots, 4, j = 1, 2, \dots)$$

Так как $\eta_2^{(0)}(0) = 0$, то порождающее решение есть $\eta_1^{(0)} = M_0 \cos \tau$, $\eta_2^{(0)} = M_0 \sin \tau$, $\eta_3^{(0)} = 0$, $\eta_4^{(0)} = 0$. Для нахождения первого приближения имеем систему, распадающуюся на две подсистемы

$$\begin{aligned} d\eta_1^{(1)}/d\tau + \eta_2^{(1)} &= -h_1 M_0 \sin \tau + [M_0 \cos \tau + A_{111}^{(1)} \eta_1^{(0)3} + 3A_{112}^{(1)} \eta_1^{(0)2} \eta_2^{(0)} + 3A_{122}^{(1)} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)2} + \\ &+ A_{222}^{(1)} \eta_2^{(0)3}] \omega^{-1}, \quad d\eta_2^{(1)}/d\tau - \eta_1^{(1)} = h_1 M_0 \cos \tau + [M_0 \sin \tau + A_{111}^{(2)} \eta_1^{(0)3} + \\ &+ 3A_{112}^{(2)} \eta_1^{(0)2} \eta_2^{(0)} + 3A_{122}^{(2)} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)2} + A_{222}^{(2)} \eta_2^{(0)3}] \omega^{-1} \\ d\eta_3^{(1)}/d\tau &= (\kappa \eta_3^{(1)} - \omega_1 \eta_4^{(1)} + A_{111}^{(3)} \eta_1^{(0)3} + 3A_{112}^{(3)} \eta_1^{(0)2} \eta_2^{(0)} + 3A_{122}^{(3)} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)2} + A_{222}^{(3)} \eta_2^{(0)3}) \omega^{-1}, \\ d\eta_4^{(1)}/d\tau &= (\omega_1 \eta_3^{(1)} + \kappa \eta_4^{(1)} + A_{111}^{(4)} \eta_1^{(0)3} + 3A_{112}^{(4)} \eta_1^{(0)2} \eta_2^{(0)} + \\ &+ 3A_{122}^{(4)} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)2} + A_{222}^{(4)} \eta_2^{(0)3}) \omega^{-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Периодическое решение этой системы существует тогда и только тогда, когда существует периодическое решение первых двух уравнений. Запишем их в виде

$$\begin{aligned} d\eta_1^{(1)}/d\tau + \eta_2^{(1)} &= (M_0 \omega^{-1} + a_1) \cos \tau + (-h_1 M_0 + b_1) \sin \tau + a_3 \cos 3\tau + b_3 \sin 3\tau, \\ d\eta_2^{(1)}/d\tau - \eta_1^{(1)} &= (h_1 M_0 + c_1) \cos \tau = \\ &= (M_0 \omega^{-1} + d_1) \sin \tau + c_3 \cos 3\tau + d_3 \sin 3\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из необходимых и достаточных условий периодичности решения системы (2.4):

$$M_0 \omega^{-1} + a_1 = -(M_0 \omega^{-1} + d_1), \quad -h_1 M_0 + b_1 = h_1 M_0 + c_1 \quad (2.5)$$

находим

$$M_0^2 = -2\pi [\omega \alpha_3(v)]^{-1}, \quad h_1 = Q M_0^2 (2\pi)^{-1} \quad (2.6)$$

Величины Q и $\alpha_3(v)$ описаны в [10], причем $\alpha_3(v)$ является продолжением по параметру v в область $v > v_0$ первого ляпуновского коэффициента $\alpha_3(v_0)$, явное выражение которого для систем с кубическими нелинейностями получено в [14]. При условиях (2.5) система (2.4) имеет решение

$$\eta_1^{(1)} = M_1 \cos \tau + N_1 \sin \tau + A_3 \cos 3\tau + B_3 \sin 3\tau \quad (2.7)$$

$$\eta_2^{(1)} = M_1 \sin \tau - N_1 \cos \tau + C_3 \cos 3\tau + D_3 \sin 3\tau$$

$$A_3 = M_0^3 (A_{111}^{(2)} - 3A_{122}^{(2)} - 9A_{112}^{(1)} + 3A_{222}^{(1)})(32\omega)^{-1}$$

$$B_3 = M_0^3 (3A_{111}^{(1)} - 9A_{122}^{(1)} + 3A_{112}^{(2)} - A_{222}^{(2)})(32\omega)^{-1}$$

$$C_3 = M_0^3 (3A_{122}^{(1)} - A_{111}^{(1)} + 3A_{222}^{(2)} - 9A_{112}^{(2)})(32\omega)^{-1}$$

$$D_3 = M_0^3 (3A_{111}^{(2)} - 9A_{122}^{(2)} - 3A_{112}^{(1)} + A_{222}^{(1)})(32\omega)^{-1}$$

Из условия $\eta_2^{(1)}(0) = 0$ находим $N_1 = C_3$. Другая произвольная постоянная M_1 в (2.7), а также величина h_2 в (2.1) определяются условиями периодичности второго приближения, которые дают $M_1 = 0$, $h_2 = h_1^2 - h_{20}$.

Периодическое решение двух последних уравнений системы (2.3) имеет вид

$$\eta_3^{(1)} = T_1 \cos \tau + S_1 \sin \tau + T_2 \cos 3\tau + S_2 \sin 3\tau$$

$$\eta_4^{(1)} = T_3 \cos \tau + S_3 \sin \tau + T_4 \cos 3\tau + S_4 \sin 3\tau$$

причем величины T_1, S_1, \dots, S_4 имеют тот же смысл, что и в [10].

Такова процедура отыскания первого приближения

$$\eta_1 = M_0 \cos \tau + \varepsilon \eta_1^{(1)}(\tau), \quad \eta_2 = M_0 \sin \tau + \varepsilon \eta_2^{(1)}(\tau) \quad (2.8)$$

$$\eta_3 = \varepsilon \eta_3^{(1)}(\tau), \quad \eta_4 = \varepsilon \eta_4^{(1)}(\tau)$$

решения системы (1.3). Аналогичным образом находятся сколь угодно высокие приближения искомого решения. Поскольку существование периодического решения системы (1.3) доказано в [10], должен существовать по крайней мере один ряд вида (2.2), формально удовлетворяющий (после возвращения к старой независимой переменной t) системе (1.3). В силу того, что такой ряд оказался единственным, он с необходимостью представляет искомого решение и, следовательно, сходится.

3. Явный вид периодического решения системы (1.1). Первому приближению (2.8) решения системы (1.3) соответствует следующее решение системы (1.2):

$$\xi_1 = \xi_1' + \xi_1'', \quad \xi_2 = \xi_2' + \xi_2'', \quad \xi_3 = \xi_3'', \quad \xi_4 = \xi_4'' \quad (3.1)$$

$$\xi_1' = \sqrt{\varepsilon} M_0 \cos \tau, \quad \xi_2' = \sqrt{\varepsilon} M_0 \sin \tau, \quad \xi_1'' = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \eta_1^{(1)}(\tau), \quad \xi_2'' = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \eta_2^{(1)}(\tau)$$

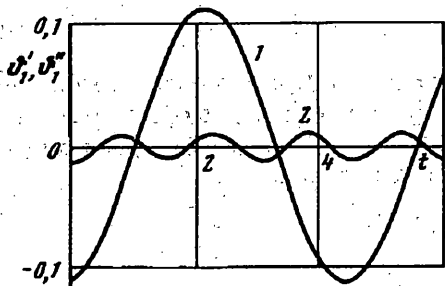
$$\xi_3'' = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \eta_3^{(1)}(\tau), \quad \xi_4'' = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \eta_4^{(1)}(\tau), \quad \tau = \Omega t, \quad \Omega = \omega [1 - h_1 \varepsilon + O(\varepsilon^3)] \quad (3.2)$$

$$\text{Так как [10]: } \text{col}(\vartheta_1, \vartheta_2) = \sum_{j=1}^4 \text{col}(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}) \xi_j$$

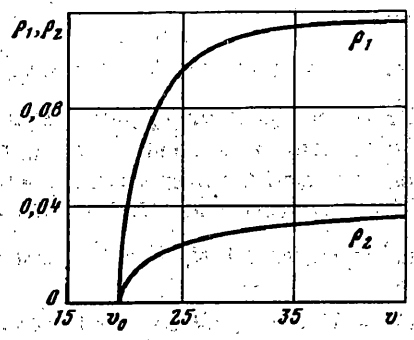
то с принятой степенью точности

$$\vartheta_1 = \vartheta_1' + \vartheta_1'', \quad \vartheta_2 = \vartheta_2' + \vartheta_2''$$

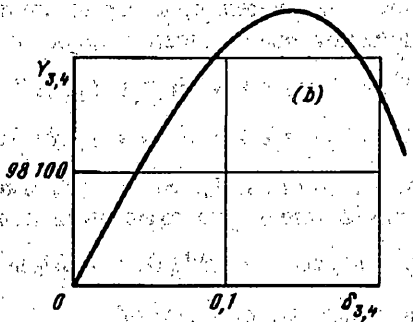
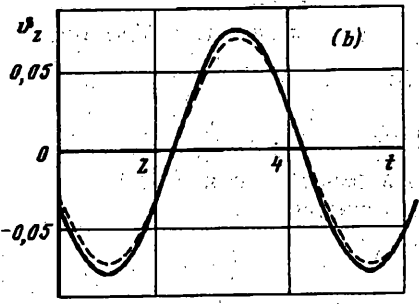
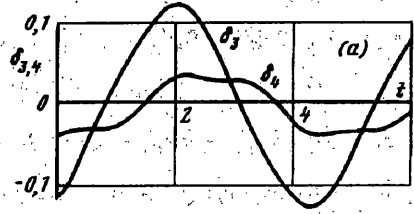
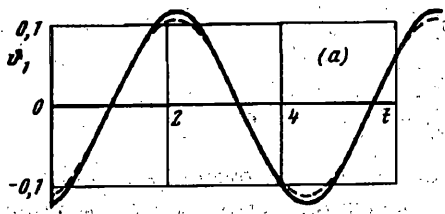
$$\vartheta_1' = \sqrt{\varepsilon} M_0 (a_{23} \cos \Omega t + \alpha_{12} \sin \Omega t)$$



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

Фиг. 4

$$\begin{aligned} \vartheta_2' &= \sqrt{\varepsilon} M_0 [-(\omega^2 + a_{21}) \cos \Omega t + \omega a_{22} \sin \Omega t] \\ \vartheta_1'' &= \varepsilon \sqrt{\varepsilon} [(a_{24}M_0 - \alpha_{12}N_1 + \alpha_{13}T_1 + \alpha_{14}T_3) \cos \Omega t + (a_{23}N_1 + \alpha_{13}S_1 + \alpha_{14}S_3) \sin \Omega t + \\ &+ (\alpha_{12}C_3 + a_{23}A_3 + \alpha_{13}T_2 + \alpha_{14}T_4) \cos 3\Omega t + (\alpha_{12}D_3 + a_{23}B_3 + \alpha_{13}S_2 + \alpha_{14}S_4) \sin 3\Omega t], \\ \vartheta_2'' &= \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \{ [-a_{22} (M_0 + \omega N_1) + \alpha_{33}T_1 + \alpha_{34}T_3] \cos \Omega t + [-(\omega^2 + a_{21}) N_1 - 2\omega M_0 + \\ &+ \alpha_{33}S_1 + \alpha_{34}S_3] \sin \Omega t + [-(\omega^2 + a_{21}) A_3 + \omega a_{22}C_3 + \alpha_{33}T_2 + \\ &+ \alpha_{34}T_4] \cos 3\Omega t + [-(\omega^2 + a_{21}) B_3 + \omega a_{22}D_3 + \alpha_{33}S_2 + \alpha_{34}S_4] \sin 3\Omega t \} \end{aligned}$$

Возьмем числовые значения параметров двухзвенника, которым соответствует фиг. 2, а работы [10], причем $l_1 = 9$ м, тогда $v_0 = 19,442$ м/с. При $v = 30$ м/с период решения $2\pi\Omega^{-1} = 4,5674$ с. Из фиг. 1 следует $\vartheta_1'(t) \gg \vartheta_1''(t)$ (кривая 1 соответствует ϑ_1' , а кривая 2 — ϑ_1'' [рад]). На фиг. 2 а, в, штриховыми линиями изображены графики функций $\vartheta_1'(t)$, сплошными — $\vartheta_1(t)$, различие между ними оказывается весьма незначительным при $\forall v > v_0$, т. е. $\vartheta_1(t) \approx \vartheta_1'(t)$. С ростом скорости движения v амплитуды колебаний

$$\rho_1 = M_0 [\varepsilon (a_{23}^2 + a_{12}^2)]^{1/2}, \quad \rho_2 = M_0 \{ \varepsilon [(\omega^2 + a_{21})^2 + \omega^2 a_{22}^2] \}^{1/2}$$

возрастают (фиг. 3). Угол увода δ_3 колес первого ведомого звена находится в области нелинейной зависимости $Y_3(\delta_3)$, тогда как для колес второго ведомого звена допустима линеаризация функции $Y_4(\delta_4)$ [Н] (фиг. 4, а, в).

4. Упрощенный подход с использованием оператора усреднения. Сравнение между собой кривых $\vartheta_1 = \vartheta_1'(t)$ и $\vartheta_1 = \vartheta_1''(t)$ однозначно указывает на то, что в данном случае несмотря на неаналитическую зависимость функций $\vartheta_1(t)$ от ε имеет место общая ситуация [15] о наложении быстроосциллирующей составляющей $\vartheta_1''(t)$ на основную медленно эволюционирующую составляющую $\vartheta_1'(t)$ решения. Для нахождения эволюции системы эффективным, как известно, является метод усреднения. Рассмотрим первые два уравнения системы (1.2):

$$\dot{\xi}_1 = \varepsilon \xi_1 - \omega \xi_2 + A_{111}^{(1)} \xi_1^3 + 3A_{112}^{(1)} \xi_1^2 \xi_2 + 3A_{122}^{(1)} \xi_1 \xi_2^2 + A_{222}^{(1)} \xi_2^3 + \dots \quad (4.1)$$

$$\dot{\xi}_2 = \omega \xi_1 + \varepsilon \xi_2 + A_{111}^{(2)} \xi_1^3 + 3A_{112}^{(2)} \xi_1^2 \xi_2 + 3A_{122}^{(2)} \xi_1 \xi_2^2 + A_{222}^{(2)} \xi_2^3 + \dots$$

Перейдя к полярным координатам заменой $\xi_1 = r \cos \vartheta$, $\xi_2 = r \sin \vartheta$, представим уравнения (4.1) в виде

$$\dot{r} = \varepsilon r + r^2 f_1(\vartheta) + \dots, \quad \dot{\vartheta} = \omega + r^2 f_2(\vartheta) + \dots \quad (4.2)$$

Функции $f_1(\vartheta)$ и $f_2(\vartheta)$ являются 2π -периодическими. Поставим в соответствие уравнениям (4.2) следующие:

$$\dot{\rho} = \varepsilon \rho + \alpha' \rho^3 + \dots, \quad \dot{\theta} = \omega + \gamma' r_0^2 + \dots \quad (4.3)$$

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\vartheta) d\vartheta, \quad \gamma' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\vartheta) d\vartheta \quad (4.4)$$

Величину $r_0 = \text{const}$ конкретизируем дальше. Каждое из уравнений (4.3) интегрируется независимо от другого и является уравнением с разделяющимися переменными. Из (4.4) следует $\alpha' = \omega (2\pi)^{-1} \alpha_3(v)$, $\gamma' = -\omega (2\pi)^{-1} Q$.

1. *Аппроксимация устойчивого предельного цикла $\Gamma^{4.1}$ для случая $l_1 > l_1^*$, $v > v_0$ [10].* Так как $\varepsilon > 0$, $\alpha_3(v) < 0$, то первое уравнение (4.3) имеет одну неустойчивую особую точку $r_0 = 0$ и две устойчивые особые точки $r = \pm r_0$, где $r_0 = \sqrt{\varepsilon} M_0$. Из второго уравнения (4.3) находим $\theta = \Omega t$, $\Omega = \omega [1 - \varepsilon Q (2\pi M_0^2)^{-1}]$. Составив выражения $\xi_1 = r_0 \cos \theta$, $\xi_2 = r_0 \sin \theta$ и сравнив их с (3.2), заключаем, что $r_0 \cos \theta = \xi_1'$, $r_0 \sin \theta = \xi_2'$, т. е. приведенная процедура усреднения дает приближенное решение системы (1.2):

$$\xi_1 = \sqrt{\varepsilon} M_0 \cos \Omega t, \quad \xi_2 = \sqrt{\varepsilon} M_0 \sin \Omega t, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_4 = 0 \quad (4.5)$$

которое получается из (3.1) отбрасыванием выражений с двумя штрихами.

2. *Аппроксимация неустойчивого предельного цикла $\Gamma^{3.2}$ для случая $l_1 < l_1^*$, $v < v_0$ [10].* Так как $\varepsilon < 0$, $\alpha_3(v) > 0$, то первое уравнение (4.3) имеет одну устойчивую особую точку $r_0 = 0$ и две неустойчивые особые точки $r = \pm r_0$, где $r_0 = \sqrt{-\varepsilon} M_0$. Повторяя рассуждения п. 4.1, получим для неустойчивого предельного цикла аппроксимацию (4.5), в которой ε следует заменить на $-\varepsilon$. Он ограничивает область притяжения начала координат фазового пространства как устойчивой особой точки уравнений возмущенного движения маятниковых систем с качением.

Вытекающий из (3.1), а также из (4.5) результат о том, что амплитуда автоколебаний маятниковых систем с качением пропорциональна $\sqrt{\varepsilon}$, согласуется с теоремой Хопфа [16] в том, что радиус предельного цикла, родившегося из устойчивого фокуса, растет как $\sqrt{\varepsilon}$. При $v = v_0$ величина $\alpha_3(v)$ играет роль

«нелинейного декремента» (термин, введенный в [17] при исследовании бифуркаций фазового портрета системы дифференциальных уравнений второго порядка, в которой выделены резонансные мономы, в случае $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$). Из (2.6) следует, что при $\nu \neq \nu_0$ во-первых, величина $\alpha_3(\nu)$ существенно влияет на радиус предельного цикла, во-вторых, частота соответствующего периодического решения определяется совокупностью значений коэффициентов $A_{112}^{(1)}$, $A_{222}^{(1)}$, $A_{111}^{(2)}$, $A_{122}^{(2)}$, не входящих в α_3 (см. выражение для $\alpha_3(\nu)$ и Q в [10]). Как отмечалось выше, величина $\alpha_3(\nu)$ представляет собой продолжение по параметру ν первого ляпуновского коэффициента $\alpha_3(\nu_0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лобас Л. Г., Вербицкий В. Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. Киев: Наук. думка, 1990. 232 с.
2. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Бифуркация и устойчивость стационарных движений пневмоколесных машин в постоянных силовых полях//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 23—33.
3. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Бифуркация стационарных состояний связи абсолютно твердых и катящихся упругих тел//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 30—37.
4. Troger H., Zeman K. A nonlinear analysis of the generic types of loss of stability of the steady state motion of a tractor-semitrailer//Vehicle System Dynamics. 1984. V. 13. No. 4. P. 161—172.
5. Scheidl R., Stribersky A., Troger H., Zeman K. Driving behavior of a tractor-semitrailer vehicle in steady state downhill motion//Vehicle System Dynamics. 1985. V. 14. No. 1—3. P. 184—188.
6. Scheidl R., Stribersky A. Gekoppelte Divergenz- und Flatterinstabilität eines Sattelschleppzuges//ZAMM. 1986. V. 66. No. 4. P. 87—89.
7. Scheidl R., Stribersky A., Troger H., Zeman K. Nonlinear stability behaviour of a tractor-semitrailer in downhill motion//Vehicle System Dynamics. 1986. Suppl. V. 15. P. 509—522.
8. Kacani V., Stribersky A., Troger H. Maneuverability of a truck-trailer combination after loss of lateral stability//Vehicle System Dynamics. 1988. Suppl. V. 17. P. 186—198.
9. Kacani V. Anwendung der nichtlinearen Stabilitätstheorie zur Untersuchung der Fahrdynamik eines Lastkraftwagens mit Anhänger//Fortschritt — Berichte der VDI. 1988. R. 12. Nr. 100. S. 1—111.
10. Лобас Л. Г., Хребет В. Г. Существование и единственность периодического движения в маятниковых двузвенных системах с качением//Изв. АН СССР. МТТ. 1993. № 5. С. 23—31.
11. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
12. Эллис Д. Р. Управляемость автомобиля. Машиностроение, 1975. 216 с.
13. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Л.—М.: Гостехиздат, 1949. 244 с.
14. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
15. Журавлев В. Ф., Клымов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
16. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
17. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

Киев

Поступила в редакцию
25.XI.1991