

УДК 531.55:521.1

© 1994 г. М. Л. ПИВОВАРОВ

О КОЛЕБАНИЯХ СПУТНИКА С МАГНИТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИЕЙ

Характерное время колебаний спутника с магнитной стабилизацией относительно магнитной силовой линии много меньше периода обращения, т. е. характерного времени изменения магнитного поля Земли. Это позволяет описать задачу дифференциальными уравнениями с медленно меняющимися коэффициентами. В случае плоских движений такой подход позволяет получить аналитические выражения амплитуды колебаний и энергии вращений [1], а также аналитически описать процесс демпфирования для различных типов демпферов [2—4].

В данной работе получены аналитические выражения амплитуды малых пространственных колебаний динамически симметричного спутника. При этом не накладываются ограничения на форму орбиты спутника и модель магнитного поля Земли.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение относительно центра масс динамически симметричного спутника, вдоль оси симметрии которого установлен постоянный магнит. Будем пренебрегать возмущающими моментами, отличными от магнитного. Возьмем уравнения движения в форме [5—7]:

$$Ae \times \frac{d^2e}{dt^2} + Cn \frac{de}{dt} = Ie \times H \quad (1.1)$$

где $A = B \neq C$ — главные центральные моменты инерции спутника, e — единичный вектор, направленный вдоль оси симметрии, $n = \text{const}$ — составляющая угловой скорости спутника вдоль оси симметрии, Ie — магнитный момент спутника, H — вектор магнитного поля Земли в данной точке орбиты, производные вычисляются в некоторой инерциальной системе координат $OXYZ$.

Введем единичный вектор h , направленный вдоль магнитной силовой линии, тогда $H = M_0 m^2 h$, где M_0 — модуль вектора магнитного поля в перигее орбиты, m^2 — безразмерная величина модуля вектора H .

Перейдем в уравнении (1.1) к безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$, где ω_0 — орбитальная частота

$$e \times \frac{d^2e}{d\tau^2} + \beta \frac{de}{d\tau} = \alpha m^2 e \times h, \quad \alpha = \frac{IM_0}{A\omega_0^2} = \frac{\omega_H^2}{\omega_0^2}, \quad \beta = \frac{Cn}{A\omega_0} \quad (1.2)$$

Здесь ω_H — частота малых плоских колебаний спутника в магнитном поле, соответствующем перигею орбиты.

Будем предполагать, что $\alpha \gg 1$, так что $\varepsilon = 1/\sqrt{\alpha} = \omega_0/\omega_H \ll 1$ и перейдем в (1.2) к быстрому времени $\varepsilon z = \tau - \tau_0$. Получим

$$e \times e'' + \varepsilon \beta e' = m^2(\tau) e \times h(\tau) \quad (1.3)$$

где штрих обозначает производную по z .

Далее будем считать, что $\beta \sim 1$, т. е. составляющая угловой скорости спутника вдоль оси симметрии — порядка орбитальной. Будем рассматривать малые отклонения оси симметрии от направления магнитной силовой линии.

Положим $e = h + x$ и линеаризуем уравнение (1.3) по x . В матричном виде получим

$$W(\tau) x'' + \varepsilon \beta x' + m^2(\tau) W(\tau) x = \varepsilon^2 [W_{\tau\tau}(\tau) x + f(\tau)] \quad (1.4)$$

$$W = \begin{vmatrix} 0 & -h_z(\tau) & h_y(\tau) \\ h_z(\tau) & 0 & -h_x(\tau) \\ -h_y(\tau) & h_x(\tau) & 0 \end{vmatrix}, \quad f = h_{\tau\tau} \times h - \beta h_{\tau}$$

компоненты вектора h вычислены в системе координат $OXYZ$.

2. Уравнения первого приближения. Система линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами (1.4) имеет особенность: матрица W вырождена, а порождающая система ($\varepsilon = 0$) резонансна. Поэтому результаты [8] в данном случае неприменимы.

При любом τ матрица W имеет собственные значения 0 , i , $-i$ и является кососимметрической. Поэтому [9] существует вещественная ортогональная матрица $U(\tau)$ такая, что

$$U^{\tau} W U = Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

где τ — знак транспонирования. Матрица U задает переход от системы координат $OXYZ$ к ортогональной системе координат, третья ось которой направлена по вектору h . Действительно, выбирая в качестве U например

$$U = \frac{1}{|h|} \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & h \\ h & e_x & 0 \end{vmatrix}, \quad n_2 = \frac{h \times e_x}{|h \times e_x|}, \quad n_1 = h \times n_2, \quad e_x = \{1, 0, 0\} \quad (2.2)$$

после несложных вычислений приходим к (2.1).

Сделаем в уравнении (1.4) замену $x = Uy$ и умножим обе части уравнения слева на U^{τ} . Получим

$$Q [y'' + m^2(\tau) y] + 2\varepsilon U^{\tau} W U y' + \varepsilon \beta y' = \varepsilon^2 [F(\tau) y + U^{\tau} f(\tau)] \quad (2.3)$$

$$F = U^{\tau} (W_{\tau\tau} U - W U_{\tau\tau} - \beta U_{\tau})$$

Далее будем пренебрегать членами порядка ε^2 в уравнении (2.3). Обозначим $G(\tau) = U^{\tau} W_{\tau}$. Пользуясь (2.1), получим $U^{\tau} W U_{\tau} = QG(\tau)$. Дифференцируя по τ тождество $U^{\tau} U = E$, где E — единичная матрица, находим, что G — кососимметрическая матрица

$$G = \begin{vmatrix} 0 & -g_3(\tau) & g_2(\tau) \\ g_3(\tau) & 0 & -g_1(\tau) \\ -g_2(\tau) & g_1(\tau) & 0 \end{vmatrix}$$

а система уравнений (2.3) приводится к виду

$$y_1'' + m^2(\tau) y_1 = 2\varepsilon g_3(\tau) y_2' + \varepsilon \beta y_2'$$

$$y_2'' + m^2(\tau) y_2 = -2\varepsilon g_3(\tau) y_1' - \varepsilon \beta y_1', \quad \varepsilon \beta y_3' = 0$$

В рассматриваемом линейном по x приближении $y_3 = 0$. Вычисляя g_3 с учетом (2.2), получим

$$y_1'' + m^2(\tau) y_1 = \varepsilon p(\tau) y_2', \quad y_2'' + m^2(\tau) y_2 = -\varepsilon p(\tau) y_1'$$

$$p(\tau) = \beta + 2h_x (h_y \dot{h}_y - \dot{h}_y h_x) / (h_y^2 + h_x^2) \quad (2.4)$$

где точкой обозначена производная по τ .

3. Интегрирование усредненных уравнений. Для исследования системы (2.4)

воспользуемся методом усреднения. Приведем уравнения (2.4) к системе с двумя вращающимися фазами [8].

Невозмущенная система имеет решение

$$y_i = a_i \cos \psi_i, \quad y_i' = -a_i m \sin \psi_i, \quad d\psi_i/dz = d\psi/dz = m(\tau_0) \quad (i = 1, 2) \quad (3.1)$$

Выберем a_i, ψ_i в качестве новых переменных задачи (2.4). После стандартных выкладок получим

$$\frac{da_1}{dz} = -\varepsilon a_1 \frac{m_\tau}{m} \sin^2 \psi_1 + \varepsilon p a_2 \sin \psi_1 \sin \psi_2 \quad (3.2)$$

$$\frac{da_2}{dz} = -\varepsilon a_2 \frac{m_\tau}{m} \sin^2 \psi_2 - \varepsilon p a_1 \sin \psi_1 \sin \psi_2$$

$$\frac{d\psi_1}{dz} = m - \varepsilon \frac{m_\tau}{m} \sin \psi_1 \cos \psi_1 + \varepsilon p \frac{a_2}{a_1} \sin \psi_2 \cos \psi_1$$

$$\frac{d\psi_2}{dz} = m - \varepsilon \frac{m_\tau}{m} \sin \psi_2 \cos \psi_2 + \varepsilon p \frac{a_1}{a_2} \sin \psi_1 \cos \psi_2$$

Введем новую медленную переменную — сдвиг фаз $\chi = \psi_1 - \psi_2$ и исключим в (3.2) одну быструю фазу. Усредняя правые части дифференциальных уравнений для a_1, a_2, χ по быстрой фазе, получим

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{d\tau} &= -\frac{m_\tau}{2m} a_1 + \frac{1}{2} p a_2 \cos \chi, & \frac{da_2}{d\tau} &= -\frac{m_\tau}{2m} a_2 - \frac{1}{2} p a_1 \cos \chi \\ d\chi/d\tau &= \sqrt{2} p (a_1/a_2 - a_2/a_1) \sin \chi \end{aligned} \quad (3.3)$$

Получим аналитическое решение системы (3.3). Сделаем в (3.3) замену переменных $q_1 = \sqrt{m} a_1, q_2 = \sqrt{m} a_2, q_3 = \cos \chi$. Находим

$$\begin{aligned} dq_1/d\tau &= \sqrt{2} p(\tau) q_2 q_3, & dq_2/d\tau &= -\sqrt{2} p(\tau) q_1 q_3 \\ dq_3/d\tau &= -\sqrt{2} p(\tau) (1 - q_3^2) (q_1^2 - q_2^2) / (q_1 q_2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Перейдем в уравнениях (3.4) к новой независимой переменной $s = \int p(\tau) d\tau$ и сделаем замену переменных $u_1 = q_1^2, u_2 = q_2^2, u_3 = q_1 q_2 q_3$. При этом уравнения (3.4) сводятся к линейной системе с постоянными коэффициентами

$$du_1/ds = u_3, \quad du_2/ds = -u_3, \quad du_3/ds = \sqrt{2} (u_2 - u_1) \quad (3.5)$$

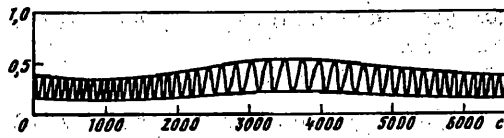
Интегрируя систему (3.5) и возвращаясь к переменным a_1, a_2, χ , получим

$$\begin{aligned} m(\tau) a_1^2 &= c_1 + c_2 \sin(s + \kappa) \\ m(\tau) a_2^2 &= c_1 - c_2 \sin(s + \kappa), & m(\tau) a_1 a_2 \cos \chi &= c_2 \cos(s + \kappa) \\ s &= \beta \tau + 2 \int_0^\tau \frac{h_x (h_x h_y - h_y h_x)}{h_y^2 + h_x^2} d\tau, & c_1, c_2, \kappa &= \text{const} \end{aligned} \quad (3.6)$$

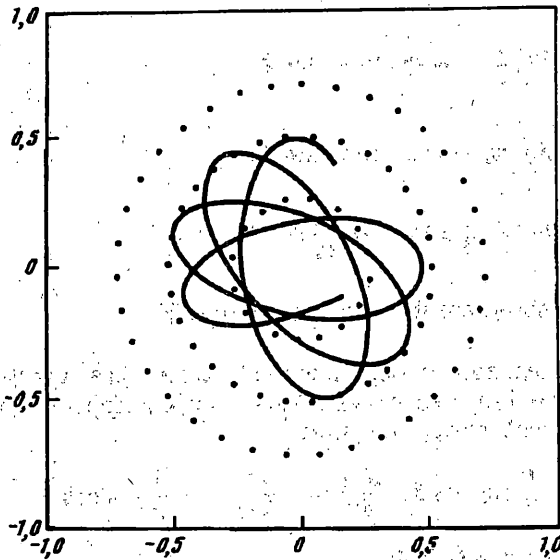
Как следует из (3.6), система (3.4) имеет два первых интеграла, зависящих от медленного времени τ .

$$m(\tau) (a_1^2 + a_2^2) = 2c_1, \quad m^2(\tau) a_1^2 a_2^2 \sin^2 \chi = c_1^2 - c_2^2 \quad (3.7)$$

Замечание. Для приближенного анализа системы магнитной стабилизации часто рассматривают колебания спутника на полярной орбите в поле прямого



Фиг. 1



Фиг. 2

магнитного диполя. Выбирая в этом случае ось X инерциальной системы координат ортогонально плоскости орбиты, получим $h_x = 0$. Таким образом, интегральный член в (3.6) исчезает.

4. Амплитудные кривые. В линейном приближении угол ϑ между осью симметрии спутника и направлением магнитной силовой линии равен величине вектора с проекциями (y_1, y_2) . Точка (y_1, y_2) описывает эллипс (3.1) с центром в начале координат и медленно меняющимися в силу уравнений (3.3) параметрами. При этом справедливы интегралы (3.7). Зависимость $F_{\max}(\tau)$ большой и $F_{\min}(\tau)$ малой полуоси оскулирующего эллипса от медленного времени дает амплитудные кривые — огибающие последовательных максимумов и, соответственно, минимумов угла ϑ . Получим уравнения амплитудных кривых.

Уравнение эллипса (3.1) в прямоугольной системе координат y_1, y_2 имеет вид

$$A_{11}y_1^2 + 2A_{12}y_1y_2 + A_{22}y_2^2 = 1 \quad (4.1)$$

$$A_{11} = 1/a_1^2 \sin^2 \chi, \quad A_{22} = 1/a_2^2 \sin^2 \chi, \quad A_{12} = -\cos \chi / a_1 a_2 \sin^2 \chi$$

В системе координат, связанной с главными осями, ξ_1, ξ_2 , уравнение (4.1) принимает вид [10]: $\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 = 1$, где λ_i (обратные величины квадратов полуосей) являются корнями уравнения $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$, $S = A_{11} + A_{22}$, $\delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2$.

Используя интегралы (3.7) окончательно получим

$$F_{\max} = \left[\frac{c_1 + c_2}{m(\tau)} \right]^{1/2}, \quad F_{\min} = \left[\frac{c_1 - c_2}{m(\tau)} \right]^{1/2} \quad (4.2)$$

В качестве примера огибающие (4.2) сопоставляются далее с результатами численного интегрирования колебаний спутника с параметрами $A = B =$

$= 3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $C = 4,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I = 60 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ на одном витке орбиты с начальными условиями $a = 7879 \text{ км}$, $e = 0,2$, $i = 83^\circ$, $\omega = 45^\circ$, $\Omega = 90^\circ$ (большая полуось, эксцентриситет, наклонение, долгота перигея, долгота восходящего узла). В начальный момент времени $t = 0$ спутник находился на экваторе, угол между осью симметрии и вектором магнитного поля составлял 20° , проекции мгновенной угловой скорости на главные оси инерции $p = q = 0$, $r = 0,001 \text{ рад/с}$. Использовалась модель Magsat [11] магнитного поля Земли; при расчете орбиты учитывалось сжатие Земли.

На фиг. 1 представлена в зависимости от времени полученная в результате численного интегрирования величина проекции единичного вектора e , направленного вдоль оси симметрии спутника, на плоскость u_1, u_2 , ортогональную вектору H , а также амплитудные кривые (4.2). На фиг. 2 изображена кривая на плоскости u_1, u_2 , полученная при проектировании, для интервала времени (2500, 4000). На этой же фигуре нанесены окружности, соответствующие отклонению оси симметрии от направления вектора магнитного поля на 15, 30, и 45 градусов.

Как следует из фиг. 1, полученные аналитические результаты хорошо согласуются с данными численного интегрирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пивоваров М. Л. Вращение спутника с большим магнитным моментом//Космич. исследования. 1986. Т. 24. № 6. С. 816—820.
2. Пивоваров М. Л. Магнитногистерезисное демпфирование колебаний спутника с большим магнитным моментом//Космич. исследования. 1989. Т. 27. № 1. С. 25—30.
3. Пивоваров М. Л. О демпфировании колебаний спутника с большим магнитным моментом//Космич. исследования. 1989. Т. 27. № 3. С. 353—356.
4. Пивоваров М. Л. Жидкостное демпфирование колебаний спутника с большим магнитным моментом//Космич. исследования. 1990. Т. 28. № 6. С. 865—873.
5. Парс Л. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
6. Журавлев В. Ф. Об одной форме уравнений движения симметричного твердого тела//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 5—11.
7. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
8. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 431 с.
9. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
10. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии, дополненные необходимыми сведениями из алгебры. М.: Наука, 1968. 911 с.
11. Langel R. A., Estes R. H., Mead J. D., Fabiana E. B., Lancaster E. R. Initial geomagnetic field model from Magsat vector data//Geophys. Res. Lett. 1980. V. 7. № 10. P. 793—796.

Москва

Поступила в редакцию
2.IV.1991