МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1994

УДК 534.131.2

 Л. Д. АКУЛЕНКО, С. В. НЕСТЕРОВ

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Исследуется задача о горизонтальных перемещениях под действием заданных сил твердого тела с прямоугольной полостью, содержащей двухслойную тяжелую жидкость. Предполагается, что основание перемещается вертикально, т. е. имеет место параметрическое возбуждение внутренних волн в жидкости. Получена самосогласованная замкнутая задача Коши для интегродифференциального уравнения, описывающего движение тела. Найдены выражения для потенциалов скоростей и уравнения поверхности раздела, позволяющие определить кинематические и динамические характеристики волновых движений. Выявлен резонансный механизм неустойчивости (экспоненциального роста амплитуды) колебаний тела (и жидкости) при гармоническом параметрическом возбуждении внутренних волн. Подходы [1—4] в работе развиваются на случай подвижного основания. Параметрическое возбуждение внутренних волн стратифицированной жидкости в вертикально колеблющемся сосуде теоретически и экспериментально изучались в [5, 6] и других работах.

1. Постановка задачи. Рассматривается колебательная система, представленная на фигуре. Твердое тело M может перемещаться вдоль оси X' подвижной системы, которая может вертикально перемещаться. На тело действует горизонтальная сила F, зависящая от фазовых переменных, характеризующих движение тела относительно подвижной системы. Внутри тела имеется прямоугольная полость, целиком заполненная тяжелой идеальной несжимаемой стратифицированной (двухслойной) жидкостью (см. фигуру). Предположим, что в начальный момент времени система покоится, поверхность раздела жидкостей горизонтальна, импульсивное давление не прилагается. Ставится задача определить движение тела и жидкости при $t > 0$.

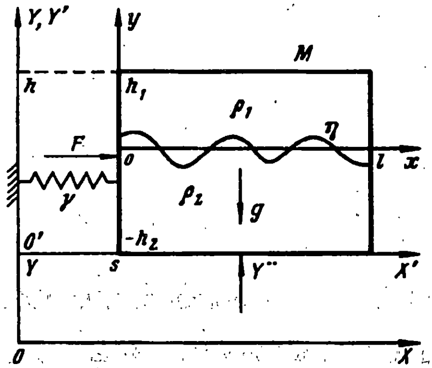
Для его описания вводятся три невращающиеся системы координат с взаимно параллельными осями. Система $O'X'Y'$ может поступательно перемещаться вдоль оси Y относительно инерциальной системы OXY, ось X которой параллельна горизонту, а Y направлена вертикально вверх против вектора сил тяготения. С телом M связана подвижная система oxy, ось y которой направлена вертикально вверх, как и Y, Y', а ось x параллельна X, X' и проходит через линию раздела жидкостей в невозмущенном состоянии.

Полость и жидкость имеют характеристики: l — ширина полости, h — ее высота; h_1, h_2 ($h_{1,2} > 0$) — толщины верхнего и нижнего слоев соответственно ($h_1 + h_2 = h$), плотности которых ρ_1, ρ_2, причем $\rho_2 > \rho_1 \geq 0$, т. е. жидкость устойчиво стратифицирована.

Следуя [1, 2], запишем уравнения гидродинамики для каждого слоя D_1, D_2 в системе координат, связанной с твердым телом, т. е. в системе oxy. В силу предположения о несжимаемости жидкостей имеем уравнения состояния

$$\partial^2\Phi/\partial x^2 + \partial^2\Phi/\partial y^2 = 0, \quad \Phi = \Phi_{1,2}(t, x, y) \tag{1.1}$$

$$(x, y) \in D_{1,2}: \quad \begin{array}{l} D_1 = \{x, y; \quad 0 < x < l, \quad h_1 > y > 0\} \\ D_2 = \{x, y; \quad 0 < x < l, \quad 0 > y > -h_2\} \end{array}$$



Здесь $\Phi_{1,2}$ — потенциалы скоростей в соответствующей области $D_{1,2}$. Заметим, что задача рассматривается в плоской линейной постановке: переменная z явно не входит.

Граничное условие на поверхности раздела жидкостей, характеризующее равенство давлений, имеет вид

$$(\rho_2\Phi_2^{\cdot} - \rho_1\Phi_1^{\cdot})_{y=0} - (\rho_2 - \rho_1)\, g'\eta = -(\rho_2 - \rho_1)\, c^{\cdot}x, \quad 0 \le x \le l, \quad t > 0$$

$$g' = g'(t) \equiv g + Y^{\cdot\cdot}(t) \tag{1.2}$$

Здесь точками обозначены производные по времени, $Y(t)$ — вертикальная координата точки O' в инерциальной системе ($X = \text{const}$), g — ускорение сил тяготения, $c = s^{\cdot}$ — относительная скорость перемещения s тела (вдоль горизонтальной оси X'), $\eta = \eta(t, x)$ — возвышение поверхности раздела над уровнем $y = 0$, т. е. $y = \eta(t, x)$ — уравнение поверхности раздела. Смысл и отличие соотношения (1.2) от приведенных в [1, 2] состоит в том, что ускорение сил тяготения g заменяется на $g' = g + Y^{\cdot\cdot}$ ($Y^{\cdot\cdot} = Y^{\cdot\cdot}(t)$). Далее, в относительной системе координат имеем условие неперемешивания частиц жидкости на поверхности раздела в линейном приближении

$$\eta^{\cdot} = -\Phi'_{1y}|_{y=0} = -\Phi'_{2y}|_{y=0}, \quad 0 \le x \le l, \quad t > 0 \tag{1.3}$$

где штрихи с индексом внизу означают производные по соответствующим пространственным координатам. Заметим, что условие (1.2) носит динамический характер, а соотношения (1.3) — кинематический, т. е. частицы жидкости на поверхности раздела движутся вместе с граничной поверхностью.

На твердых стенках полосы должны выполняться условия непроницаемости

$$\Phi'_{1,2x}|_{x=0,\,l} = \Phi'_{1,2y}|_{y=h_1,\,-h_2} \equiv 0 \tag{1.4}$$

Начальные условия, как отмечалось, нулевые ($(x, y) \in D_{1,2}$):

$$\Phi_{1,2}(0, x, y) = 0, \qquad \eta(0, x) = 0 \tag{1.5}$$

что отвечает состоянию покоя жидкости при $t = 0$. Предположим, что для $t > 0$ задана достаточно гладкая функция $Y = Y(t)$, а также известна сила F, действующая на тело вдоль оси X'; далее полагаем, что $F = F(t, s, s^{\cdot})$. Ставится задача определить горизонтальное движение тела под действием силы F и реакции жидкости при следующих начальных условиях

$$s(0) = s^0, \quad s^{\cdot}(0) = 0 \quad (c(0) = 0) \tag{1.6}$$

согласованных с условиями (1.5), налагаемыми на потенциалы скоростей и поверхность раздела жидкости. Кроме того, требуется определить кинематические и динамические параметры жидкости, такие как потенциалы скоростей, распределения скоростей и давлений, уравнение поверхности и др.

Решение задачи строим, следуя [1—4]. Существенное отличие поставленной задачи заключается в наличии переменного члена $Y^{\cdot\cdot}(t)$ в (1.2), который может приводить к параметрическому возбуждению колебаний. Далее рассматривается интересный для приложений случай периодической функции $Y^{\cdot\cdot}(t)$ и возвращающей квазилинейной силы F:

$$F = F(t, s, s^{\cdot}) = -\gamma s + f(t, s, s^{\cdot}), \quad \gamma = \text{const} > 0 \tag{1.7}$$

где f — возмущающее воздействие.

Заметим, что многостороннее изучение задачи о параметрическом возбуждении внутренних волн в стратифицированной жидкости в прямоугольном сосуде, совершающем только вертикальные периодические колебания, теоретически и экспериментально проводилось в [5, 6] и других работах. Однако до настоящего времени неизвестны в печати результаты о параметрическом возбуждении колебаний твердого тела с полостью, заполненной стратифицированной жидкостью, имеющего также горизонтальную степень свободы. Эта задача представляет значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах.

2. Решение краевой задачи. Предположим пока, что относительные горизонтальные перемещения тела $s(t)$ известны и являются достаточно гладкими. Выражения для искомых потенциалов $\Phi_{1,2}(t, x, y)$ и поверхности $\eta(t, x)$ ищем методом разделения переменных в виде одинарных рядов

$$\Phi_{1,2} = A_{1,2}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{(1,2)}(t) \cos(2k+1)x^* \,\text{ch}\,(2k+1)(y^* - y^*_{1,2})$$

$$\eta = \sum_{k=0}^{\infty} W_{2k+1}(t) \cos(2k+1)x^* \tag{2.1}$$

$$x^* = \pi x l^{-1}, \quad y^* = \pi y l^{-1}, \quad y_1^* = \pi h_1 l^{-1}, \quad y_2^* = -\pi h_2 l^{-1}$$

Здесь $A_{1,2}(t)$, $B_{2k+1}^{(1,2)}(t)$, $W_{2k+1}(t)$ — неизвестные функции (коэффициенты Фурье), подлежащие определению. Заметим, что потенциалы $\Phi_{1,2}$ (2.1) удовлетворяют условиям непротекания (1.4). Для нахождения неизвестных коэффициентов подставим ряды (2.1) в граничные условия на поверхности раздела (1.2), (1.3) и используем свойство линейной независимости собственных координатных функций. Из (1.2) следует счетная система дифференциальных уравнений

$$\rho_2 A_2^{\cdot} - \rho_1 A_1^{\cdot} = -1/2\,(\rho_2 - \rho_1)\, l^{-1} c^{\cdot} \tag{2.2}$$

$$\rho_2 B_{2k+1}^{(2)\cdot}\,\text{ch}\,(2k+1)y_2^* - \rho_1 B_{2k+1}^{(1)\cdot}\,\text{ch}\,(2k+1)y_1^* -$$

$$-(\rho_2 - \rho_1) g' W_{2k+1} = 4\pi^{-2}(2k+1)^{-2}(\rho_2 - \rho_1)\, l c^{\cdot} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Из кинематического условия (1.3) на граничной поверхности следует счетная система равенств

$$W_{2k+1}^{\cdot} = \pi(2k+1) l^{-1} B_{2k+1}^{(1)}\,\text{sh}\,(2k+1)y_1^* = \tag{2.3}$$

$$= -\pi(2k+1) l^{-1} B_{2k+1}^{(2)}\,\text{sh}\,(2k+1)|y_2^*|$$

из которой сразу находим связь между $B_{2k+1}^{(1)}(t)$ и $B_{2k+1}^{(2)}(t)$:

$$B_{2k+1}^{(1)}(t) = -[\text{sh}\,(2k+1)|y_2^*| / \text{sh}\,(2k+1)y_1^*]\, B_{2k+1}^{(2)}(t) \tag{2.4}$$

Подставив $B^{(1)}_{2k+1}(t)$ (2.4) во второе уравнение (2.2), получим две счетные системы дифференциальных уравнений для $B^{(2)}_{2k+1}$, W_{2k+1} первого порядка. Вследствие ее квазидиагональности она может быть сведена к счетной системе второго порядка относительно $B^{(2)}_{2k+1}(t)$ или $W_{2k+1}(t)$. Из (2.2)—(2.4) следует, что более удобно продифференцировать по t соотношение (2.3) (во избежание дополнительного промежуточного дифференцирования $c^{\cdot}$, $Y^{\cdot\cdot}$, см (2.2)). Итак, продифференцировав (2.3) по t и исключив $B^{(1)}_{2k+1}$, $B^{(2)}_{2k+1}$, получим для $W_{2k+1}(t)$ линейное неоднородное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$W^{\cdot\cdot}_{2k+1} + \omega^2_{2k+1}(1 + Y^{\cdot\cdot}g^{-1})W_{2k+1} = -a_{2k+1}c^{\cdot} \tag{2.5}$$

$$\omega^2_{2k+1} = \frac{\pi(2k+1)}{l}g(\rho_2 - \rho_1)\frac{\operatorname{th}(2k+1)y_1^* \operatorname{th}(2k+1)|y_2^*|}{\rho_2 \operatorname{th}(2k+1)y_1^* + \rho_1 \operatorname{th}(2k+1)|y_2^*|}$$

$$a_{2k+1} = 4\pi^{-2}(2k+1)^{-2}l\omega^2_{2k+1}, \quad \omega^2_{2k+1}|_{\rho_1=\rho_2} = 0$$

$$\omega_{2k+1} \sim \sqrt{k}, \quad a_{2k+1} \sim k^{-1}, \quad k \to \infty \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Следует особо отметить, что в силу условий (1.5) и (2.3) начальные значения W_{2k+1}, $W^{\cdot}_{2k+1}$ нулевые

$$W_{2k+1}(0) = W^{\cdot}_{2k+1}(0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

Итак, требуется решить задачу Коши по t для диагональной счетной системы (2.5), (2.6) в предположении, что функция $c(t)$ (и $c^{\cdot}(t)$) известна и задана. Используем для этой цели метод вариации постоянных. Пусть $V^{(1)}_{2k+1}(t)$, $V^{(2)}_{2k+1}(t)$ — фундаментальная система (совместно с производными) решений однородного уравнения (2.5). Функции $V^{(1)}_{2k+1}$, $V^{(2)}_{2k+1}$ выберем такими, чтобы

$$V^{(1)}_{2k+1}(0) = 1, \quad V^{(1)\cdot}_{2k+1}(0) = 0; \quad V^{(2)}_{2k+1}(0) = 0, \quad V^{(2)\cdot}_{2k+1}(0) = 1$$

Тогда с помощью функций $V^{(1,2)}_{2k+1}(t)$ искомое решение задачи Коши (2.5), (2.6) может быть найдено по методу вариации постоянных в виде

$$W_{2k+1}(t) = -a_{2k+1}\int_0^t \Lambda_{2k+1}(t, \tau)c^{\cdot}(\tau)\,d\tau \tag{2.7}$$

$$\Lambda_{2k+1}(t, \tau) \equiv V^{(2)}_{2k+1}(t)V^{(1)}_{2k+1}(\tau) - V^{(1)}_{2k+1}(t)V^{(2)}_{2k+1}(\tau), \quad \Lambda_{2k+1}(t, t) \equiv 0, \quad t \geq 0$$

Функции $V^{(1)}_{2k+1}(t)$ безразмерные, а $V^{(2)}_{2k+1}(t)$, $\Lambda_{2k+1}(t)$ имеют размерность времени. Итак, если известно какое-либо нетривиальное решение однородного уравнения (2.5), то на основе теоремы об определителе Вронского (теоремы Лиувилля) строится его общее решение, а вместе с ним искомая функция $W_{2k+1}(t)$. Однако для переменного ускорения $Y^{\cdot\cdot}(t)$ явное решение в общем случае построить не удается, в отличие от исследованных ранее случаев [1—4], когда

$$Y^{\cdot\cdot}(t) \equiv 0, \quad \Lambda_{2k+1}(t, \tau) = \omega^{-1}_{2k+1}\sin\omega_{2k+1}(t - \tau) \tag{2.8}$$

Функции $V^{(1,2)}_{2k+1}(t)$ могут быть найдены численными или приближенными аналитическими методами (см. далее). Оценки функций $V^{(1,2)}_{2k+1}(t)$ и $\Lambda_{2k+1}(t)$ имеют вид при $k \to \infty$:

$$V^{(1)}_{2k+1} \sim 1, \quad V^{(2)}_{2k+1} \sim \Lambda_{2k+1} \sim \omega^{-1}_{2k+1} \sim 1/\sqrt{k} \tag{2.9}$$

Пусть коэффициенты $W_{2k+1}(t)$ построены как линейные интегральные операторы от $c^{\cdot}(t)$ (2.7). Тогда согласно (2.1) определяется уравнение поверхности раздела жидкостей $\eta(t, x)$. Чтобы найти потенциалы скоростей $\Phi_{1,2}(t, x, y)$, воспользуемся соотношениями (2.3) для $B_{2k+1}^{(1,2)}(t)$:

$$B_{2k+1}^{(1,2)}(t) = \pm lW_{2k+1}^{\cdot}(t)\,[\pi(2k+1)\,\mathrm{sh}\,(2k+1)|y_{1,2}^{*}|]^{-1} \tag{2.10}$$

Коэффициенты $A_{1,2}(t)$ из (2.2) получаются интегрированием по t неоднозначно. Однако это обстоятельство не влияет на значения поля скоростей в жидкости, поскольку при дифференцировании $\Phi_{1,2}$ по x, y коэффициенты $A_{1,2}(t)$ выпадают. Перейдем к определению в системе $O'X'Y'$ движения тела, т. е. неизвестной $s = s(t)$.

3. Уравнение движения тела. Для определения сил реакции со стороны жидкости на тело M воспользуемся линеаризованным интегралом Бернулли [1, 2]. Распределения давлений в каждом слое $D_{1,2}$ равны

$$p_{1,2} = \rho_{1,2}(\Phi_{1,2}^{\cdot} + g'y - c^{\cdot}x), \quad (x, y) \in D_{1,2}, \quad t \geq 0 \tag{3.1}$$

Для вычисления результирующей силы реакции N на боковые стенки (т. е. вдоль оси X') проинтегрируем и вычтем выражения для $p_{1,2}$ по y, $y \in [-h_2, h_1]$ при $x = l$ и $x = 0$ соответственно. Пусть длина полости (вдоль оси z) равна r; тогда суммарная сила N имеет вид

$$N = -\left[rl(\rho_2 h_2 + \rho_1 h_1) + \frac{8rl^3}{\pi^4 g}(\rho_2 - \rho_1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega_{2k+1}^2}{(2k+1)^4}\right]c^{\cdot} -$$
$$- \frac{8rl^3}{\pi^4 g}(\rho_2 - \rho_1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega_{2k+1}^4}{(2k+1)^4}\left(1 + \frac{Y^{\cdot\cdot}}{g}\right)\int_0^t \Lambda_{2k+1}(t, \tau)\,c^{\cdot}(\tau)\,d\tau \equiv \tag{3.2}$$
$$\equiv -(m + m_*)\,s^{\cdot\cdot} - \int_0^t \Lambda^*(t, \tau)\,s^{\cdot\cdot}(\tau)\,d\tau$$

Выражение (3.2) является обобщением полученного в [2] для случая (2.8). Выпишем уравнение динамики твердого тела и принятые начальные условия (1.6):

$$Ms^{\cdot\cdot} = N + F, \quad s(0) = s^0, \quad s^{\cdot}(0) = 0, \quad t > 0 \tag{3.3}$$

Здесь M — масса тела. Отметим, что первый член (произведение выражения в квадратной скобке на $c^{\cdot} = s^{\cdot\cdot}$) в выражении для N (3.2) имеет смысл сил инерции, причем первое слагаемое есть масса всей стратифицированной жидкости m в полости, а второе — «динамическая присоединенная масса», обусловленная движением жидкости и исчезающая при $\rho_1 = \rho_2$. Второй член, содержащий интеграл от $c^{\cdot} = s^{\cdot\cdot}$, также учитывает динамику жидкости в полости тела, совершающего вертикальные ($Y^{\cdot\cdot}$) и горизонтальные ($c^{\cdot}$) перемещения. Он получается суммированием равномерно сходящегося функционального ряда. Ускорение $Y^{\cdot\cdot}(t)$ имеет характер параметрического возбуждения и входит множителем в уравнения (2.5) и (3.2), т. е. ядро Λ есть сложный оператор от $Y^{\cdot\cdot}(t)$.

Таким образом, для определения движения твердого тела получена замкнутая интегродифференциальная задача Коши (3.3) относительно неизвестной $s(t)$. Остальные характеристики сил, действующих на тело, такие как сила F (см. (1.7)) и коэффициенты $\Lambda_{2k+1}(t)$ (см. [2—7]) считаются известными. Отметим, что функции $V_{2k+1}^{(1,2)}(t)$ в общем случае могут быть построены численно. Интегрирование (3.3) также можно провести численно для конкретных функций F и $Y^{\cdot\cdot}$ или приближенно аналитически путем введения малых параметров, имеющих определенный механический смысл. Во избежание трудностей численного решения в выражении для N (3.2) можно избавиться от $c^{\cdot} = s^{\cdot\cdot}$ под знаком интеграла при помощи стандартной процедуры интегрирования по частям

$$\int_0^t \Lambda^*(t, \tau)\, s^{\cdot\cdot}(\tau)\, d\tau = -\int_0^t K^*(t, \tau)\, s^{\cdot}(\tau)\, d\tau, \quad K^* \equiv \frac{\partial \Lambda^*}{\partial \tau} \tag{3.4}$$

При этом используются свойства (2.7): $\Lambda_{2k+1}(t, t) \equiv 0$, т. е. $\Lambda^*(t, t) \equiv 0$ и условие (3.3): $s^{\cdot}(0) = c(0) = 0$. Ряд для ядра $K^*(t, \tau)$ получается согласно (3.2) почленным дифференцированием функций $\Lambda_{2k+1}(t, \tau)$ по τ; он также является равномерно сходящимся. После вычисления функции $s(t)$ согласно изложенному в разд. 2, 3 определяются кинематические и динамические характеристики движения стратифицированной жидкости.

4. **Параметрическое возбуждение колебаний тела.** Рассмотрим для определенности случай колебательной системы (3.3), который может представить значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах. А именно, пусть F — линейная возвращающая сила (1.7), а $Y^{\cdot\cdot}(t)$ — гармоническое воздействие имеют вид

$$F = -\gamma s \quad (f \equiv 0), \quad Y^{\cdot\cdot}(t) = d\nu^2 \cos \nu t \tag{4.1}$$

где γ — коэффициент упругости, d — амплитуда колебаний основания, ν — их частота. Тогда (3.2)—(3.4) описывается соотношениями

$$s^{\cdot\cdot} + \Omega^2 s = \varepsilon (1 + \mu \cos \nu t) \int_0^t K(t, \tau)\, s^{\cdot}(\tau)\, d\tau \tag{4.2}$$

$$s(0) = s^0, \quad s^{\cdot}(0) = 0 \quad (\mu = d\nu^2/g, \quad \Omega^2 = \gamma/M^*$$

$$\varepsilon = 8rl^3 (\rho_2 - \rho_1)\, \Omega_*^2/(\pi^4 g M^*), \quad M^* = M + m + m_*)$$

Здесь $\Omega_* > 0$ — величина, имеющая размерность частоты, равная, например Ω или ν. Ядра $K(t, \tau)$, $\Lambda(t, \tau)$ $(K = \partial\Lambda/\partial\tau)$ определяются согласно (2.7), (3.2), (3.4) на основе решений счетного числа задач Коши для уравнений Матье [7, 8]:

$$V_{2k+1}^{\cdot\cdot} + \omega_{2k+1}^2 (1 + \mu \cos \nu t)\, V_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.3}$$

$$V_{2k+1}^{(1)}(0) = 1, \quad V_{2k+1}^{(1)\cdot}(0) = 0; \quad V_{2k+1}^{(2)}(0) = 0, \quad V_{2k+1}^{(2)\cdot}(0) = 1$$

$$K(t, \tau) = \frac{1}{\Omega_*^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_{2k+1}^4}{(2k+1)^4} K_{2k+1}(t, \tau)$$

$$K_{2k+1}(t, \tau) = \frac{\partial \Lambda_{2k+1}}{\partial \tau} = V_{2k+1}^{(2)}(t) V_{2k+1}^{(1)\cdot}(\tau) - V_{2k+1}^{(1)}(t) V_{2k+1}^{(2)\cdot}(\tau)$$

Исследование (4.2) сопряжено с принципиальными трудностями, обусловленными в первую очередь тем, что ядро K задается неявно согласно (4.3) и аналитические свойства ядра $K(t, \tau)$ неизвестны. Одним из основных подходов при численном решении является конечномодовое приближение, когда ограничиваются конечным отрезком ряда для ядра K и применяют численные методы типа ломаных Эйлера или схем высокого порядка при интегрировании уравнений (4.2), (4.3).

Значительный интерес может представить исследование задачи в случае малых параметров ε и μ на асимптотически больших интервалах времени, на которых происходит существенное изменение характера колебаний сосуда. Возможны различные порядки малости параметров $\varepsilon \ll 1$, $\mu \ll 1$. Пусть, например,

$0 < \mu \ll \varepsilon \ll 1$; тогда имеются возможности либо исследования (4.2) при $\mu = 0$ для случая известного ядра $K(t, \tau)$ [2], либо уточнения ядра K по степеням параметра $\mu \ll 1$ и асимптотического исследования по $\varepsilon \ll 1$. Динамика тела, отвечающая $\mu = 0$, подробно изучена в [2—4] для $t \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$ или $t \sim 1/\varepsilon$ в так называемых резонансном ($\omega_{2k^*+1} - \Omega \sim \sqrt{\varepsilon}$) и нерезонансном ($\omega_{2k+1} - \Omega \sim 1$) случаях соответственно. При резонансе имеют место биения — амплитуда колебаний медленно периодически изменяется [2, 3]. Если резонанс отсутствует, то происходят гармонические колебания с постоянной амплитудой и частотой, причем последняя изменяется на величину $O(\varepsilon)$ [3, 4]. Неограниченного роста амплитуды колебаний тела и волн не наблюдается, что очевидно с механической точки зрения.

Учет влияния вертикальных колебаний основания может существенным образом изменить поведение системы, т. е. привести к неограниченному росту амплитуды колебаний тела и волн, вызванному параметрическим резонансом и связанному с медленным экспоненциальным ростом функций $V_{2k+1}^{(1,2)}(t)$, т. е. ядра $K(t, \tau)$. Проиллюстрируем механизм возрастания колебаний тела, вызванного параметрическим резонансом между собственными колебаниями жидкости и внешним возбуждением. Пусть для «небольшого» значения $k = k^*$ имеет место случай основного параметрического резонанса: $4\omega_{2k^*+1}^2/\nu^2 = 1$. Тогда, вводя безразмерное время $\nu t = 2\theta$, вместо (4.3) получим уравнение вида (штрих означает производную по θ):

$$V'' + (1 + \mu \cos 2\theta) V = 0, \quad 0 < \mu \ll 1, \quad \theta \sim 1/\mu \tag{4.4}$$

Интегрируя приближенно при помощи метода усреднения, для $K_{2k^*+1}(t, \tau)$, получим выражение (для $t, \tau \sim 1/\mu$):

$$K_{2k^*+1}(t, \tau) = -\operatorname{ch}(\mu/4)\, \omega_{2k^*+1}(t - \tau) \cos \omega_{2k^*+1}(t - \tau) + \tag{4.5}$$

$$+ \operatorname{sh}(\mu/4)\, \omega_{2k^*+1}(t - \tau) \sin \omega_{2k^*+1}(t - \tau) + O(\mu), \quad \omega_{2k^*+1} = \tfrac{1}{2}\nu$$

Для других значений $k \neq k^*$, т. е. $\omega_{2k+1} - \tfrac{1}{2}\nu \sim 1$ выражения для K_{2k+1} аналогичны получаемым при $\mu = 0$ (см. выше): $K_{2k+1}(t, \tau) = -\cos \omega_{2k+1}(t - \tau) + O(\mu)$. Теперь, следуя [2—4], будем искать решение (4.2) приближенно в виде

$$s = a \cos \Omega t + b \sin \Omega t, \quad s^{\cdot} = \Omega(-a \sin \Omega t + b \cos \Omega t) \tag{4.6}$$

где a, b — медленные (оскулирующие) переменные. Предположим, что имеет место «внутренний» резонанс, согласно которому $\Omega \cong \omega_{2k^*+1}$, и примем $\varepsilon = \beta\mu^2$, $\beta \sim 1$, $t \sim 1/\mu$. Проводя усреднение согласно [2, 3], с учетом выражения (4.5) для основного члена ядра получим для a, b в первом приближении по μ, $0 < \mu \ll 1$, задачу вида

$$a'(\sigma) = -\chi \int_0^\sigma [a \operatorname{ch}(\sigma - \delta) + b \operatorname{sh}(\sigma - \delta)]\, d\delta, \quad a(0) = s^0$$

$$b'(\sigma) = -\chi \int_0^\sigma [a \operatorname{sh}(\sigma - \delta) + b \operatorname{sh}(\sigma - \delta)]\, d\delta, \quad b(0) = 0$$

$$\chi = 4\beta\Omega\Omega_*^{-2} > 0, \quad \sigma = \tfrac{1}{4}\mu\Omega t \tag{4.7}$$

Здесь σ — медленное безразмерное время. Нетрудно установить, что (4.7) эквивалентна задаче Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Действительно, дифференцируя, например, первое и второе уравнение (4.7) по σ, получим

$$a'' = -\chi a + b', \quad a(0) = s^0, \quad a'(0) = 0 \tag{4.8}$$

$$b'' = a' - \chi b, \quad b(0) = 0, \quad b'(0) = 0$$

Корни λ_i характеристического уравнения для системы (4.8) равны

$$\lambda_{1,2} = 1/2 \pm (1/4 - \chi)^{1/2}, \quad \lambda_{3,4} = -1/2 \pm (1/4 - \chi)^{1/2}$$

Отсюда следует, что первые два корня имеют положительную вещественную часть: $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} > 0$.

Итак, в случае внешнего параметрического и внутреннего резонансов имеется довольно сильный механизм раскачки твердого тела $s(t) \to \infty$ согласно (4.6). Амплитуда колебаний $(a^2 + b^2)^{1/2}$ возрастает экспоненциально со временем, причем показатель экспоненты равен $\lambda_{1,2}\sigma \sim \mu\Omega t \sim \sqrt{\varepsilon}\,\Omega t$. Аналогично будут возрастать во времени амплитуды кинематических и динамических характеристик волновых движений жидкости. Отсутствие внутреннего резонанса при наличии внешнего также может привести к росту амплитуды колебаний, однако с более слабым механизмом раскачки. Эти вопросы требуют дополнительного обстоятельного изучения на основе разработки и обоснования весьма тонких асимптотических и численноаналитических методов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93—013—17594, 94—01—01368) и Международного научного фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
2. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 27—36.
3. *Акуленко Л. Д.* Исследование квазилинейных колебаний механических систем с распределенными и сосредоточенными параметрами//ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 392—401.
4. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Нерезонансные колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую двухслойную жидкость//Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 52—58.
5. *Секерж-Зенькович С. Я.* Возбуждение волн конечной амплитуды на границе раздела двух жидкостей разных плотностей//Докл. АН СССР. Т. 272. № 5. 1983. С. 1083—1086.
6. *Калиниченко В. А.* Лабораторное исследование параметрической устойчивости в двухслойной жидкости//Изв. АН СССР. ФАО. 1986. № 2. С. 206—210.
7. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
8. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400 с.

Москва — Поступила в редакцию 1.X.1991